УДК 517.98+515.164.17

Ю. В. Богданский, Е. В. Моравецкая

(Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ им. И. Сикорского”, Киев)

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ НА БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С РАВНОМЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ

We propose a method for the construction of associated measures on the surfaces of finite codimension embedded in a Banach manifold with uniform atlas.

Запропоновано метод побудови асоційованих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид із рівномірним атласом.

Проблема построения поверхностных мер на поверхностях, вложенных в бесконечномерное пространство, является одной из ключевых в бесконечномерном анализе. Первые, начальные шаги в решении данной задачи были предложены в работе [1]. В работах [2, 3] развит аппарат поверхностного интегрирования в пространствах Фреше. Иной подход к построению поверхностных мер был использован в работах [4, 5].

В работе [6] предложен принципиально иной подход к построению ассоциированной меры для замкнутой поверхности коразмерности 1. Предложенный метод применим к поверхностям, вложенным не только в линейное пространство, но и в нелинейное многообразие. Адекватность предложенного в работе [6] подхода подтверждается полученным на основе него вариантом формулы Гаусса – Остроградского и возможностью переноса на бесконечномерный случай ряда результатов классической конечномерной теории краевых задач (см. [7, 8]).

Конструкция поверхностного интегрирования реализована на банаховых многообразиях, наделенных атласом специального вида — „равномерным атласом”. В работе [9] было замечено, что именно на этот класс бесконечномерных многообразий возможен перенос ряда классических конечномерных результатов. Как оказалось впоследствии, этот класс бесконечномерных многообразий естественно возникает в стохастической дифференциальной геометрии (см. [10]).

Данная статья является логическим продолжением работы [6]. В ней предлагается метод построения ассоциированных мер на поверхностях конечной коразмерности (не обязательно замкнутых), вложенных в банахово многообразие M с равномерной структурой.

1. Предварительные сведения (см. [6]). Пусть M — связное хаусдорфово банахово многообразие класса C^2 с модельным вещественным пространством E.

Атлас $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M называем *ограниченным*, если существует такое число $K > 0$, что отображение склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для каждой пары карт атласа удовлетворяет условию $\big(x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\big) \implies \Big(\big\|F'_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K,\ \big\|F''_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K\Big)$. Ограниченные атласы Ω_1 и Ω_2 называем *эквивалентными*, если $\Omega_1 \cup \Omega_2$ снова является ограниченным атласом. Если на M задан класс эквивалентных ограниченных атласов, то говорим, что на M задана *ограниченная структура* (класса C^2).

Пусть (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2) — два банаховых многообразия M_1 и M_2 класса C^2 с модельными пространствами E_1 и E_2 и ограниченными атласами Ω_1 и Ω_2 соответственно. Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ класса C^2 назовем *ограниченным морфизмом*, если для него существует такое число $C > 0$, что для любой пары карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ и $(V, \psi) \in \Omega_2$ выполнено условие $\big(p \in U,\ f(p) \in V\big) \implies \Big(\big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(k)}\big(\varphi(p)\big)\big\| \le C,\ k = 1, 2\Big)$. Естественным образом определен *ограниченный изоморфизм* (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2).

Свойство отображения f быть ограниченным морфизмом не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных ограниченных атласов исходных многообразий, и можно говорить о категории банаховых многообразий класса C^2 с ограниченной структурой.

Задание на M ограниченного атласа позволяет ввести на M метрику. Для кусочно-гладкой кривой $[t_1, t_2] \ni t \mapsto x(t) \in M$ рассматриваем всевозможные разбиения $\Delta\colon t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_m = t_2$ отрезка параметра, при которых каждая кривая $\Gamma_k = \big\{x(t) \mid \tau_{k-1} \le t \le \tau_k\big\}$ лежит в области определения U_k одной из карт (U_k, φ_k) исходного атласа. Каждому такому разбиению Δ сопоставляем число $l(\Gamma; \Delta) = \sum_{k=1}^{m} l(\Gamma_k)_{\varphi_k}$ $\Bigg($здесь $l(\Gamma_k)_\varphi$ — длина представления кривой Γ_k в карте $\varphi\colon \displaystyle\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \big\|(x_\varphi)'(\tau)\big\|\, d\tau,\ x_\varphi(\tau) = \varphi\big(x(\tau)\big)\Bigg)$. Ограниченность атласа приводит к корректному определению длины кривой $\Gamma\colon L(\Gamma) = \sup_\Delta \big\{l(\Gamma; \Delta)\big\}$. Расстояние между точками вводим как точную нижнюю грань длин всевозможных кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Полученная метрика согласована с исходной топологией. При переходе к эквивалентному ограниченному атласу метрика заменяется на эквивалентную $\big($существуют такие $C_1, C_2 > 0$, что $C_1\rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le C_2\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in M\big)$. Ограниченный морфизм $f\colon (M_1, \Omega_1) \to (M_2, \Omega_2)$ при фиксированных ограниченных атласах Ω_1 и Ω_2 является липшицевым отображением относительно метрик, порожденных этими атласами.

Фиксация ограниченного атласа позволяет ввести в касательном пространстве T_pM к многообразию M норму, эквивалентную норме модельного пространства. Для $\xi \in T_pM$ положим $|||\xi|||_p = \sup_\alpha \|\xi_{\varphi_\alpha}\|$, где $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — полный набор карт, для которых $p \in U_\alpha$, а $\xi_\varphi \in E$ — представление касательного вектора ξ в карте φ. При этом имеет место свойство *равномерного топологического изоморфизма* пространств T_pM и модельного пространства E: $\|\xi_\varphi\| \le |||\xi|||_p \le K\|\xi_\varphi\|$, где K — постоянная из определения ограниченного атласа, а φ — карта в точке $p \in M$.

На многообразии с ограниченным атласом (M, Ω) корректно задание *ограниченного* тензорного поля T класса C^1. Предполагается существование числа $C > 0$, ограничивающего сверху норму главной части T_α каждого локального представления тензора T вместе с нормой ее производной $\big((U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega;\ x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \Longrightarrow \Big(\big\|T_\alpha(x)\big\| \le C;\ \big\|T'_\alpha(x)\big\| \le C\Big)$. Свойство ограниченности тензорного поля инвариантно относительно перехода к эквивалентному ограниченному атласу. Такие тензорные поля в дальнейшем называем тензорными полями класса $C_b^1(M)$. Естественным образом определяем гладкие функции класса $C_b^p(M)$, $p = 0, 1, 2$; $C_b(M) = C_b^0(M)$. Кроме того, подобные обозначения будут применяться и для открытых подмножеств $U \subset M$, а также без указания области определения полей. Указанный класс полей также инвариантен относительно перехода к эквивалентному атласу.

Ограниченный атлас Ω называем *равномерным*, если существует такое число $r > 0$, что для любой точки $p \in M$ существует карта $(U, \varphi) \in \Omega$, для которой $\varphi(U)$ содержит шар в E с центром $\varphi(p)$ радиуса r [9, 10].

Метрика на M, порожденная равномерным атласом, превращает M в полное метрическое пространство. Если ограниченный атлас эквивалентен равномерному, то метрика, порожденная этим атласом, также является полной. Если среди эквивалентных атласов, задающих на M ограниченную структуру, есть равномерный атлас, то эту структуру будем называть *равномерной*. Структуры ограниченно изоморфных многообразий одновременно равномерны или нет.

В случае равномерного атласа поток $\Phi(t,x)$ векторного поля X класса $C_b^1(M)$ определен на $\mathbb{R}\times M$ [9, с. 96]. Следовательно, данное свойство имеет место на многообразии с равномерной структурой.

Примером банахова многообразия класса C^2, допускающего равномерный атлас, является поверхность уровня S гладкой функции F в гильбертовом пространстве. Если F принадлежит классу C_b^2 в некоторой окрестности S и $\inf_S \|F'(\cdot)\| > 0$, то в качестве равномерного атласа на S можно предложить $\Omega = \big\{(U_x,\varphi_x) \mid x\in S\big\}$, где φ_x — ортогональная проекция окрестности в S точки x на касательное пространство T_xS.

Если (M_1,Ω_1) и (M_2,Ω_2) — банаховы многообразия с ограниченными атласами и модельными пространствами E_1 и E_2, то на $M_1\times M_2$ определен атлас $\Omega_1\times\Omega_2 := \big\{(U\times V,\ \varphi\times\psi) \mid (U,\varphi)\in\Omega_1;\ (V,\psi)\in\Omega_2\big\}$. Получаем многообразие с ограниченным атласом $(M_1\times M_2,\ \Omega_1\times\Omega_2)$ и модельным пространством $E_1 \dotplus E_2$. Если V — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, то для многообразия с ограниченным атласом (M,Ω) ограниченную структуру на $M\times V$ условимся задавать атласом $\Omega\times id = \big\{(U\times V,\ \varphi\times id) \mid (U,\varphi)\in\Omega\big\}$.

2. Вложенная поверхность конечной коразмерности. Пусть в дальнейшем банахово C^2-многообразие M снабжено ограниченной структурой.

Определение 1. *Подмножество $S\subset M$ назовем (вложенной) поверхностью в M коразмерности m, если существуют многообразие N с ограниченной структурой, модельным пространством которого является подпространство E_1 в E коразмерности m, открытая окрестность V нуля $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ и ограниченный изоморфизм $g\colon N\times V\to U\subset M$ на открытое подмножество U в M, при котором $g\big(N\times\{\vec{0}\}\big)=S$.*

Далее предполагается, что на M фиксирован ограниченный атлас, согласованный с исходной равномерной структурой, а потому и соответствующая метрика.

