УДК 517.9 + 531.19

О. Л. Ребенко, М. В. Тертичний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВЛАСТИВІСТЬ ПЕРЕМІШУВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ КЛАСИЧНИХ СИСТЕМ З ПОСИЛЕНО НАДСТІЙКОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

We consider an infinite system of point particles in $\mathbb{R}^d$, interacting via a strong superstable two-body potential ϕ of finite range with radius R. In the language of correlation functions, we obtain a simple proof of decrease in correlations between two clusters (two groups of variables) the distance between which is larger than the radius of interaction. The established result is true for sufficiently small values of activity of the particles.

Рассматривается бесконечная система точечных частиц в $\mathbb{R}^d$, взаимодействие которых определяется усиленно сверхустойчивым двухчастичным потенциалом ϕ конечного радиуса действия R. На языке корреляционных функций приведено простое доказательство оценки убывания корреляций между двумя кластерами (двумя группами переменных), расстояние между которыми больше радиуса взаимодействия. Результат справедлив для достаточно малых значений активности частиц.

1. Вступ. Властивість перемішування відіграє ключову роль у дослідженні динамічних систем, оскільки забезпечує їх ергодичність і дозволяє стверджувати, що в системі з перемішуванням будь-який нерівноважний розподіл буде прямувати до рівноважного (див., наприклад, [1]). Різні аспекти властивості перемішування широко висвітлені у статтях і оглядах і, мабуть, їх неможливо перерахувати (див., наприклад, огляди [2, 3]). Строге доведення цієї властивості для моделей статистичної механіки охоплює лише ґратчасті системи (спінові системи феромагнетиків і ґратчасті гази).

На мові розподілів Гіббса властивість перемішування означає, що поведінка системи в деяких об'ємах, які знаходяться на великих відстанях один від одного, є статистично незалежною (див., наприклад, [4] або зауваження 2.7 у роботі [5]). Найбільш зручно з технічної точки зору довести цю властивість, оцінивши кореляції між кластерами частинок, тобто поведінку кореляційних функцій, в яких одна група змінних знаходиться на значній відстані від іншої групи. Такі дослідження розпочато ще з робіт [6 – 8] для спінових систем. У роботі [7] обговорювалась також поведінка неперервних систем, було наведено деякі оціночні нерівності без строгого їх доведення.

У цій статті ми встановлюємо властивість швидкого зменшення кореляцій для класичних неперервних систем при малих значеннях активності (або великих від'ємних значеннях хімічного потенціалу). Ми використовуємо метод, який було запропоновано в роботі [9] для системи ґратчастого газу, і апроксимацію неперервної системи класичного газу неперервною системою *коміркового газу* [10]. Комірковий газ — це неперервна система точкових взаємодіючих частинок, конфігураційний простір якої побудовано таким чином, що для довільного розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні неперетинні гіперкубики з ребром a у кожному кубику може знаходитись не більше однієї частинки в кожному з кубиків розбиття. Технічно це досягається введенням гіббсової міри, яка забезпечує зникнення конфігурацій, в яких знаходиться більше однієї частинки хоча б в одному з кубиків розбиття. Таку апроксимацію було запропоновано в роботах [11 – 13] для систем точкових частинок, що взаємодіють за допомогою посилено надстійкого потенціалу [14].

2. Основні математичні поняття і величини. ***2.1. Простори конфігурацій систем статистичної механіки.*** Позначимо через $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ борелівську σ-алгебру відкритих множин у $\mathbb{R}^d$, а через $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$ всі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \;\middle|\; |\gamma \cap \Lambda| < \infty \;\text{ для всіх }\; \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\},$$

де $|A|$ — число, що означає кількість точок в A. Позначимо множину всіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0. Насправді Γ_0 є підмножиною Γ, але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію (див., наприклад, [15]). Визначимо спочатку конфігураційний простір із фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n,\; n \in \mathbb{N}\}, \quad \Gamma^{(0)} := \varnothing.$$

Якщо всі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}.$$

Тоді простори скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна записати у вигляді диз’юнктивних об’єднань:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)} \qquad \text{і} \qquad \Gamma_\Lambda := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}.$$

Топологічні і вимірні структури просторів Γ, Γ_0 і Γ_Λ є добре вивченими (див., наприклад, [15 – 18]).

У дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкубики з довжиною ребер $a > 0$, центри яких розташовані в точках $r \in a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid (r^i - a/2) \le x^i < (r^i + a/2), \;\; i = 1, \ldots, d \right\}.$$

Будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо немає потреби вказувати, де знаходиться центр гіперкубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$. Не втрачаючи загальності розгляду, будемо для зручності розглядати Λ, які є об’єднаннями скінченної кількості гіперкубиків $\Delta \in \overline{\Delta}_a$.

Для побудови вищезгаданої апроксимації введемо ще один простір — *простір конфігурацій коміркового газу:*

$$\Gamma^{(a)} := \left\{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| \le 1 \;\text{ для всіх }\; \Delta \in \overline{\Delta}_a \right\}.$$

Щоб не складалося враження, що конфігурації $\Gamma^{(a)}$ описують фізичні системи розріджених газів, наведемо наступне зауваження.

***Зауваження* 2.1.** Однією з найважливіших характеристик фізичного стану системи взаємодіючих частинок є густина, тобто кількість частинок в одиниці об'єму. Як завгодно велике значення цієї характеристики можна отримати і в рамках опису системи у просторі конфігурацій $\Gamma^{(a)}$, вибираючи розмір a ребер гіперкубиків достатньо малим.

2.2. Взаємодія. У роботі розглядається система точкових частинок, взаємодію яких будемо описувати за допомогою двочастинкового потенціалу ϕ. Енергія довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ або $\gamma \in \Gamma_0$ визначається таким чином:

$$U_\phi(\gamma) = U(\gamma) := \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \phi(|x-y|),$$

де підсумовування проводиться по всіх можливих різних парах точок конфігурації γ. Визначимо також енергію взаємодії між конфігураціями $\eta,\ \gamma \in \Gamma_0\ (\eta\cap\gamma=\varnothing)$ формулою

$$W(\eta;\gamma) := \sum_{\substack{x\in\eta\\ y\in\gamma}} \phi(|x-y|).$$

(A) Припущення щодо потенціалу взаємодії. В цій роботі ми розглядаємо двочастинкові потенціали загального вигляду ϕ, неперервні на $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ і такі, що існують сталі $r_0>0$, $B\geq 0,\ R>0$ та $\varphi_0>0$, для яких

$$\phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s} \qquad \text{для} \quad |x|\leq r_0, \quad s\geq d, \tag{2.1}$$

$$\phi(|x|)\equiv 0 \qquad \text{для} \quad |x|\geq R, \tag{2.2}$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0,\phi(|x|)\}, \qquad \phi^-(|x|) := -\min\{0,\phi(|x|)\}.$$

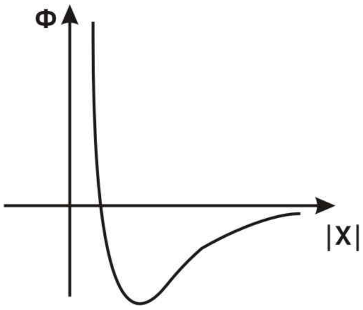
Такі потенціали є посилено надстійкими (детальніше див. [14]). Це забезпечує можливість апроксимувати систему, що розглядається, системою коміркового газу [10]. Як наслідок ми будемо також використовувати той факт, що енергія взаємодії частинок конфігурації γ задовольняє умову стійкості

$$U(\gamma) \ = \sum_{x,y\in\gamma}\phi(|x-y|) \ \geq \ -B|\gamma|, \qquad \gamma\in\Gamma_0, \quad B\geq 0. \tag{2.3}$$

У молекулярній фізиці має безпосереднє застосування потенціал Ленарда – Джонса

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{12}} - \frac{D}{|x|^6},$$

де $C>0,\ D>0$ — деякі сталі. Ми будемо розглядати потенціали такого ж типу, поведінку яких зображено на рисунку, але при $|x|\to R$ зліва потенціал $\phi(|x|)\to 0$.



