УДК 517.956

С. А. Алдашев, Е. Т. Китайбеков (Казах. нац. пед. ун-т им. Абая, Алматы)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

The paper shows the unique solvability of the classical Dirichlet problem in cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with degeneration type and order.

Показано однозначну розв'язність класичного розв'язку задачі Діріхле в циліндричній області для тривимірних еліптичних рівнянь із виродженням типу і порядку.

Введение. Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексной переменной приведены в [1, 2].

При изучении аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3].

В [4] установлена корректность задачи Дирихле для вырождающегося трехмерного эллиптического уравнения.

В данной работе показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных эллиптических уравнений с вырождением типа и порядка.

1. Постановка задачи и результат. Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t), ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t)\colon |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, x_2)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через $\Gamma_\beta,\ S_\beta,\ S_0$ соответственно.

В области D_β рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t) u_{x_i x_i} + k_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где $k_i(t) > 0$ при $t > 0$ и обращаются в нуль при $t = 0$, $k_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta))$, $i = 1, 2, 3$.

Уравнение (1) эллиптично при $t > 0$, а вдоль плоскости $t = 0$ имеет место вырождение его типа и порядка.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат $x_1,\ x_2,\ t$ с полярными $r, \theta, t\colon$ $x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \qquad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \qquad u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \tag{2}$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi(\beta,\theta)$, $\psi(0,\theta) = \tau(1,\theta)$.

Пусть $\dfrac{a_i(x,t)}{k_3(t)}$, $\dfrac{b(x,t)}{k_3(t)}$, $\dfrac{c(x,t)}{k_3(t)} \in C(\bar{D}_\beta) \cap C^1(D_\beta)$, $i = 1, 2$, $c(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in D_\beta$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $\varphi(r,\theta)$, $\tau(r,\theta) \in C(\bar{S}_0) \cap C^2(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in C(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^2(\Gamma_\beta)$, *то задача однозначно разрешима.*

2. ***Доказательство.*** Единственность решения задачи D следует из принципа Хопфа [5]. Перейдем к установлению задачи D. Ее решение в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = u_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_{1n}(r,t)\cos n\theta + u_{2n}(r,t)\sin n\theta\big), \tag{3}$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставив (3) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered}
Lu \equiv k_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right) + k_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right) + k_3(t)u_{10tt} + \\
+ a_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r} + a_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r} + b(r,\theta,t)u_{10t} + c(r,\theta,t)u_{10} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{k_1(t)\bigg[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \\
+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\
- \frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\bigg] + k_2(t)\bigg[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \\
+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} - \sin n\theta u_{2nr}) + \\
+ \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\bigg] + k_3(t)u_{1ntt}\cos n\theta + \\
+ k_3(t)u_{2ntt}\sin n\theta + a_1\left[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n})\right] + \\
+ a_2\left[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n})\right] + \\
+ b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\Bigg\} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Теперь выражение (4) сначала умножим на $\rho(\theta) \ne 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\frac{k_1+k_2}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)+k_3(t)\rho_{10}u_{10tt}+\frac{k_1-k_2}{2}d_{10}\left(u_{10rr}-\frac{1}{r}u_{10}\right)+$$

$$+a_{10}(r,t)u_{10r}+b_{10}(r,t)u_{10t}+c_{10}(r,t)u_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{k_1+k_2}{2}\rho_{jn}\Big(u_{jnrr}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\Big)+k_3(t)\rho_{jn}u_{jntt}+\frac{k_1-k_2}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr}-\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+$$

$$\left.\left.+\frac{(k_2-k_1)n}{2}e_{jn}\Big(u_{jnr}-\frac{u_{jn}}{2r}\Big)+a_{jn}(r,t)u_{jnr}+b_{jn}(r,t)u_{jnt}+c_{jn}(r,t)u_{jn}\right]\right\}=0, \qquad (5)$$