Модельным пространством многообразия $N\times V$ является банахово пространство $E_1\dotplus\mathbb{R}^m$ $\big($с нормой $\|\langle\xi,\vec{h}\rangle\| = \|\xi\|+\|\vec{h}\|\big)$, топологически изоморфное пространству E. Если V содержит замкнутый шар $\overline{B_r}$ с центром в $\vec{0}$ радиуса r, то для метрики $\widetilde{\rho}$, порожденной на $N\times V$ указанным выше атласом $\Omega\times id$, выполнено следующее свойство: $(p,q\in N;\ \vec{v}\in\partial B_r) \Longrightarrow \Big(\widetilde{\rho}\big(\langle p,\vec{v}\,\rangle,\ \langle q,\vec{0}\,\rangle\big)\ge r\Big)$. Поскольку морфизм $g^{-1}\colon U\to N\times V$ липшицев относительно метрик ρ на M и $\widetilde{\rho}$ на $N\times V$, то существует $\delta>0$, для которого выполнено свойство $\big(x\in S;\ y\in g(N\times\partial B_r)\big) \Longrightarrow \big(\rho(x,y)\ge\delta\big)$.

Для $\varepsilon>0$ положим $S_{-\varepsilon} = \big\{x\in S \mid \rho(x, M\setminus U)\ge\varepsilon\big\}$. Тогда существует такое $\alpha>0$, что $S_{-\varepsilon}\ne\varnothing$ для $\varepsilon\in(0,\alpha)$. Очевидно, что $(S_{-\varepsilon})_\varepsilon\subset U$ (здесь и в дальнейшем A_ε — ε-окрестность множества A).

$N\times\{\vec{0}\,\}$ — борелевское множество в $N\times V$, а поскольку $g\colon N\times V\to U$ — гомеоморфизм, то $S\in\mathcal{B}(M)$.

Из непрерывности функции $f(x)=\rho(x,M\setminus U)$ и равенства $S_{-\varepsilon} = S\bigcap\big\{x \mid f(x)\ge\varepsilon\big\}$ следует, что $S_{-\varepsilon}\in\mathcal{B}(S)$. Кроме того, $S_{-1/n}\nearrow S$; $S_{-\varepsilon}$ замкнуто в M, так как $S_{-\varepsilon} = \overline{S}\bigcap\big\{x \mid f(x)\ge\varepsilon\big\}$.

Если S — замкнутая поверхность в банаховом многообразии M с равномерной структурой, то $S_{-\varepsilon}=S$ при $\varepsilon\in(0,\delta)$.

3. Ассоциированная форма поверхности.

Определение 2. *Пусть S — поверхность в M коразмерности m; $g\colon N\times V\to U\subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложение поверхности S в M; ω — дифференциальная m-форма класса C_b^1, определенная на U (или на большем открытом подмножестве* *в* M). *Пусть для любой точки* $x \in S$ *пространство* T_xS *является ассоциированным подпространством внешней формы* $\omega(x)$ *в пространстве* T_xM $\Big($*иными словами,* $T_xS = \big\{Y \in \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\}$, *где* i_Y — *внутреннее умножение внешней формы* $\omega(x)$ *на вектор* $Y\Big)$. *Дополнительно предполагаем, что для некоторого (а потому и для любого эквивалентного) ограниченного атласа* Ω *на* M, *подчиненного данной ограниченной структуре, выполнено следующее условие: существует такое* $\alpha > 0$, *что для каждого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *существует* $\delta > 0$, *для которого для любых* $x \in S_{-\varepsilon}$ *и карты* $(U, \varphi) \in \Omega$ *в точке* x (*т. е.* $x \in U$) *для представления* ω *в этой карте выполняется неравенство* $\Big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| \geq \delta$. *Тогда форму* ω *назовем ассоциированной формой поверхности* S.

Если через $\Big|\Big|\Big|T(p)\Big|\Big|\Big|_p$ обозначить норму значения тензорного поля T в пространстве $\big(T_pM, |||\cdot|||_p\big)$, то последнее условие в определении 2 допускает эквивалентную формулировку

$$\exists\alpha > 0 \quad \forall\varepsilon \in (0, \alpha) \qquad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in S_{-\varepsilon}: \quad \Big|\Big|\Big|\omega(x)\Big|\Big|\Big|_x \geq \delta.$$

Поясним существование ассоциированной формы поверхности S. Пусть $g\colon N \times V \to g(N \times \times V) = U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий S; W — шар радиуса $r > 0$ с центром в $\vec{0}$, компактно вложенный в V $\big(\overline{W} \subset V\big)$; h — непрерывно дифференцируемая функция на V, для которой $h(\vec{0}\,) \neq 0$, $h(\vec{v}\,) = 0$ для $\vec{v} \notin W$; P — проекция $N \times V$ на V. Тогда определенная на U m-форма $\big(g^{-1}\big)^* P^*(h\,dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ удовлетворяет всем условиям m-формы, ассоциированной с поверхностью S.

Заметим, что построенная в данном примере форма ω является замкнутой (дополнительное требование замкнутости ассоциированной формы естественным образом появится в дальнейших исследованиях).

4. Трансверсальные наборы векторных полей. Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности m; $g\colon N \times V \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложение S в M, и ω — ассоциированная m-форма поверхности S. Рассмотрим набор определенных на U (или на большем открытом подмножестве в M) векторных полей $\vec{Z} := \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ класса C_b^1.

Определение 3. *Набор векторных полей* $\vec{Z}$ *назовем трансверсальным к* S, *если для каждой точки* $x \in S$ *выполняется неравенство* $\omega(\vec{Z}\,)(x) := \omega(Z_1, \ldots, Z_m)(x) \neq 0$, *и строго трансверсальным к* S, *если существует такое* $\alpha > 0$, *что для каждого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $x \in S_{-\varepsilon}$ *имеет место неравенство* $\big|\omega(\vec{Z}\,)(x)\big| \geq \delta$.

Лемма 1. *Определение трансверсальности и строгой трансверсальности к* S *набора векторных полей* $\vec{Z}$ *не зависит от выбора ассоциированной формы* ω *поверхности* S.

Доказательство. *Шаг* 1. Пусть E_1 — подпространство в E коразмерности m; α и β — две внешние формы на E, для которых $E_1 = \{y \in E \mid i_y\alpha = 0\} = \{y \in E \mid i_y\beta = 0\}$. Докажем, что α и β коллинеарны.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — линейно независимая система векторов и $E = E_1 \dotplus$ л.о.$\{x_1, \ldots, x_m\}$. Пусть $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c_1$, $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c_2$. Докажем равенство $c_1\beta - c_2\alpha = 0$. Действительно, каждый вектор $z_k \in E$ представим в виде $z_k = y_k + \lambda_1^{(k)}x_1 + \ldots + \lambda_m^{(k)}x_m$, $y_k \in E_1$. Поэтому

$$(c_1\beta - c_2\alpha)(z_1, z_2, \ldots, z_m) = (c_1\beta - c_2\alpha)\left(y_1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)}x_i, \ldots, y_m + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(m)}x_i\right) =$$

$$= \det\bigl(\lambda_i^{(j)}\bigr)\bigl(c_1\beta(x_1, x_2, \ldots, x_m) - c_2\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m)\bigr) = 0.$$

Шаг 2. Пусть ω_1 и ω_2 — две ассоциированные m-формы поверхности S в M. Для каждой точки $x \in S$ соответствующие внешние формы коллинеарны в пространстве T_xM и не равны нулю. Отсюда непосредственно следует независимость условия трансверсальности набора $\vec{Z}$ от выбора ассоциированной формы поверхности S.

В то же время из определения 2 ассоциированной формы поверхности следует, что для $\varepsilon \in (0, \alpha)$ коэффициент коллинеарности $\lambda(x)$ форм ω_1 и ω_2 в точках $x \in S_{-\varepsilon}$ $\bigl(\omega_1(x) = \lambda(x)\omega_2(x)\bigr)$ удовлетворяет условиям $\sup_{S_{-\varepsilon}}\bigl|\lambda(\cdot)\bigr| < \infty$, $\inf_{S_{-\varepsilon}}\bigl|\lambda(\cdot)\bigr| > 0$, что доказывает независимость условия строгой трансверсальности набора $\vec{Z}$ от выбора ассоциированной формы поверхности.

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 1.** Нетрудно проверить, что условие ассоциированной m-формы поверхности S и условие трансверсальности (строгой трансверсальности) набора векторных полей не изменится при переходе к эквивалентному ограниченному атласу, а поэтому определяется лишь выбором ограниченной структуры.

В дальнейшем нас будут интересовать строго трансверсальные к S наборы попарно коммутирующих векторных полей.