2.3. Міри на просторах конфігурацій неперервних систем. Згідно з ідеями Гіббса, фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спочатку в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі, і при подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд із системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

Нехай σ — міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою *Пуассона* $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ, де $z > 0$ — активність (фізичний параметр, що пов'язаний із густиною частинок у системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спочатку введемо аналог такої міри на просторах скінченних конфігурацій в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (див. [19]), яку інколи називають мірою *Лебега–Пуассона*, за формулою

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int\limits_{\Lambda}\ldots\int\limits_{\Lambda} F(\{x_1,\ldots,x_n\})\sigma(dx_1)\ldots\sigma(dx_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int\limits_{\Lambda}\ldots\int\limits_{\Lambda} F_n(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \tag{2.4}$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n\geq 0},\ F_n \in L^\infty(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi_{z\sigma}^{\Lambda} := e^{-z\sigma(\Lambda)}\lambda_{z\sigma}^{\Lambda}, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \tag{2.5}$$

Легко переконатись, використовуючи визначення (2.4), що сім'я (2.5) є попарно узгодженою і за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [20]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ.

Міра Гіббса для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій Γ_Λ визначається формулою

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda}e^{-\beta U(\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma),$$

$$Z_\Lambda = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma),$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега – Пуассона (2.4). У випадку нескінченної системи в $\mathbb{R}^d$ у підході Добрушина – Ленфорда – Рюеля (див. [4, 21]) міра Гіббса μ визначається на Γ за допомогою сім'ї умовних імовірнісних розподілів, щільність яких визначається похідною Радона – Нікодима

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}}(\eta \mid \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \frac{\exp\{-\beta U(\eta \mid \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c})},$$

де

$$U(\eta \mid \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) := U(\eta) + W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c}),$$

а

$$\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \qquad \Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda, \qquad \eta \in \Gamma_\Lambda, \quad \bar{\gamma} \in \Gamma.$$

Існування та єдиність міри Гіббса μ для взаємодій і умов, що розглядаються, є відомим результатом (див., наприклад, огляди [5, 22]), а умову перемішування можна записати у вигляді

$$\mu(F_1 F_2) \ - \ \mu(F_1)\mu(F_2) \ \to \ 0$$

для двох обмежених функцій $F_1, F_2 : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$, для яких $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2) \to \infty$.

2.4. Кореляційні функції і рівняння Кірквуда – Зальцбурга. Кореляційні функції є в певному сенсі моментами міри Гіббса, за якими розраховують середні значення спостережуваних величин, а статистична сума відіграє важливу роль у побудові термодинамічних функцій вільної енергії та тиску системи (див., наприклад, [23 – 25]).

Запишемо вирази для статистичної суми Z_Λ та відповідного набору кореляційних функцій ρ_Λ за допомогою інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$. Тоді у випадку великого канонічного ансамблю

$$Z_\Lambda(z, \beta) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma),$$

$$\rho_\Lambda(\eta; z, \beta) := \frac{1}{Z_\Lambda(z, \beta)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad \eta \in \Gamma_\Lambda.$$

Для малих значень активності z існує єдина термодинамічна границя ρ_Λ при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ [23]. Граничні функції $\rho(\eta; z, \beta)$ є розв'язками нескінченної системи рівнянь Кірквуда – Зальцбурга у банаховому прсторі E_ξ (див., наприклад, [23 – 25]) з нормою

$$\|\varphi\|_\xi := \sup_{\eta \in \Gamma_0 \setminus \varnothing} |\varphi(\eta)| \xi^{-|\eta|}, \quad \varphi \in E_\xi.$$

Система рівнянь Кірквуда – Зальцбурга може бути записана у вигляді єдиного операторного рівняння (див. [23])

$$\rho = z\widetilde{K}\rho + z\delta, \tag{2.6}$$

де оператор $\widetilde{K}$ діє на довільну функцію $\varphi \in E_\xi$ у відповідності з правилом

$$(\widetilde{K}\varphi)(\{x\}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{k} \left(e^{-\beta\phi(|x-y_i|)} - 1\right) \varphi(\{y_1, \ldots, y_k\})\, dy_1 \ldots dy_k :=$$

$$:= \int\limits_{\Gamma_0} K(x;\gamma)\varphi(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma), \quad \text{якщо} \quad \eta = \{x\}, \quad K(x;\varnothing) = \varphi(\varnothing) = 1,$$