в котором

$$\rho_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta, \qquad \rho_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta, \qquad d_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta, \qquad e_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta, \qquad e_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$a_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta, \qquad a_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$b_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho b\cos n\theta d\theta, \qquad b_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho b\sin n\theta d\theta,$$

$$c_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(a_1\sin\theta-a_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r}+c\cos n\theta\right]d\theta,$$

$$c_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(a_2\cos\theta-a_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r}+c\sin n\theta\right]d\theta, \quad n=0,1,\ldots.$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t)\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)+k_3(t)\rho_{10}u_{10tt}=0, \qquad k(t)=\frac{k_1(t)+k_2(t)}{2}, \qquad (6)$$

$$k(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr}+\frac{1}{r}u_{j1r}-\frac{u_{j1}}{r^2}\right)+k_3(t)\rho_{10}u_{j1tt}=$$

$$=\frac{(k_1-k_2)d_{10}}{2}\left(u_{10rr}-\frac{u_{10r}}{r}\right)-a_{10}u_{10r}-b_{10}u_{10t}-c_{10}u_{10}, \qquad (7)$$

$$k(t)\rho_{jn}\left(u_{jnrr}+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+k_3(t)\rho_{jn}u_{jntt}=$$

$$= -\frac{k_1 - k_2}{2} d_{jn} \left(u_{jn-1rr} - \frac{1}{r} u_{jn-1r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} u_{jn-1} \right) -$$

$$-\frac{(k_2 - k_1)(n-1)}{r} e_{jn-1} \left(u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{r} \right) - a_{jn-1} u_{jn-1r} -$$

$$-b_{jn-1t} u_{jn-1t} - c_{jn-1} u_{jn-1}, \qquad j = 1, 2, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\, u_{jn}\}$, $j = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots,$ — решение системы (6) – (8), то оно является и решением уравнения (5).

Далее, учитывая ортогональность [6] систем тригонометрических функций $\{1,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta,\ n = 1, 2, \ldots\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$, из краевого условия (2) в силу (3) будем иметь

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{10}(r), \qquad u_{10}(1, t) = \psi_{10}(t), \qquad u_{10}(r, 0) = \tau_{10}(r), \tag{9}$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{jn}(r), \quad u_{jn}(1, t) = \psi_{jn}(t), \quad u_{jn}(r, 0) = \tau_{jn}(r), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$\varphi_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, 0) d\theta, \qquad \psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t, \theta) d\theta, \qquad \tau_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r, \theta) d\theta,$$

$$\varphi_{1n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \qquad \psi_{1n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t, \theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r, \theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{2n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \sin n\theta d\theta, \qquad \psi_{2n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t, \theta) \sin n\theta d\theta,$$

$$\tau_{2n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r, \theta) \sin n\theta d\theta.$$

Таким образом, задача D сведена к системе задач Дирихле для уравнений (6) – (8) с данными (9), (10). Найдем решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (6) – (8) можно представить в виде

$$\bar{k}(t) \left(u_{nrr}^k + \frac{1}{r} u_{nr}^k - \frac{n^2}{r^2} u_n \right) + u_{ntt} = f_n^k(r, t), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где $\bar{k}(t) = k(t)/k_3(t)$, $f_n(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r, t) \equiv 0$.

В [4] показано, что задачи для уравнения (11) с краевыми условиями (9) и (10) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (6), (9) $(j = 1,\ n = 0)$, а затем (7), (10) $(j = 1, 2,\ n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $u_{10}(r, t)$, $u_{jn}(r, t)$, $j = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots .$

Итак, показано, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho(\theta) Lud\theta = 0. \tag{12}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in \in C^{\infty}((0,2\pi))$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1$ плотна в $L_2(D_\beta)$ [6]. Отсюда и из (12) следует, что

$$\int\limits_{D_\beta} f(r,\theta,t) LudD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0 \quad \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи D является функция (3), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j = 1,2$, $n = 1,2,\ldots$, определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, как и в [7], можно показать, что полученное решение (3) принадлежит искомому классу $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, разрешимость задачи D установлена.

Теорема доказана.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 203 с.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося трехмерного эллиптического уравнения // Материалы VII междунар. научн. конф. им. академика И. И. Ляшко. – 2014. – С. 14 – 15.
5. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
7. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Мат. заметки. – 2013. – **94**, вып. 6. – С. 936 – 939.

Получено 11.11.16