***Пример* 1.** Приведем пример строго трансверсального к S набора попарно коммутирующих векторных полей. Пусть $g\colon N \times V \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий S, и шар $W = \bigl\{\vec{t} \in \mathbb{R}^m \mid \|\vec{t}\| < r\bigr\}$ компактно вложен в V. Отображение $h\colon \vec{s} \mapsto \dfrac{2r}{\pi}\dfrac{\operatorname{arctg}\|\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}\vec{s}$, $\vec{s} \neq 0$, $h(\vec{0}\,) = \vec{0}$, диффеоморфно отображает $\mathbb{R}^m$ на W. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — векторные поля на W, h-связанные с полями $\dfrac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial s_m}$ на $\mathbb{R}^m$, а поля $\eta_1, \ldots, \eta_m$ на V получены продолжением полей ξ_k нулем вне W. Если $P\colon N \times V \to V$ — проекция на второй сомножитель, то поля $Y_1, \ldots, Y_m$ на $N \times V$, P-связанные с полями $\eta_1, \ldots, \eta_m$, попарно коммутируют и образуют строго трансверсальный набор к поверхности $N \times \{\vec{0}\,\}$. Искомый набор векторных полей состоит из полей $Z_1, \ldots, Z_m$, g-связанных с $Y_1, \ldots, Y_m$. Заметим также, что построенные в данном примере поля Z_k являются полными.

Обозначим через $\Phi_t^X = \Phi^X(t;\cdot)$ (локальный) поток векторного поля X и положим $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} := \Phi_{t_1}^{Z_1}\Phi_{t_2}^{Z_2}\ldots\Phi_{t_m}^{Z_m}$ $\bigl($здесь $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m\bigr)$. Значение $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$ не зависит от порядка сомножителей в силу коммутируемости векторных полей набора $\vec{Z}$. При этом $\Phi_{\vec{t}+\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}\Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}}\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$. Положим также $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}A := \Bigl\{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \bigm| x \in A\Bigr\}$ и $\Phi_W^{\vec{Z}}A := \Bigl\{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \bigm| \vec{t} \in W;\ x \in A\Bigr\}$.

Теорема 1. *Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности $m, g\colon N \times V \to U \subset M$ — определяющий S ограниченный изоморфизм. Пусть набор $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ попарно коммутирующих векторных полей класса $C_b^1(U)$ строго трансверсален к поверхности S и $\varepsilon > 0$. Тогда существует окрестность $W = W(\varepsilon)$ нуля в $\mathbb{R}^m$ такая, что*:

1) *отображение*

$$\Phi\colon S_{-\varepsilon} \times W \ni (x, \vec{t}\,) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}x \in \Phi_W^{\vec{Z}}S_{-\varepsilon} \tag{1}$$

определено и взаимно однозначно;

2) *существует окрестность W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для которой $\Phi_W^{\vec{Z}}S_{-\varepsilon} \supset g(N_{-2\varepsilon} \times W_1)$ $\bigl($здесь и далее $N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\,\} := g^{-1}(S_{-\varepsilon})\bigr)$.*

Доказательство. *Шаг* 1. Определенные на $N\times V$ векторные поля $\widetilde{Z_k}$, g-связанные с Z_k, образуют набор попарно коммутирующих полей класса $C_b^1(N\times V)$, строго трансверсальный к поверхности $N\times\{\vec{0}\,\}=g^{-1}(S)$. В силу взаимной однозначности g, не теряя общности, можно для удобства считать, что $U=N\times V$, не меняя при этом обозначения для набора векторных полей и заменяя S на $N\times\{\vec{0}\,\}$.

В силу леммы 1 в качестве ассоциированной m-формы поверхности $N\times\{\vec{0}\,\}$ можно взять $\omega(x,\vec{t}\,)=dt_1\wedge dt_2\wedge\ldots\wedge dt_m$.

Векторные поля Z_k представимы в виде

$$Z_k(x,\vec{t}\,)=Q_k(x,\vec{t}\,)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_k^j(x,\vec{t}\,)\frac{\partial}{\partial t_j}, \tag{2}$$

где $Q_k(x,\vec{t}\,)\in T_{(x,\vec{t}\,)}(N\times\{\vec{t}\,\})$ — горизонтальная составляющая векторного поля Z_k. Поэтому $\omega(x,\vec{t}\,)\big(Z_1(x,\vec{t}\,),Z_2(x,\vec{t}\,),\ldots,Z_m(x,\vec{t}\,)\big)=\det\big(\alpha_k^j(x,\vec{t}\,)\big)$.

Поскольку форма ω и поля Z_k принадлежат классу C_b^1, то функция $\det\big(\alpha_k^j(x,\vec{t}\,)\big)$ равномерно непрерывна в $N\times V$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$. В силу условия строгой трансверсальности существует $\delta>0$, для которого при всех $x\in N_{-\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$\Big|\det\big(\alpha_k^j(x,\vec{0}\,)\big)\Big|\geq\delta. \tag{3}$$

Поэтому существует вложенный в V шар $B_r=\big\{\vec{t}\mid\|\vec{t}\|<r\big\}$, для которого при всех $(x,\vec{t}\,)\in$ $\in N_{-\varepsilon}\times B_r$ имеет место неравенство $\big|\det\big(\alpha_k^j(x,\vec{t}\,)\big)\big|>0$.

Поскольку векторные поля Z_k равномерно ограничены в $N\times V$, то, уменьшая, если необходимо, $r>0$, обеспечиваем также выполнение условия $\big(x\in N_{-\varepsilon}\times\{\vec{0}\,\};\ \|\vec{t}\|<r\big)\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}x\in N\times V\Big)$.

Пусть $x_1,x_2\in N_{-\varepsilon}\times\{\vec{0}\,\}$, $s_1,s_2\in B_{r/2}$ и

$$\Phi_{\vec{s_1}}^{\vec{Z}}x_1=\Phi_{\vec{s_2}}^{\vec{Z}}x_2. \tag{4}$$

Докажем, что в этом случае $x_1=x_2$.

Из равенства (4) в силу попарной коммутируемости полей Z_k следует равенство $\Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}}x_1=x_2$, где $\vec{s}=\vec{s_1}-\vec{s_2}\in B_r$. Если $\vec{s}=\vec{0}$, то равенство $x_1=x_2$ очевидно.

Пусть $\{\vec{e_k}\}$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$ и $\|\cdot\|$ — соответствующая норма. Пусть $Y_{\vec{h}}=\sum_{k=1}^m h_kZ_k$, где $\|\vec{h}\|=1$, и PY — вертикальная составляющая поля Y. Поскольку поля Z_k принадлежат классу C_b^1, семейство функций $PY_{\vec{h}}\colon N\times V\ni\langle x,\vec{t}\,\rangle\mapsto$ $\mapsto PY_{\vec{h}}\big(x,\vec{t}\,\big)\in\mathbb{R}^m$ равномерно $\big($относительно $\vec{h}\,\big)$ ограничено и равномерно липшицево.

Из (3) и неравенства Адамара следует неравенство

$$\inf\Big\{\big\|PY_{\vec{h}}(x,\vec{0}\,)\big\|\ \big|\ x\in S_{-\varepsilon};\ \|\vec{h}\|=1\Big\}=\alpha>0.$$

Тогда существует $\gamma>0$ такое, что из неравенства $\rho\big(\langle y,\vec{t}\,\rangle,\langle x,\vec{0}\,\rangle\big)<\gamma$ (где $\langle y,\vec{t}\,\rangle\in N\times V$, $x\in N_{-\varepsilon}$) для всех $\vec{h}$ $(\|\vec{h}\|=1)$ следует оценка

$$\big(PY_{\vec{h}}(y,\vec{t}\,), PY_{\vec{h}}(x,\vec{0}\,)\big) > \frac{\alpha^2}{2}. \tag{5}$$

Уменьшая, если необходимо, $r > 0$, получаем импликацию $\big((\tau \in (0,r))\big) \Longrightarrow \Big(\rho\Big(\Phi_\tau^{Y_{\vec{h}}}x, (x,\vec{0}\,)\Big) < \gamma\Big)$, справедливую при всех $\langle x,\vec{h}\rangle \in N_{-\varepsilon} \times \big\{\vec{h} \mid \|\vec{h}\| = 1\big\}$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, полагаем $\tau = \|\vec{s}\,\|$, $\vec{h} = \dfrac{1}{\tau}\,\vec{s}$, $Y = Y_{\vec{h}}$. Тогда $\Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}} x_1 = \Phi_\tau^Y x_1$. Докажем, что $\Phi_\tau^Y x_1 \notin N \times \{\vec{0}\}$ при $\tau \notin (0,r)$.

Если $\big(x(\tau),\, \vec{t}\,(\tau)\big)$ — траектория поля Y, $\big(x(0),\, \vec{t}\,(0)\big) = (x_1, \vec{0}\,)$, то в силу (5) получаем

$$\big(\vec{t}\,(\tau), PY(x_1,\vec{0}\,)\big) = \int\limits_0^\tau \Big(PY\big(x(\tau),\vec{t}\,(\tau)\big), PY\big(x_1,\vec{0}\,\big)\Big)\,d\tau > \tau\,\frac{\alpha^2}{2} > 0.$$

Тем самым из равенства (4) следует равенство $x_1 = x_2$, поэтому и $\vec{s_1} = \vec{s_2}$. Окрестность нуля $W = B_{\frac{r}{2}}$ удовлетворяет первому утверждению теоремы.

Шаг 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $x = (x_0,\vec{t_0}) \in N_{-\varepsilon} \times B_r$ и рассмотрим отображение $F_x : V_x \ni \vec{t} \mapsto P\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x\Big) \in \mathbb{R}^m$ (P — проекция на второй сомножитель). Здесь V_x — окрестность $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$, для которой $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in N \times V$.