$$(\widetilde{K}\varphi)(\eta) = \sum_{x\in\eta} \widetilde{\pi}(x;\eta\setminus\{x\}) e^{-\beta W(x;\eta\setminus\{x\})} \Bigg[\varphi(\eta\setminus\{x\}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{k} \left(e^{-\beta\phi(|x-y_i|)} - 1\right) \varphi(\eta\setminus\{x\} \cup \{y_1, \ldots, y_k\}) dy_1 \ldots dy_k \Bigg] =$$

$$= \sum_{x\in\eta} \widetilde{\pi}(x;\eta\setminus\{x\}) e^{-\beta W(x;\eta\setminus\{x\})} \int\limits_{\Gamma_0} K(x;\gamma)\varphi(\eta\setminus\{x\}\cup\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma), \quad \text{якщо} \quad |\eta| \geq 2,$$

де

$$\widetilde{\pi}(x;\eta\setminus\{x\}) = \frac{\pi_W(x;\eta\setminus\{x\})}{\sum_{y\in\eta} \pi_W(y;\eta\setminus\{y\})}, \tag{2.7}$$

$$\pi_W(x;\eta\setminus\{x\}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad W(x;\eta\setminus\{x\}) \geq -2B, \\ 0 & \text{— у решті випадків,} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\rho := \{\rho(\eta; z, \beta)\}_{\eta\in\Gamma_0\setminus\varnothing}, \quad \rho(\varnothing; z, \beta) = 1, \tag{2.9}$$

$$\delta(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\eta| = 1, \\ 0 & \text{— у решті випадків.} \end{cases} \tag{2.10}$$

***Зауваження* 2.2.** Оператор $\widetilde{K} = \Pi K$ у позначеннях Д. Рюеля [23], а (2.7), (2.8) є реалізацією оператора Π:

$$(\Pi\varphi)(\eta) := \sum_{x\in\eta} \widetilde{\pi}(x;\eta\setminus\{x\})\varphi(x, \eta\setminus\{x\}).$$

При цьому оператор $K : E_\xi \to E_{e^{2\beta B}\xi}$, а оператор $\widetilde{K} : E_\xi \to E_\xi$ (детальніше див. [23]).

Оператор $\widetilde{K}$ є обмеженим оператором у банаховому просторі E_ξ.

Розв'язок рівняння (2.6) можна подати у формі збіжних у просторі E_ξ (та точково збіжних для будь-якої фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_0$) рядів

$$\rho(\eta; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \big(\widetilde{K}^n \delta\big)(\eta; z, \beta),$$

якщо взаємодія задовольняє умови **(A)**, а значення активності z належить кругу:

$$|z| \leq e^{-2\beta B} \xi e^{-\xi C(\beta)}. \tag{2.11}$$

Оптимальним значенням параметра ξ є $\xi = C(\beta)^{-1}$, де

$$C(\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| e^{-\beta\phi(|x|)} - 1 \Big| \, dx.$$

2.5. Основний результат роботи.

Теорема 2.1. *Нехай потенціал* $\phi(|x|)$ *є неперервним на* $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *і задовольняє умови* (2.1)–(2.3). *Тоді для довільних конфігурацій* $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$, $\eta \cap \eta_1 = \varnothing$, *відстань між якими* $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) := \min_{\substack{x \in \eta \\ y \in \eta_1}} |x - y| > R$, *і достатньо малого значення активності* z *справджується нерівність*

$$\big|\rho(\eta \cup \eta_1) - \rho(\eta)\rho(\eta_1)\big| \leq C m_{\xi_0}^{\frac{\operatorname{dist}(\eta, \eta_1)}{R}} \xi_0^{|\eta| + |\eta_1|}, \tag{2.12}$$

де $m_{\xi_0} < 1$, $C > 0$, $\xi_0 = \xi_0(\beta, z) > 0$ *не залежать від* η, η_1.

3. Доведення теореми 2.1. ***3.1. Кореляційні функції моделі коміркового газу.*** Як ми зазначили вище, в роботах [11–13] було встановлено, що для взаємодій, які ми розглядаємо, кореляційні функції моделі коміркового газу поточково збігаються до кореляційних функцій $\rho(\eta; z, \beta)$, якщо параметр розбиття $a \to 0$. Це означає, що для доведення теореми 2.1 достатньо довести нерівність (2.12) для кореляційних функцій моделі коміркового газу зі сталими $m_{\xi_0} < 1$, $C > 0$, $\xi_0 = \xi_0(\beta, z) > 0$, які на залежать від параметра розбиття a.

Щоб визначити кореляційні функції моделі коміркового газу, введемо таку функцію на просторі Γ_0:

$$\chi_{-}^{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma \text{ з } |\gamma_\Delta| \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді статистична сума і кореляційні функції моделі коміркового газу визначаються формулами

$$Z_\Lambda^{(a)}(z, \beta) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \prod_{\Delta \in \overline{\Delta_a} \cap \Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda^{(a)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}^{a}(d\gamma),$$

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\eta; z, \beta) := \frac{1}{Z_\Lambda^{(a)}(z, \beta)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^{a}(\eta \cup d\gamma),$$

де

$$\lambda_{z\sigma}^{a}(\eta \cup d\gamma) := \prod_{\Delta \in \overline{\Delta_a} \cap \Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma).$$

Визначимо також сім'ю *умовних* кореляційних функцій $\rho_\Lambda^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$:

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda^{(a)}(\eta_1; z, \beta)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma | \eta_1)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup \eta_1 \cup d\gamma), \tag{3.1}$$

де

$$U(\gamma \mid \eta) = U(\gamma) + W(\gamma; \eta),$$

а відповідна статистична сума має вигляд

$$Z_\Lambda^{(a)}(\eta_1; z, \beta) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda^{(a)}} e^{-\beta U(\gamma|\eta_1)} \lambda_{z\sigma}(\eta_1 \cup d\gamma) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma|\eta_1)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta_1 \cup d\gamma).$$

3.2. Рівняння Кірквуда – Зальцбурга для кореляційних функцій коміркового газу. Основним технічним засобом доведення нерівності (2.12) будуть рівняння Кірквуда – Зальцбурга для кореляційних функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$. В роботі [12] рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ були використані для доведення граничного переходу

$$\lim_{a \to 0} \rho^{(a)}(\eta; z, \beta) = \rho(\eta; z, \beta).$$

Зауважимо, що доведення існування термодинамічного граничного переходу $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ для функцій $\rho_\Lambda^{(a)}(\eta; z, \beta)$ проводиться аналогічно (див. [12]), а щоб вивести рівняння для функцій $\rho_\Lambda^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$, домножимо чисельник і знаменник у правій частині виразу (3.1) на множник $\dfrac{z^{|\eta_1|} e^{-\beta U(\eta_1)}}{Z_\Lambda^{(-)}(z, \beta, a)}$. Тоді

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{\dfrac{z^{|\eta \cup \eta_1|}}{Z_\Lambda^{(-)}(z, \beta, a)} \displaystyle\int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \eta_1 \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup \eta_1 \cup d\gamma)}{\dfrac{z^{|\eta_1|}}{Z_\Lambda^{(-)}(z, \beta, a)} \displaystyle\int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta_1 \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta_1 \cup d\gamma)}. \tag{3.2}$$

Враховуючи визначення кореляційних функцій $\rho_\Lambda^{(a)}(\cdot; z, \beta)$, записуємо (3.2) у вигляді

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{\rho_\Lambda^{(a)}(\eta \cup \eta_1; z, \beta)}{\rho_\Lambda^{(a)}(\eta_1; z, \beta)} \tag{3.3}$$

і аналогічне співвідношення для граничних функцій $\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta)$. Щоб записати рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta)$, запишемо рівняння Кірквуда – Зальцбурга для функції $\rho^{(a)}(\eta \cup \cup \eta_1; z, \beta)$, виділивши змінну $x \in \eta$ і застосувавши оператор $\widetilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\})$ (формули (2.7), (2.8)):

$$\rho^{(a)}(\eta \cup \eta_1; z, \beta) = z\widetilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) e^{-\beta W(x; \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1)} \Bigg\{ \rho^{(a)}(\eta \setminus \{x\} \cup \eta_1; z, \beta) +$$

$$+ \sum_{\substack{Q \subset \overline{\Delta}_a, Q \neq \varnothing \\ Q \cap \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1 = \varnothing}} \!/ \qquad \prod_{y \in Q} \left(e^{-\beta \phi_{xy}} - 1\right) \rho^{(a)}(\eta \setminus \{x\} \cup \eta_1 \cup Q; z, \beta) \Bigg\}, \tag{3.4}$$