В силу (2) справедливо равенство

$$(F_x)'(\vec{t}\,) = \Big(\alpha_k^j\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x\Big)\Big). \tag{6}$$

Поэтому $F_x \in C_b^1(V_x)$ и существует константа $C > 1$, для которой

$$\big\|(F_x)'(\vec{t}\,)\big\| \le C \tag{7}$$

для всех $x \in N_{-\varepsilon} \times B_r$ и $\vec{t} \in V_x$. При этом $F_x(\vec{0}\,) = \vec{t_0}$.

Согласно классической теореме о дифференцировании обратного отображения, F_x диффеоморфно отображает некоторую окрестность U_1 нуля в $\mathbb{R}^m$ на окрестность U_2 точки $\vec{t_0} \in \mathbb{R}^m$. Далее, поскольку все поля Z_k принадлежат классу C_b^1, существует такое $\gamma > 0$, что $\big(x_0 \in N_{-2\varepsilon};\ \|\vec{t_0}\| < \gamma;\ \|\vec{t}\,\| < \gamma\big) \Longrightarrow \Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in N_{-\varepsilon} \times V\Big)$.

Снова воспользуемся равномерной непрерывностью в $N \times V$ функции $\det\big(\alpha_k^j(\cdot)\big)$. Существует число $p > 0$ (берем $p < r$), для которого при всех $(y,\vec{t}\,) \in N_{-\varepsilon} \times B_p$ выполнено неравенство $\Big|\det\big(\alpha_k^j(\cdot)\big)\Big| > \dfrac{\delta}{2}$.

Если теперь взять точку $x = (x_0,\vec{t_0}) \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$, где $q = \min\Big(\gamma, \dfrac{p}{2C}\Big)$, то при $\|\vec{t}\,\| < q$ значение $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x$ принадлежит $N_{-\varepsilon} \times B_p$, поэтому (см. (6))

$$\big|\det F_x'(\vec{t}\,)\big| > \frac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Анализ доказательства теоремы об обратной функции позволяет из неравенств (7) и (8), которые выполняются при каждом $x \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$ равномерно в окрестности нуля B_q, сделать вывод о существовании не зависящей от $x \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$ постоянной $\chi > 0$, для которой диффеоморфизм $F_x : U_1 \to U_2$ имеет свойство $U_2 \supset \big\{\vec{t} \mid \|\vec{t} - \vec{t_0}\| \le \chi\big\}$.

Если теперь положить $\xi = \min(q, \chi)$, то придем к следующему выводу: для любого $x \in \in N_{-2\varepsilon} \times B_\xi$ существует $\vec{t} \in B_\xi \subset B_{r/2}$, при котором $y = \Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$, а следовательно, $x = \Phi^{\vec{Z}}_{-\vec{t}} y \in \Phi^{\vec{Z}}_{B_{r/2}} \big(N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}\big)$. Тем самым справедливо второе утверждение теоремы, если положить $W_1 = B_\xi$.

Теорема 1 доказана.

Полученные в теореме 1 окрестности W и W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$ зависят от $\varepsilon > 0$. Если поверхность S замкнута, а многообразие M наделено равномерной структурой, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равенство $S = S_{-\varepsilon}$. Поэтому для замкнутой поверхности S из доказанной теоремы следует существование окрестностей W и W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для которых определено $\Phi^{\vec{Z}}_W S \supset g(N \times W_1)$.

5. Поверхностные меры первого типа. Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности m и $g\colon N \times V \to U \subset M$ — соответствующий ограниченный изоморфизм. $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей класса $C^1_b(U)$. Пусть μ — конечная борелевская мера, определенная на M. Задача состоит в построении меры на S, индуцированной мерой μ и набором полей $\vec{X}$. Поскольку $S_{-1/n} \nearrow S$, то достаточно построить согласованные между собой меры на $S_{-\varepsilon}$ при достаточно малых положительных ε $\big(\varepsilon \in (0, \alpha)\big)$.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ и отображение $\Phi\colon S_{-\varepsilon} \times W \to \Phi^{\vec{X}}_W S_{-\varepsilon} \subset U$ построено в соответствии с теоремой* 1 (*см.* (1)). *Тогда существует такое $p > 0$, что $\overline{B}_{2p} \subset W$ и отображение $\Psi = \Phi\,\big|_{S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p} \colon S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p \to \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_p} S_{-\varepsilon}$ — гомеоморфизм $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p$ на замкнутое подмножество многообразия M $\Big($здесь и далее $\overline{B}_p = \big\{\vec{t} \mid \|\vec{t}\| \le p\big\} \subset \mathbb{R}^m\Big)$.*

Доказательство. Берем p такое, что $\overline{B}_{2p} \subset W$. В силу теоремы 1 отображение Ψ взаимно однозначно. Непрерывность отображения Ψ следует из теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных условий.

Пусть теперь $y_n = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_n}} x_n \to y_0 = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_0}} x_0$ $\big(x_n, x_0 \in S_{-\varepsilon},\ \vec{t_n}, \vec{t_0} \in \overline{B}_p\big)$. Тогда последовательность $\vec{t_n}$ сходится к $\vec{t_0}$. Действительно, в противном случае существует подпоследовательность $\vec{t}_{n_k} \to \vec{s} \ne \vec{t_0},\ s \in \overline{B}_p$, откуда следует

$$x_{n_k} = \Phi^{\vec{X}}_{-\vec{t}_{n_k}} y_{n_k} \to \Phi^{\vec{X}}_{-\vec{s}} y_0 = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_0} - \vec{s}} x_0 \in S_{-\varepsilon}$$

(в силу замкнутости $S_{-\varepsilon}$), что противоречит взаимной однозначности отображения Φ.

Приведенные рассуждения доказывают также, что $x_n \to x_0$. Тем самым доказана непрерывность отображения Ψ^{-1}.

Пусть теперь $y_n = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_n}} x_n \to y_0 \in M$ $\big(\vec{t_n} \in \overline{B}_p;\ x_n \in S_{-\varepsilon}\big)$. Для доказательства замкнутости образа Ψ следует проверить, что $y_0 = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_0}} x_0$, где $x_0 \in S_{-\varepsilon}$, $\vec{t_0} \in \overline{B}_p$. Покажем, что, уменьшив p, можно представить y_0 в указанном виде, но при $x_0 \in S_{-\varepsilon/4}$. После этого из проведенных выше рассуждений будет следовать, что $x_0 \in S_{-\varepsilon}$ (в силу замкнутости $S_{-\varepsilon}$).

Прежде всего заметим, что $\rho(S \backslash S_{-\varepsilon/2}, S_{-\varepsilon}) \ge \dfrac{\varepsilon}{2}$, поэтому в силу липшицевости морфизмов g и g^{-1} существует $\beta = \beta(\varepsilon) > 0$, для которого выполнено неравенство

$$\rho\Big(S_{-\varepsilon}, g\big((N \setminus N_{-\varepsilon/2}) \times V\big)\Big) \ge \beta \tag{9}$$

$\left(\beta = \dfrac{\varepsilon}{2L_1L_2}\right.$, где $L_1,\ L_2$ — соответствующие отображениям g и g^{-1} константы Липшица$\Big)$.

Поэтому существует такое $\gamma > 0$, что $\big(\|\vec t\| \le \gamma;\ x \in S_{-\varepsilon}\big) \Longrightarrow \big(\Phi^{\vec X}_{\vec t}x \in g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)\big)$. Здесь W_1 — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$, существование которой обосновано в теореме 1 $\left(\text{для } \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$. Не теряя общности W_1 можно считать замкнутым шаром с центром в $\vec 0$. Но тогда множество $g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$ замкнуто в M, а в силу теоремы 1 точка $y \in g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$ представима в виде $y = \Phi^{\vec X}_{\vec t}x$, где $\|\vec t\| \le \gamma,\ x \in S_{-\varepsilon/4}$.

Лемма 2 доказана.

Следствием является вывод

$$\big(A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon});\ B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)\big) \Longrightarrow \Big(\Phi^{\vec X}_B A \in \mathcal{B}(U) \subset \mathcal{B}(M)\Big).$$

Если μ — конечная борелевская мера на M, то с каждым борелевским множеством $A \in \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ связываем меру w_A на $\mathcal{B}(\overline{B}_p)$, определенную формулой

$$w_A(B) = w_A^{\vec X}(B) = \mu\Big(\Phi^{\vec X}_B A\Big),$$

а с каждым множеством $B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)$ связываем меру ν_B на $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, определенную равенством

$$\nu_B(A) = w_A(B) = \mu\Big(\Phi^{\vec X}_B A\Big).$$

Пусть λ_m — инвариантная мера Лебега на $\mathbb{R}^m,\ B_r = \left\{\vec t \mid \|\vec t\| < r\right\} \subset \mathbb{R}^m\Big)$ и существует предел

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec 0\,) := \lim_{r\to 0}\frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\nu_{B_r}(A). \tag{10}$$

Если данный предел существует для каждого $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, то на основании теоремы Никодима делаем вывод о том, что функция множеств $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon}) \ni A \mapsto \dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec 0\,)$ является конечной борелевской мерой на $S_{-\varepsilon}$.