де $Q = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\},\ k = 0, 1, \ldots,$ — всеможливі підмножини кубів розбиття $\overline{\Delta}_a$, в кожному з яких знаходиться точка конфігурації. У формулі (3.4) ми використали позначення

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{Q \subset \overline{\Delta}_a} f(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\} \subset \overline{\Delta}_a} \int_{\Delta_1} \ldots \int_{\Delta_k} f(y_1, \ldots, y_k) dy_1 \ldots dy_k.$$

Тоді, враховуючи (3.3), маємо

$$\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) = z\widetilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) e^{-\beta W(x; \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1)} \Bigg\{ \rho^{(a)}(\eta \setminus \{x\} \mid \eta_1; z, \beta) +$$

$$+ \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\substack{Q \subset \overline{\Delta}_a, Q \neq \varnothing \\ Q \cap \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1 = \varnothing}} \prod_{y \in Q} \left(e^{-\beta \phi_{xy}} - 1\right) \rho^{(a)}(\eta \setminus \{x\} \cup Q \mid \eta_1; z, \beta) \Bigg\}. \tag{3.5}$$

Запишемо сім'ю рівнянь (3.5) у вигляді одного операторного рівняння

$$\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1) = z \left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \rho^{(a)} \right) (\eta \mid \eta_1) + z \delta_{\eta_1}(\eta), \tag{3.6}$$

де

$$\delta_{\eta_1}(\eta) = \begin{cases} e^{-\beta W(x; \eta_1)}, & \text{якщо} \quad \eta = \{x\}, \\ 0, & \text{якщо } |\eta| \geq 2. \end{cases}$$

Оператор $\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ діє на довільну функцію $\varphi \in C_0(\Gamma_0^{(a)}$ за правилом

$$\left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \varphi \right)(x) = e^{-\beta W(x; \eta_1)} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\substack{Q \subset \overline{\Delta}_a, Q \neq \varnothing \\ Q \cap \eta_1 = \varnothing}} \prod_{y \in Q} \left(e^{-\beta \phi_{xy}} - 1\right) \varphi(Q) \tag{3.7}$$

для $|\eta| = 1$ і

$$\left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \varphi \right)(\eta) = \widetilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) e^{-\beta W(x; \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1)} \Bigg\{ \varphi(\eta \setminus \{x\}) +$$

$$+ \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\substack{Q \subset \overline{\Delta}_a, Q \neq \varnothing \\ Q \cap \eta \setminus \{x\} \cup \eta_1 = \varnothing}} \prod_{y \in Q} \left(e^{-\beta \phi_{xy}} - 1\right) \varphi(\eta \setminus \{x\} \cup Q) \Bigg\} \tag{3.8}$$

для $|\eta| \geq 2$.

Важливо зауважити, що якщо $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) > R$, то $W(\eta; \eta_1) = 0,\ e^{-\beta W(x; \eta_1)} = 1$ і в сумах виразів (3.7), (3.8) підсумовування проводиться по підмножинах $Q \subset R(\Delta)$, де

$$R(\Delta) = \bigcup_{\Delta' \in \overline{\Delta}_a, \operatorname{dist}(\Delta', \Delta) \leq R} \Delta'.$$

Оператор $\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ є оператором у просторі $E_\xi(\xi > 0)$ (див. [23]). Його норма задовольняє нерівність (див. також аналогічні оцінки в [9] для моделі ґратчастого газу)

$$\left\|\widetilde{K}_{\eta_1}^{(-)}\right\|_\xi \leq e^{\beta D(a)} e^{\xi C(\beta)} \xi^{-1}.$$

Розв'язок рівняння (3.6) можна записати у вигляді збіжного в E_ξ (а також поточково збіжного для кожної фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_0$) ряду (при достатньо малих значеннях активності z)

$$\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left(\left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\right)^n \delta_{\eta_1}\right)(\eta).$$

Покладаючи $\eta_1 = \varnothing$, отримуємо аналогічні рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$, а їх розв'язки задаються аналогічним рядом

$$\rho^{(a)}(\eta; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left(\left(\widetilde{K}^{(a)}\right)^n \delta\right)(\eta).$$

Вираз для оператора $\widetilde{K}^{(a)}$ $(|\eta| \geq 2)$ є аналогічним до (3.8) без множника $e^{-\beta W(x;\eta_1)}$.

Для доведення нерівності (2.12) сформулюємо наступну лему (див. також [9], лекція 6).

Лема 3.1. *Якщо функції f_1 і f_2 збігаються $(f_1(\eta) = f_2(\eta))$ для всіх $\eta \in \Gamma_0$ таких, що*

$$\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) \geq pR > 0, \quad p \in \mathbb{N},$$

то

$$\left(\widetilde{K}^{(a)} f_1\right)(\eta) = \left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)} f_2\right)(\eta)$$

для всіх η таких, що

$$\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) \geq (p+1)R.$$

Доведення. З рівнянь (3.7), (3.8) і того факту, що $Q \subset R(\Delta)$, випливає $\operatorname{dist}(\eta \setminus \{x\} \cup$ $\cup Q, \eta_1) \geq pR$, якщо $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) \geq (p+1)R$. У виразі для операторів $\widetilde{K}^{(a)}$ і $\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ підсумовування проводиться по різних областях ($Q \cap \eta \setminus \{x\} = \varnothing$ і $Q \cap (\eta \setminus \{x\} \cup \eta_1) = \varnothing$ відповідно). Але це не приводить до різних операторів, бо якщо $Q \cap \eta_1 \neq \varnothing$ і $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) > R$ за умовою леми, то $e^{-\beta\phi_{xy}} - 1 = 0$ для довільного $y \in Q$.

Якщо $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$, то $\delta(\eta) = \delta_{\eta_1}(\eta)$. Більш того, для довільних $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ таких, що $\operatorname{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$,

$$\left(\widetilde{K}^{(a)} \delta\right)(\eta) = \left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \delta_{\eta_1}\right)(\eta).$$

Лему 3.1 доведено.

Враховуючи лему 3.1, отримуємо

$$\left(\left(\widetilde{K}^{(a)}\right)^p \delta\right)(\eta) = \left(\left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\right)^p \delta_{\eta_1}\right)(\eta) \tag{3.9}$$

для всіх p, $1 \leq p \leq \left[\dfrac{\operatorname{dist}(\eta, \eta_1)}{R}\right]$.

Для довільних $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ існує $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що

$$(n+1)R \geq \mathrm{dist}(\eta, \eta_1) \geq nR.$$

Використовуючи цей факт і (3.9), одержуємо оцінку для довільних $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ таких, що $\mathrm{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$:

$$\left|\rho^{(a)}(\eta) - \rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1)\right| \leq \left|\sum_{l=n+1}^{\infty} z^{l+1}\left(\left(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\right)^l \delta\right)(\eta) - \sum_{l=n+1}^{\infty} z^{l+1}\left(\left(\widetilde{K}^{(a)}\right)^l \delta_{\eta_1}\right)(\eta)\right|. \quad (3.10)$$

З означення норми у просторі E_ξ і того, що існує таке ξ_0, що виконуються нерівності

$$z\big\|\widetilde{K}^{(a)}\big\|_{\xi_0} \leq m_{\xi_0}(a), \qquad z\big\|\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\big\|_{\xi_0} \leq m_{\xi_0}(a), \quad 0 \leq m_{\xi_0}(a) \leq 1,$$

отримуємо нерівності

$$z^l\Big|\big(\big(\widetilde{K}^{(a)}\big)^l\delta\big)(\eta)\Big| \leq z^l\big\|\big(\widetilde{K}^{(a)}\big)^l\delta\big\|_{\xi_0}\xi_0^{|\eta|} \leq m_{\xi_0}^l\|\delta\|_{\xi_0}\xi_0^{|\eta|} \leq m_{\xi_0}^l\xi_0^{|\eta|-1}, \quad (3.11)$$

$$z^l\Big|\big(\big(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\big)^l\delta_{\eta_1}\big)(\eta)\Big| \leq z^l\big\|\big(\widetilde{K}_{\eta_1}^{(a)}\big)^l\delta_{\eta_1}\big\|_{\xi_0}\xi_0^{|\eta|} \leq m_{\xi_0}^l\|\delta_{\eta_1}\|_{\xi_0}\xi_0^{|\eta|} \leq e^{\beta B}m_{\xi_0}^l\xi_0^{|\eta|-1}. \quad (3.12)$$