Введем обозначение $\sigma_{\vec X}(A) := \dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec 0\,)$. Значение $\sigma_{\vec X}(A)$ не зависит от $\varepsilon > 0$, а поскольку каждое $A \in \mathcal{B}(S)$ представимо в виде дизъюнктного объединения $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$, где $A^{(n)} \in \in S_{-\varepsilon_n}$ при некотором $\varepsilon_n > 0$, то мера $\sigma_{\vec X}$ корректно продолжается на $\mathcal{B}(S)$.

Определение 4. *Меру* $\sigma_{\vec X} = \sigma_{\vec X}[\mu]$ *назовем поверхностной мерой первого типа на* S $\big($*порожденной семейством полей* $\vec X\big)$.

Заметим, что если исходная мера μ является неотрицательной, то $\sigma_{\vec X}$ также неотрицательна. Кроме того, мера $\sigma_{\vec X}$ является конечной. В случае замкнутой поверхности S на многообразии с равномерной структурой при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство $S = S_{-\varepsilon}$, откуда и следует конечность меры $\sigma_{\vec X}$ на S. Общий случай получим как следствие теоремы 2 (замечание 2).

Приведем условие, при котором для достаточно малых $\varepsilon > 0$ для всех $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ существует предел, определенный формулой (10).

Пусть Φ_t^X — поток векторного поля X класса $C_b^1(M)$. Дифференцируемость конечной борелевской меры μ вдоль поля X (в сильном смысле) предполагает существование для каждого борелевского множества $A \in \mathcal{B}(M)$ предела $\nu(A) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)\big)$, откуда следует, что $\nu = d_X\mu$ является (конечной) борелевской мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. При этом соответствующая плотность $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ называется логарифмической производной меры μ относительно поля X или дивергенцией поля X (относительно меры μ).

Теорема 2. *Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности m и $g\colon N\times V \to U \subset M$ — соответствующий ограниченный изоморфизм; $\vec{Z} = \{Z_1,\ldots,Z_m\}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих, определенных на U или на большем открытом подмножестве M полных векторных полей класса C_b^1. Более того, положим отображение $\Phi\colon S\times\mathbb{R}^m \ni (x,\vec{t}\,) \mapsto \Phi_{\vec t}^{\vec Z}x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec Z}S$ взаимно однозначным. Пусть μ — конечная борелевская мера на M и для любого монотонно возрастающего набора натуральных чисел $1\le k_1 < k_2 < \ldots < k_s \le m$, $s\in\{1,2,\ldots,m\}$, существует $d_{Z_{k_1}}d_{Z_{k_2}}\ldots d_{Z_{k_s}}\mu$ $\big($на области определения векторных полей из набора $\vec Z\big)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ существует предел, определенный формулой* (10).

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 3. *Пусть $Z_1,\ldots,Z_m$ — попарно коммутирующие полные векторные поля класса $C_b^1(U)$, μ — борелевская мера на M и для любого монотонно возрастающего набора натуральных чисел $1\le k_1<k_2<\ldots<k_s\le m$, $s\in\{1,2,\ldots,m\}$, существует $d_{Z_{k_1}}d_{Z_{k_2}}\ldots d_{Z_{k_m}}\mu$ (в U). Тогда для любой подстановки σ степени m определена мера $\nu_\sigma = d_{Z_{\sigma(1)}}d_{Z_{\sigma(2)}}\ldots d_{Z_{\sigma(m)}}\mu$, не зависящая от подстановки σ.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m=2$ и для двух коммутирующих векторных полей X и Y из существования $d_X\mu$, $d_Y\mu$ и $d_Yd_X\mu$ сделать вывод о существовании $d_Xd_Y\mu$ и равенстве $d_Xd_Y\mu = d_Yd_X\mu$.

Зафиксируем борелевское множество $A\subset U$ и рассмотрим функцию $f(t,s) = \mu(\Phi_t^X\Phi_s^Y A)$. Непрерывность меры μ вдоль векторных полей X и Y приводит к непрерывности функции f по каждой из переменных. При этом непрерывность μ вдоль поля Y означает, что $\|\mu\circ\Phi_s^Y - \mu\| \to 0$, $s\to 0$ (здесь $\|\nu\|$ — вариация меры ν). Поэтому $\sup_t\big|\mu(\Phi_s^Y\Phi_t^X A) - \mu(\Phi_t^X A)\big| \to 0$, $s\to 0$, и функция f непрерывна по s равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$, а значит, и по совокупности аргументов.

Поскольку меры $d_X\mu$, $d_Y\mu$ и $d_Yd_X\mu$ абсолютно непрерывны относительно меры μ, то они также непрерывны вдоль векторных полей X и Y (случай дифференцирования мер вдоль постоянных направлений рассмотрен в [11], в случае векторных полей рассуждение аналогично). Поэтому теми же рассуждениями устанавливается непрерывность по совокупности аргументов функций $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,s) = d_X\mu(\Phi_t^X\Phi_s^Y A)$, $\dfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) = d_Y\mu(\Phi_t^X\Phi_s^Y A)$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t,s) = d_Yd_X\mu(\Phi_t^X\Phi_s^Y A)$.

Теперь из тождества

$$f(t+\Delta t, s+\Delta s) = f(t+\Delta t, s) + \int_0^{\Delta s}\frac{\partial f}{\partial s}(t, s+\beta)\,d\beta + \int_0^{\Delta t} d\alpha\int_0^{\Delta s}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t+\alpha, s+\beta)\,d\beta,$$

меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \int\limits_0^{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t+\alpha, s)\, d\alpha,$$

откуда следует существование $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s}$ и равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s}(t,s) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t,s)$, что и доказывает лемму.

***Доказательство теоремы* 2.** Возьмем $\varepsilon > 0$ и шар $\overline{B_p}$, существование которого гарантировано леммой 2. Пусть $C = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{m}(-\infty, 0]$. Для $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ положим $\widehat{A} = \Phi_C^{\vec{Z}} A$. Для множества $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ определим на $\overline{B_p}$ функцию $f(\vec{t}\,) = f_A(\vec{t}\,)$ формулой $f(\vec{t}\,) := \mu\big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \widehat{A}\,\big)$. Для $\vec{t} \in \overline{B_p}$ и для любой подстановки σ степени m имеет место равенство

$$\frac{\partial^m f}{\partial t_{\sigma(1)} \partial t_{\sigma(2)} \ldots \partial t_{\sigma(m)}}(\vec{t}\,) = (d_{Z_{\sigma(1)}} d_{Z_{\sigma(2)}} \ldots d_{Z_{\sigma(m)}} \mu)\big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \widehat{A}\,\big).$$

В силу леммы 3 указанные производные существуют и непрерывны.

Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}\big(\overline{B_p}\big)$ выполнено равенство

$$w_A(B) = \int\limits_B \frac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_m}\, d\vec{t},$$

откуда в силу непрерывности функции $\dfrac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_m}$ и следует утверждение теоремы $\dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}\,) = \dfrac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_m}(\vec{0}\,)$.

Условимся тройку $(S, \vec{Z}, \mu)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2, называть далее *согласованной*.

Заметим, что векторные поля Z_k, рассмотренные в примере 1, удовлетворяют условиям, наложенным на систему полей в теореме 2.

Заметим, что в определении согласованной тройки $(S, \vec{Z}, \mu)$ окрестность U поверхности S может быть заменена сколь угодно малой окрестностью S вида $g(N \times V_1)$, где $V_1 \subset V$ — окрестность $\vec{0}$ в $\mathbb{R}^m$.

***Замечание* 2.** В процессе доказательства теоремы 2 было доказано, что в случае согласованной тройки $\{S, \vec{X}, \mu\}$ для любого $\varepsilon > 0$ и множества $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ выполнено равенство

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} d_{X_2} \ldots d_{X_m} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{где} \quad \widehat{A} = \Phi_C^{\vec{X}} A, \qquad C = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{m}(-\infty, 0]. \tag{11}$$

Отсюда следует ограниченность вариации меры $\sigma_{\vec{X}}$ на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Определение 5. *Тройку $(S, \vec{Z}, \mu)$, в которой строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей определен при каждом $\varepsilon > 0$ лишь на некоторой окрестности поверхности $S_{-\varepsilon}$ (требование полноты полей отсутствует), но для каждого множества $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ определен предел* (10), *а значит и соответствующая мера $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$, назовем согласованной в широком смысле.*

6. Свойства поверхностных мер первого типа. Далее будем предполагать, что мера μ неотрицательна.

Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности m; $g\colon N\times V\to U\subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложение S; $\vec{Z}=\{Z_1,\ldots,Z_m\}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих полных векторных полей класса C_b^1; тройка $(S,\vec{Z},\mu)$ согласована.

Пусть f — ограниченная борелевская функция на S и $\varepsilon>0$, $\widehat{f}$ — продолжение f первым интегралом каждого векторного поля Z_k. Заметим, что существование такого продолжения при каждом $\varepsilon>0$ на некоторую окрестность $S_{-\varepsilon}$ вида $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$ следует из теоремы 1 $\Big($т. е. $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)\subset\Phi^{\vec{Z}}_{\mathbb{R}^m}S\Big)$.

Лемма 4. *Пусть тройка $(S,\vec{Z},\mu)$ согласована, функция $\widehat{f}$ принадлежит классу C_b^1, $\widehat{f}\mid_S=f$ и для каждого $\varepsilon>0$ функция $\widehat{f}$ является первым интегралом векторных полей Z_k системы $\vec{Z}$ в некоторой окрестности $S_{-\varepsilon}$ вида $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$, $\inf_S f>0$. Тогда тройка $(S,\widehat{f}\vec{Z},\mu)$ согласована в широком смысле и выполнено равенство*

$$\sigma_{\widehat{f}\vec{Z}}[\mu]=f^m\sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \tag{12}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Для любой ограниченной функции h, определенной на $S_{-\varepsilon}$, $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, $B\in\mathcal{B}(W)$, где W — достаточно малая окрестность $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$, корректно определено подмножество

$$\Phi_B^{\widehat{h}\vec{Z}}A:=\Big\{\Phi^{\vec{Z}}_{h(x)\vec{t}}x \;\Big|\; x\in A;\ \vec{t}\in B\Big\}\subset g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1).$$

Если h — кусочно-постоянная борелевская функция на $S_{-\varepsilon}$, то множество $\Phi_B^{\widehat{h}\vec{Z}}A$ является борелевским. Действительно, пусть $h=\sum_{k=0}^{p}c_kj_{A_k}$, где $A_k\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, $S_{-\varepsilon}=\bigvee\limits_{k=0}^{p}A_k$, $c_0=0$. Тогда $\Phi_B^{\widehat{h}\vec{Z}}A=\bigvee\limits_{k=0}^{p}\Phi^{\vec{Z}}_{c_kB}(A\cap A_k)\in\mathcal{B}(M)$.

Как следует из согласованности тройки $(S,\vec{Z},\mu)$, $\mu(S_{-\varepsilon})=0$. Поэтому

$$\mu(\Phi_B^{\widehat{h}\vec{Z}}A)=\sum_{k=0}^{p}\mu\big(\Phi^{\vec{Z}}_{c_kB}(A\cap A_k)\big)=\sum_{k=1}^{p}w_{A\cap A_k}(c_kB),$$

$$\sigma_{\widehat{h}\vec{Z}}(A):=\frac{dw_A^{\widehat{h}\vec{Z}}}{d\lambda_m}(\vec{0}\,):=\sum_{k=1}^{p}\lim_{r\to0}\frac{w_{A\cap A_k}(c_kB_r)}{\lambda_m(B_r)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}c_k^m\lim_{r\to0}\frac{w_{A\cap A_k}(c_kB_r)}{\lambda_m(c_kB_r)}=\sum_{k=1}^{p}c_k^m\sigma_{\vec{Z}}(A\cap A_k)=\int\limits_A h^m\,d\sigma_{\vec{Z}}.$$

Пусть теперь h_j и g_j — две последовательности простых борелевских функций на $S_{-\varepsilon}$, для которых при каждом j выполнены неравенства $0\le h_j\le f\le g_j$, и при этом h_j и g_j на $S_{-\varepsilon}$ равномерно сходятся к $f\,\Big|_{S_{-\varepsilon}}$. Функции h_j и g_j равномерно ограничены, поэтому окрестность W нуля в $\mathbb{R}^m$ можно выбрать единой для всех функций h_j и g_j.

Для $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ и $B_r\in\mathcal{B}(W)$ имеют место вложения $\Phi_{B_r}^{\widehat{h_j}\vec{Z}}(A)\subset\Phi_{B_r}^{\widehat{f}\vec{Z}}(A)\subset\Phi_{B_r}^{\widehat{g_j}\vec{Z}}(A)$.

Зафиксируем $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ и $\delta > 0$. Существуют $j \in \mathbb{N}$, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_A (g_j^m - h_j^m)\, d\sigma_{\vec{Z}} < \delta, \tag{13}$$

и $r_0 > 0$ такое, что при $r \in (0, r_0)$ имеют место неравенства

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{h_j}\vec{Z}} A\Big) - \int\limits_A h_j^m\, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta, \qquad \left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{g_j}\vec{Z}} A\Big) - \int\limits_A g_j^m\, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta. \tag{14}$$

В силу неотрицательности меры μ из неравенств

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{h_j}\vec{Z}} A\Big) \le \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{f}\vec{Z}} A\Big) \le \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{g_j}\vec{Z}} A\Big),$$

а также (13), (14) следует, что при $r \in (0, r_0)$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_A f^m\, d\sigma_{\vec{Z}} - \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi_{B_r}^{\widehat{f}\vec{Z}} A\Big) \right| < 3\,\delta,$$

что в силу произвольности $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ доказывает лемму.

Теорема 3. *Пусть на M задан равномерный атлас Ω, ω — ассоциированная m-форма поверхности S, вложенной в M; тройки $(S, \vec{Y}, \mu)$ и $(S, \vec{Z}, \mu)$ согласованы. Пусть $\big|\omega(\vec{Z})\big|\Big|_S = \big|\omega(\vec{Y})\big|\Big|_S$. Тогда $\sigma_{\vec{Y}} = \sigma_{\vec{Z}}$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in S$ и любого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеет место разложение

$$Z_k(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_k^j(x) Y_j(x) + R_k(x), \qquad \text{где} \quad R_k(x) \in T_x S. \tag{15}$$

Шаг 1. Рассмотрим вспомогательный набор векторных полей

$$X_k = \sum_{j=1}^m \widehat{\alpha_k^j} Y_j \tag{16}$$

$\Big(\widehat{\alpha_k^j}$ постоянны вдоль траекторий векторных полей набора $\vec{Y}$ и совпадают с α_k^j на $S\Big)$.

В силу теоремы 1 функции $\widehat{\alpha_k^j}$, а значит и поля X_k, для каждого $\varepsilon > 0$ корректно определены в некоторой окрестности $S_{-\varepsilon}$ вида $g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$. При этом на S выполнено равенство $\big|\omega(\vec{Y})(x)\big| = \big|\omega(\vec{Z})(x)\big| = \big|\omega(\vec{X})(x)\big|$.

Функции α_k^j принадлежат классу $C_b^1(S)$. Для проверки этого факта рассмотрим ограниченный изоморфизм $g\colon N \times V \to U \subset M$, определяющий вложенную поверхность S, и перейдем от полей Z_k и Y_k к g-связанным с ними полям $\widetilde{Z_k}$ и $\widetilde{Y_k}$ на $N \times V$. Эти поля принадлежат классу $C_b^1(N \times V)$; в каждой точке $(p, \vec{v}) \in N \times V$ имеет место канонический изоморфизм $T_{(p,\vec{v})} \cong T_p N \dotplus \mathbb{R}^m$, определяющий разложение касательного в точке $(p, \vec{v})$ вектора к многообразию $N \times V$ на две составляющие — „горизонтальную" и „вертикальную".

Вертикальные (конечномерные) и горизонтальные составляющие векторных полей $\widetilde{Z_k}$ и $\widetilde{Y_k}$ наследуют гладкость класса $C_b^1(N\times V)$. Из разложения $\widetilde{Z_k}(y)=\sum_{j=1}^m\beta_k^j\widetilde{Y_j}(y)+\widetilde{R_k}(y)$, $y\in N\times\{\vec{0}\}$, в котором вектор $\widetilde{R_k}(y)$ горизонтальный, однозначно находятся функции β_k^j, наследующие гладкость $\beta_k^j\in C_b^1\big(N\times\{\vec{0}\}\big)$. Поскольку $\alpha_k^j(x)=\beta_k^j\big(g^{-1}(x)\big)$, то $\alpha_k^j\in C_b^1(S)$.

Из теоремы о гладкой зависимости решений систем дифференциальных уравнений от начальных условий следует принадлежность функций $\widehat{\alpha_k^j}$ классу C_b^1 $\big($во всяком случае для каждого $\varepsilon>0$ на $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)\big)$. Поэтому векторные поля X_k наследуют гладкость C_b^1, а поскольку функции $\widehat{\alpha_k^j}$ постоянны на траекториях полей Y_k $\big($а значит, на интегральных многообразиях системы полей $\vec{Y}\big)$, то поля X_k также попарно коммутируют.

Шаг 2. Докажем существование меры $\sigma_{\vec{X}}$ на S и равенство $\sigma_{\vec{X}}=\sigma_{\vec{Y}}$.

Для $x\in S_{-\varepsilon},\ B\in\mathcal{B}(W)$ $\big($здесь W — малая окрестность $\vec{0}\in\mathbb{R}^m\big)$ имеет место равенство $\Phi_B^{\vec{X}}x=\Phi_{\alpha_x(B)}^{\vec{Y}}x$, где $\alpha(x)=\alpha_x\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ — линейное преобразование с матрицей $\big(\alpha_k^j(x)\big)$. В силу исходного условия $|\det\alpha_x|=1$ для всех $x\in S_{-\varepsilon}$.

Заменим функции α_k^j простыми борелевскими функциями на $S_{-\varepsilon}$. Тогда $S_{-\varepsilon}=\bigvee\limits_{k=1}^{p}A_k$ и на каждом A_k модифицированная матричнозначная функция h_x предполагается не зависящей от x.