З огляду на оцінки (3.11), (3.12) ми можемо записати оцінку (3.10) у вигляді

$$\left|\rho^{(a)}(\eta) - \rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1)\right| \leq C_0 m_{\xi_0}^{n+1}\xi_0^{|\eta|} \leq C_0 m_{\xi_0}^{\frac{\mathrm{dist}(\eta,\eta_1)}{R}}\xi_0^{|\eta|}. \quad (3.13)$$

Враховуючи (3.3) та обмеженість кореляційних функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$:

$$\rho^{(a)}(\eta_1; z, \beta) \leq C_1\xi_1^{|\eta_1|},$$

де C_1 не залежить від a (див. [13]), з (3.13) отримуємо

$$\left|\rho^{(a)}(\eta \cup \eta_1) - \rho^{(a)}(\eta)\rho^{(a)}(\eta_1)\right| \leq C m_{\xi_0}^{\frac{\mathrm{dist}(\eta,\eta_1)}{R}}\xi^{|\eta|+|\eta_1|}. \quad (3.14)$$

Права частина нерівності (3.14) не залежить від параметра розбиття a. Граничний перехід $a \to 0$ завершує доведення теореми 2.1.

Література

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Alexander K. S.* Mixing properties and exponential decay for lattice systems in finite volumes // Ann. Probab. – 2004. – **32**, № 1A. – P. 441 – 487.
3. *Bradley R. C.* Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questionsy // Probab. Surv. – 2005. – **2**. – P. 107 – 144.
4. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, вып. 2. – С. 201 – 229.
5. *Conache D., Daletskii A., Kondratiev Yu., Pasurek T.* Gibbs measures on marked configuration spaces: existence and uniqueness. – Preprint, arxiv.org/abs/1503.06349v2.
6. *Lebowitz J. L.* Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic ising spin systems // Communs Math. Phys. – 1972. – **28**. – P. 313 – 321.

7. *Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B.* Decrease properties of truncated correlation functions and analyticity properties for classical statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1973. – **31**. – P. 191 – 208.
8. *Iagolnitzer D., Souillard B.* On the analyticity in the potential in classical statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1978. – **60**. – P. 131 – 152.
9. *Minlos R. A.* Introduction to mathematical statistical physics // Univ. Lect. Ser. – 1999. – **19**. – 103 p.
10. *Rebenko A. L.* Cell gas model of classical statistical systems // Rev. Math. Phys. – 2013. – **25**, № 4. – P. 1 – 28.
11. *Rebenko A. L., Tertychnyi M. V.* Quasi-continuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 3. – С. 172 – 182.
12. *Rebenko A. L., Tertychnyi M. V.* Quasi-lattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions. Correlation functions // J. Math. Phys. – 2009. – **50**, № 3. – P. 1 – 16.
13. *Петренко С. М., Ребенко О. Л., Тертичний М. В.* Про квазінеперервну апроксимацію в класичній статистичній механіці // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 369 – 384.
14. *Rebenko A. L., Tertychnyi M. V.* On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 3. – P. 287 – 296.
15. *Kondratiev Yu. G., Kuna T.* Harmonic analysis on configuration spaces. I. General theory // Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probal. Relat. Top. – 2002. – **5**, № 2. – P. 201 – 233.
16. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **59**. – P. 219 – 239.
17. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **59**. – P. 241 – 256.
18. *Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М.* Динамические системы статистической механики // Итоги науки и техники / Сер. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1985. – **2**. – С. 235 – 284.
19. *Минлос Р. А.* Лекции по статистической физике // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, №1. – С. 133 – 190.
20. *Parthasarathy K. R.* Probability measure on metric spaces. Probability and mathematical statistics. – New York; London: Acad. Press, 1967.
21. *Lanford O. E., Ruelle D.* Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1969. – **13**, № 3. – P. 194 – 215.
22. *Kondratiev Yu. G., Pasurek T., Röckner M.* Gibbs measures of continuous systems: an analytic approach // Rev. Math. Phys. – 2012. – **24**, № 10. – 54 p.
23. *Ruelle D.* Statistical mechanics (rigorous results). – New York; Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969.
24. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 262 с.
25. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundation of classical statistical mechanics. Continuous systems. – New York etc.: Gordon and Breach Sci., 1989. – 281 p.

Одержано 27.04.17