Положим $X_{h,k}:=\sum_{j=1}^p\widehat{h_k^j}Y_j,\ \vec{X}_h:=\{X_{h,1},\ldots,X_{h,m}\}$ $\Big($векторные поля $X_{h,k}$ разрывны, однако осмысленно $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}_h}\Big)$. Тогда для каждого $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon}),\ B\in\mathcal{B}(W)$ получим

$$w_A^{\vec{X}_h}(B)=\mu(\Phi_B^{\vec{X}_h}A)=\sum_{k=1}^p\mu\big(\Phi_{h_x(B)}^{\vec{Y}}(A\cap A_k)\big)=\sum_{k=1}^p w_{A\cap A_k}^{\vec{Y}}\big(h_x(B)\big),$$

$$\sigma_{\vec{X}_h}(A):=\frac{dw_A^{\vec{X}_h}}{d\lambda_m}(\vec{0}\,)=\sum_{k=1}^p\sigma_{\vec{Y}}(A\cap A_k)|\det h_x|.$$

При этом

$$\min_A|\det h_x|\sigma_{\vec{Y}}(A)\le\sigma_{\vec{X}_h}(A)\le\max_A|\det h_x|\sigma_{\vec{Y}}(A). \tag{17}$$

Для каждой функции α_k^j строим две последовательности простых борелевских функций $(h_n)_k^j$ и $(g_n)_k^j$ на $S_{-\varepsilon}$ таким образом, что при всех $k,\ j$ обе последовательности равномерно сходятся к функции α_k^j на $S_{-\varepsilon}$ и при этом для каждого $x\in S_{-\varepsilon}$ имеют место вложения $h_n(x)(B_r)\subset\alpha(x)(B_r)\subset g_n(x)(B_r)$. Тогда для каждого $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ имеют место вложения $\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{h_n}}A\subset\Phi_{B_r}^{\vec{X}}A\subset\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{g_n}}A$ и в силу неотрицательности меры μ неравенства

$$\mu\Big(\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{h_n}}A\Big)\le\mu\Big(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}A\Big)\le\mu\Big(\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{g_n}}A\Big). \tag{18}$$

При этом последовательности функций $\big|\det h_n(\cdot)\big|$ и $\big|\det g_n(\cdot)\big|$ равномерно сходятся на $S_{-\varepsilon}$ к $\big|\det\alpha(\cdot)\big|\equiv 1$.

Обоснуем существование указанных последовательностей. Поскольку функции $\alpha_k^j\in C_b^1(S)$, то $\alpha(S_{-\varepsilon})$ — ограниченное множество в пространстве $M(m,\mathbb{R})$. Возьмем $n\in\mathbb{N}$ и $x\in S_{-\varepsilon}$.

Положим $h_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\alpha(x)$, $g_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\alpha(x)$. Тогда $h_n(x)(B_r) \subset \alpha(x)(B_r) \subset \subset g_n(x)(B_r)$.

Матрица $\alpha(x)$ невырождена, поэтому в $M(m, \mathbb{R})$ существует окрестность U_x точки $\alpha(x)$, для которой $h_n(x)(B_r) \subset \gamma(B_r) \subset g_n(x)(B_r)$ при всех $\gamma \in U_x$. Данная процедура применима к каждой точке $x \in S_{-\varepsilon}$. Максимальный радиус $r(x)$ шаровой окрестности U_x непрерывно зависит от матрицы $\alpha(x) \in \big\{\gamma \mid |\det\gamma| = 1\big\}$, а поскольку $\overline{\alpha(S_{-\varepsilon})}$ — компакт, то $\inf_{x\in S_{-\varepsilon}} r(x) > 0$.

Пусть $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_p}\}$ — конечное покрытие $\alpha(S_{-\varepsilon})$ окрестностями указанного вида. В силу непрерывности отображения $\alpha(\cdot)$ поверхность $S_{-\varepsilon}$ разобьется в дизъюнктное объединение борелевских подмножеств: $S_{-\varepsilon} = \bigvee\limits_{k=1}^{p} A_k$, где $A_1 = \alpha^{-1}(U_{x_1})$, $A_k = \alpha^{-1}\Big(U_{x_k} \setminus \bigcup\limits_{j<k} U_{x_j}\Big)$, $k > 1$. Полагаем $h_n\big|_{A_k} = h_n(x_k)$, $g_n\big|_{A_k} = g_n(x_k)$.

Зафиксируем $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ и пусть последовательности h_n и g_n выбраны таким образом, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in S_{-\varepsilon}$ выполнены включения

$$\big|\det h_n(x)\big| \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \big|\det g_n(x)\big| \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right). \tag{19}$$

Тогда из неравенств (17)–(19) делаем вывод: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $r_0 > 0$, что при всех $r \in (0, r_0)$ выполнены неравенства

$$-\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_{\vec{Y}}(A) \le \frac{\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}} A)}{\lambda_m(B_r)} \le \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_{\vec{Y}}(A),$$

откуда следует существование меры $\sigma_{\vec{X}}$ на S и совпадение: $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}$.

Шаг 3. Докажем равенство мер $\sigma_{\vec{Z}}$ и $\sigma_{\vec{X}}$ на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Для этого достаточно доказать равенство

$$\int\limits_S f\, d\sigma_{\vec{Z}} = \int\limits_S f\, d\sigma_{\vec{X}} \tag{20}$$

для ограниченных равномерно непрерывных на S функций.

Прежде всего заметим, что при $\varepsilon > 0$ для простой борелевской функции f на S выполнено равенство

$$\int\limits_{S_{-\varepsilon}} f\, d\sigma_{\vec{Z}} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \widehat{f}\, d\mu. \tag{21}$$

Если f — ограниченная борелевская функция на S, то для каждого $\delta > 0$ существует простая борелевская функция g на S, для которой $\sup_{S_{-\varepsilon}} |f - g| \le \delta$. Поэтому $\sup_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \big|\widehat{f} - \widehat{g}\big| \le \delta$,

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \widehat{f}\, d\mu - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} f\, d\sigma_{\vec{Z}} \right| \le$$

$$\leq \left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi^{\vec Z}_{B_r} S_{-\varepsilon}} \widehat{g}\, d\mu - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} g\, d\sigma_{\vec Z} \right| + \delta \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu\Big(\Phi^{\vec Z}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big) + \delta \sigma_{\vec Z}(S_{-\varepsilon}),$$

откуда и следует равенство (21) для ограниченной борелевской функции f.

Если теперь h — равномерно непрерывная ограниченная функция в окрестности $S_{-\varepsilon}$, то $\sup_{\Phi^{\vec Z}_{B_r} S_{-\varepsilon}} \big|h - \widehat{h\,|_{S_{-\varepsilon}}}\big| \to 0$ при $r \to 0+$, поэтому из (21) получим равенство

$$\int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\,|_{S_{-\varepsilon}}\, d\sigma_{\vec Z} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi^{\vec Z}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu. \tag{22}$$

Заметим, что для равномерно непрерывной функции f на S соответствующая функция $\widehat{f}$ также равномерно непрерывна, а поскольку для набора векторных полей $\vec X$ имеют место аналоги формул (21) и (22), то для проверки равенства (20) достаточно для функции h, равномерно непрерывной и ограниченной в окрестности $\widetilde{U}$ поверхности S $\Big($точнее, в $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} g\big(N_{-\varepsilon/2} \times W_1(\varepsilon)\big)\Big)$, доказать равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \left(\int\limits_{\Phi^{\vec Z}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu - \int\limits_{\Phi^{\vec X}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec Z} - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec X} \right) = 0. \tag{23}$$

Лемма 5. *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждой точки $x \in S_{-\varepsilon}$ существует карта $(\widetilde{U}, \varphi)$ исходного атласа Ω, для которой $\varphi(\widetilde{U})$ содержит шар $W = \Big\{z \in \in E \mid \big\|\varphi(x) - z\big\| < \delta\Big\}$, и $\varphi^{-1}(W) \subset g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если карта $(\widetilde{U}, \varphi)$ такова, что $\varphi(\widetilde{U})$ содержит шар с центром в точке $\varphi(x)$, $y \in M$, $\varphi(y)$ лежит в упомянутом шаре и C — постоянная из определения ограниченного атласа (см. п. 1), то выполняются неравенства

$$\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\| \leq \rho(x, y) \leq C\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|. \tag{24}$$

Действительно, если кривая Γ на M есть прообраз отрезка $\big[\varphi(x), \varphi(y)\big] \subset E$ и разбита на участки точками $x_j : x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$, то длина кривой $\big($а значит, и $\rho(x, y)\big)$ не превышает $\sum_{j=1}^{k} C\big\|\varphi(x_{j-1}) - \varphi(x_j)\big\| = C\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|$.

С другой стороны, длина образа в карте φ любой кривой Γ, соединяющей точки $x, y \in M$ (или ее участка из области определения карты φ), не меньше, чем $\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|$. Отсюда следует неравенство $\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\| \leq \rho(x, y)$.

Возьмем $\beta > 0$ из неравенства (9). Если теперь $r > 0$ взято из определения равномерного атласа, то, как следует из неравенств (24), в качестве δ можно взять $\min\left(r, \dfrac{\beta}{C}\right)$.

Лемма 5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3.

Из (15), (16) следует равенство

$$X_k(x) = Z_k(x) + Q_k(x),$$

в котором поле Q_k касается поверхности S; при каждом $\varepsilon > 0$ все три поля определены и принадлежат классу C_b^1 в окрестности $S_{-\varepsilon}$ вида $g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$.

Пусть $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{t} \neq \vec{0}$. Рассмотрим векторные поля

$$X = \frac{1}{\|\vec{t}\|} \sum_{k=1}^{m} t_k X_k, \qquad Z = \frac{1}{\|\vec{t}\|} \sum\nolimits_{k=1}^{m} t_k Z_k \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{1}{\|\vec{t}\|} \sum\nolimits_{k=1}^{m} t_k Q_k.$$

Тогда $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}} x = \Phi_{\|\vec{t}\|}^{X} x$, $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x = \Phi_{\|\vec{t}\|}^{Z} x$.

Существует число L, которое ограничивает сверху нормы $\|X_\varphi(\cdot)\|$, $\|Z_\varphi(\cdot)\|$, $\|X'_\varphi(\cdot)\|$, $\|Z'_\varphi(\cdot)\|$ во всех картах исходного атласа и при всех $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ $\left(\vec{t} \neq \vec{0}\right)$. Тогда в силу леммы 1 из работы [12] существуют числа $K_1 > 0$ и $\eta > 0$ такие, что для любой карты исходного атласа при $|s| < \eta$ выполнено неравенство

$$\left\| \Phi_s^{X_\varphi}\big(\varphi(x)\big) - \Phi_s^{Z_\varphi} \Phi_s^{X_\varphi - Z_\varphi}\big(\varphi(x)\big) \right\| \leq K_1 s^2$$

(если, конечно, левая часть неравенства имеет смысл).

Если теперь $x \in S_{-\varepsilon}$, то поскольку поле Q касательно к S, уменьшением η получим $\Phi_s^Q x \in S_{-\varepsilon/2}$.

Уменьшая, если необходимо, $\eta > 0$, в силу леммы 5 добиваемся также возможности для каждой точки $x \in S_{-\varepsilon}$ и $|s| < \eta$ поместить $\Phi_s^X x$ и $\Phi_s^Z \Phi_s^Q x$ в область определения одной карты φ $\big($образ которой содержит шар с центром в точке $\varphi(x)\big)$, что позволяет воспользоваться неравенством (24). В результате получаем неравенство

$$\rho\Big(\Phi_s^X x,\, \Phi_s^Z \Phi_s^Q x\Big) \leq C K_1 s^2,$$

откуда при $r \in (0, \eta)$ следует вложение

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset \Big(\Phi_{B_r}^{\vec{Z}}(S_{-\varepsilon/2})\Big)_{K_2 r^2}, \tag{25}$$

где $K_2 = C K_1$.

В силу свойства равномерной липшицевости диффеоморфизмов $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}$ (лемма 1 из работы [6]) существует постоянная $L > 1$ такая, что при $\|\vec{t}\,\| < r$ для $x, y \in U$ имеет место неравенство $\rho\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x, \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} y\Big) \leq L\rho(x, y)$ (если левая часть неравенства имеет смысл). Поэтому $\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}\Big)_{K_2 \|\vec{t}\,\|^2} \subset \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}\Big((S_{-\varepsilon})_{K\|\vec{t}\,\|^2}\Big)$ при $K = K_2 L$, и из (25) следует вложение $\Phi_{B_r}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset \subset \Phi_{B_r}^{\vec{Z}}\Big((S_{-\varepsilon/2})_{Kr^2}\Big)$.

При достаточно малых $\gamma > 0$ имеет место вложение

$$(S_{-\varepsilon/2})_\gamma \subset \Phi_{B_{C_1\gamma}}^{\vec{Z}}(S_{-\varepsilon/4}) \tag{26}$$

(данный факт является следствием теоремы 1 (п. 2) и детализации доказательства шага 2 указанной теоремы, согласно которой делается вывод о том, что r и $\xi(r)$ — бесконечно малые одинакового порядка при $r \to 0$).

Теперь очевидное равенство $\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r_1+r_2}} = \Phi^{\vec{Z}}_{B_{r_1}} \circ \Phi^{\vec{Z}}_{B_{r_2}}$ позволяет из (25) и (26) получить вложение

$$\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \subset \Phi^{\vec{Z}}_{B_{r+M_1 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}), \tag{27}$$

где $M_1 = KC_1$.

Аналогично получаем вложение

$$\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \subset \Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}). \tag{28}$$

Из (27), (28) имеем

$$\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \triangle \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \subset \Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r+M_1 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}) \setminus \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big) \cup \Big(\Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}) \setminus \Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big). \tag{29}$$

Перейдем к доказательству равенства (23). Возьмем $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta = \delta(\varepsilon) = \max\big\{\sigma_{\vec{X}}(S \setminus S_{-\varepsilon}); \sigma_{\vec{Z}}(S \setminus S_{-\varepsilon})\big\}$. Существует $r_0 = r_0(\varepsilon)$ такое, что $\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r_0}} S_{-\varepsilon} \subset g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$, $\Phi^{\vec{X}}_{B_{r_0}} S_{-\varepsilon} \subset$ $\subset g(N_{-\varepsilon/2} \times W_1)$.

При $r \in (0, r_0)$ имеем оценку

$$\left| \int\limits_{\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu - \int\limits_{\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu \right| \le \sup_{\widetilde{U}} |h| \mu\Big(\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \triangle \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big). \tag{30}$$

Поскольку

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \Big[\mu\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r+M_1 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}) \setminus \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big) + \mu\Big(\Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}}(S_{-\varepsilon/4}) \setminus \Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\Big)\Big] =$$
$$= \sigma_{\vec{Z}}(S_{-\varepsilon/4} \setminus S_{-\varepsilon}) + \sigma_{\vec{X}}(S_{-\varepsilon/4} \setminus S_{-\varepsilon}) < 2\delta, \tag{31}$$

то из (29)–(31) следует существование такого $r_1 = r_1(\delta) > 0$, что при $r \in (0, r_1)$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \left(\int\limits_{\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu - \int\limits_{\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu \right) \right| \le \sup_{\widetilde{U}} |h| 3\delta.$$

При предельном переходе $r \to 0+$ получаем неравенство

$$\left| \int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec{Z}} - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec{X}} \right| \le \sup_{\widetilde{U}} |h| 3\delta(\varepsilon),$$

откуда и следует (23).

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 3.** Теорема 3 остается справедливой и в том случае, когда тройки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ и $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ согласованы в широком смысле, и при этом меры $\sigma_{\vec{Y}}$ и $\sigma_{\vec{Z}}$ конечны на S.

7. Поверхностные меры второго типа. Пусть многообразие M наделено равномерной структурой, ω — ассоциированная форма поверхности S, тройки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ и $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ согласованы. Тогда меры $\dfrac{1}{|\omega(\vec{Y})|\big|_S}\sigma_{\vec{Y}}$ и $\dfrac{1}{|\omega(\vec{Z})|\big|_S}\sigma_{\vec{Z}}$ совпадают на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Действительно, полагая для удобства $|\omega(\vec{Y})|\big|_S = f$, $|\omega(\vec{Z})|\big|_S = g$, в силу леммы 4 получаем

$$\sigma_{\vec{Y}} = f\sigma_{\widehat{f}^{-1/m}\vec{Y}}, \qquad \sigma_{\vec{Z}} = g\sigma_{\widehat{g}^{-1/m}\vec{Z}}.$$

А поскольку $|\omega\big(\widehat{f}^{-1/m}\vec{Y}\,\big)|\big|_S = f^{-1}|\omega\big(\vec{Y}\,\big)|\big|_S = 1 = g^{-1}|\omega\big(\vec{Z}\,\big)|\big|_S = |\omega\big(\widehat{g}^{-1/m}\vec{Z}\,\big)|\big|_S$, то совпадение указанных мер следует из теоремы 3 и замечания 3.

Тем самым доказана корректность следующего определения.

Определение 6. *Поверхностной мерой второго типа на S, индуцированной мерой μ и ассоциированной формой ω, назовем меру $\mu_\omega = \dfrac{1}{|\omega(\vec{Z}\,)|\big|_S}\sigma_{\vec{Z}}$, где $\vec{Z}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей класса $C_b^1(M)$, для которого тройка $(S, \vec{Z}, \mu)$ согласована.*

***Замечание* 4.** Вопрос описания класса поверхностей $S \subset M$, для которых для заданной борелевской меры μ на M существует согласованная тройка $\big(S, \vec{X}, \mu\big)$, остается открытым даже в случае банахова пространства M. Тем не менее достаточно просто решается двойственная задача. Если S — вложенная в M поверхность конечной коразмерности m; $\vec{X}$ — строго трансверсальное к S семейство попарно коммутирующих векторных полей класса $C_b^1(U)$, удовлетворяющее условиям теоремы 2; μ — борелевская мера на M и $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, то согласованной является тройка $\big(S, \vec{X}, \mu_h\big)$, где мера μ_h на U определена формулой

$$\mu_h(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} h(\vec{t}\,)\,\mu\Big(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}(A)\Big)\,d\vec{t}.$$

Литература

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 231 с.
2. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 11. – С. 139 – 157.
3. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
4. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. carol. Math. et phys. – 1990. – **31**, № 2. – P. 9 – 23.
5. *Пугачев О. В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – **53**, № 1. – С. 178 – 188.
6. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
7. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
8. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
9. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
10. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Вища шк., 1989. – 295 с.
11. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика, 2008. – 544 с.
12. *Богданський Ю. В.* Бездивергентний варіант формули Гаусса – Остроградського на нескінченновимірних многовидах // Наук. вісті КПІ. – 2008. – № 4. – С. 132 – 138.

Получено 04.02.17