УДК 517.555

А. І. Бандура (Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу),
О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ОБМЕЖЕНІСТЬ L-ІНДЕКСУ КОМПОЗИЦІЇ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

We consider the following compositions of entire functions $F(z) = f\big(\Phi(z)\big)$ and $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$, where $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, and $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, and establish conditions guaranteeing the equivalence of boundedness of the l-index of the function f to the boundedness of the L-index of the function F in joint variables, where $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ is a continuous function and $L(z) = \left(l\big(\Phi(z)\big)\left|\dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}\right|, \ldots, l\big(\Phi(z)\big)\left|\dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}\right|\right)$. Under certain additional restrictions imposed on the function H, we construct a function $\widetilde{L}$ such that H has a bounded $\widetilde{L}$-index in joint variables provided that the function G has a bounded L-index in joint variables. This solves a problem posed by Sheremeta.

Розглядаються такі композиції цілих функцій: $F(z) = f(\Phi(z))$ та $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$, де $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$. Знайдено умови, які забезпечують рівносильність обмеженості l-індексу функції f та обмеженості L-індексу за сукупністю змінних функції F, де $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, а $L(z) = \left(l\big(\Phi(z)\big)\left|\dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}\right|, \ldots, l\big(\Phi(z)\big)\left|\dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}\right|\right)$. Для функції H з деякими додатковими обмеженнями побудовано таку функцію $\widetilde{L}$, що H має обмежений $\widetilde{L}$-індекс за сукупністю змінних тоді, коли функція G має обмежений L-індекс за сукупністю змінних. Це розв'язує проблему, сформульовану М. М. Шереметою.

1. Вступ. У цій статті будемо досліджувати обмеженість L-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій.

Введемо деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, — n-вимірні дійсний і комплексний векторні простори відповідно. Позначимо $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1}_j = \Big(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-й член}}, 0, \ldots, 0\Big)$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ будемо писати $\|K\| = k_1 + \ldots + k_n$, $K! = k_1! \ldots k_n!$. Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі записи без порушення умов існування цих виразів: $A \pm B = (a_1 \pm b_1, \ldots, a_n \pm b_n)$, $AB = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_n^{b_n}$. Запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібним чином визначається відношення $A \le B$.

Замкнений полікруг $\big\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| \le r_j,\ j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$ позначимо через $D^n[z^0, R]$. Для частинної похідної цілої функції $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ будемо використовувати запис

$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}, \quad \text{де} \quad K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Нехай $L(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — додатні неперервні функції змінної $z \in \mathbb{C}^n$.

Ціла функція $F(z)$ називається *функцією обмеженого L-індексу за сукупністю змінних* [8, 9], якщо існує таке число $m \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ справджується нерівність

$$\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{J!L^J(z)} \le \max\left\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{K!L^K(z)} : K \in \mathbb{Z}_+^n,\ \|K\| \le m\right\}. \tag{1}$$

Найменше m, для якого нерівність (1) виконується, називається *L-індексом за сукупністю змінних функції F* та позначається через $N(F, L)$. Якщо $l_j(z_j) \equiv 1,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то ціла функція називається *функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних* [16, 19, 23 – 25]. Слід зазначити, що є праці, де розглядається поняття обмеженого L-індексу за сукупністю змінних для функцій, аналітичних в одиничній кулі [6, 7] та одиничному полікрузі [12].

Для $R \in \mathbb{R}_+^n,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ та $L(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(z_0, R) = \inf\left\{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in D^n\left[z^0, R/L(z^0)\right]\right\}, \qquad \lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{1,j}(z_0, R),$$

$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup\left\{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in D^n\left[z^0, R/L(z^0)\right]\right\}, \qquad \lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z_0, R),$$

$$\Lambda_k(R) = (\lambda_{k,j}(R), \ldots, \lambda_{k,n}(R)), \quad k \in \{1, 2\}.$$

Через Q^n позначимо клас таких функцій $L(z)$, що для кожного $R \in \mathbb{R}_+^n$ виконується нерівність $0 < \Lambda_1(R) \le \Lambda_2(R) < +\infty$.

На сьогодні про властивості цілих функцій обмеженого індексу опубліковано багато праць (див. бібліографію в [7, 8, 21]). Проте лише п’ять досліджень присвячено обмеженості індексу композиції цілих та аналітичних функцій однієї змінної [17, 18, 20 – 22]. Зокрема, найзагальніший результат про композицію отримав В. О. Кушнір [18], який досліджував аналітичні в довільних областях з $\mathbb{C}$ функції.

Багатовимірний випадок [2, 4] досліджено лише для складених функцій вигляду $f\Big(\sum_{j=1}^{n} z_j m_j\Big)$ і $f(z_1 z_2)$, де $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ — фіксований вектор. У вказаних роботах вивчалися так звані цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком (див. їхні властивості також у [5, 8]). Нещодавно згаданий вище результат В. О. Кушніра було узагальнено для цього класу функцій [13] з дещо слабшими обмеженнями. Натомість композиція цілих функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних ще ніким не розглядалася. Тому природно постає таке **питання:** *Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція і $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Якою повинна бути неперервна функція $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$, щоб складена функція $f\big(\Phi(z)\big)$ мала обмежений L-індекс за сукупністю змінних*?

М. М. Шеремета запропонував розглянути загальніше **питання:** *Нехай $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого L-індексу за сукупністю змінних, $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ та $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ — цілі функції, $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Якою повинна бути неперервна функція $\widetilde{L} : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{R}_+^n$, щоб складена функція $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ мала обмежений $\widetilde{L}$-індекс за сукупністю змінних*?

У даній статті ми дамо відповіді на сформульовані питання.

Зазначимо також, що М. М. Шеремета у [22] висловив гіпотезу про обмеженість індексу в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ функції $f\left(\dfrac{q}{(1-z)^n}\right)$, де f — ціла функція однієї змінної, $q \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

2. Основні результати. Для доведення основного твердження нам потрібна така теорема.

Теорема 1 [10]. *Нехай L належить Q^n. Ціла функція F має обмежений L-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують такі $p \in \mathbb{Z}_+$ та $c \in \mathbb{R}_+$, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{L^J(z)} : \|J\| = p+1\right\} \le c \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{L^K(z)} : \|K\| \le p\right\}. \tag{2}$$

В. К. Хейман [15] довів теорему 1 для цілих функцій обмеженого індексу у випадку однієї змінної ($n = 1,\ L(z) \equiv 1$). М. М. Шеремета [20] узагальнив її для цілих функцій обмеженого l-індексу, але також однієї змінної. Пізніше було отримано це твердження [1, 8] для цілих функцій кількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком. Тут ми скористаємося сформульованим результатом для дослідженння цілих функцій кількох змінних обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. Зазначимо, що теорема Хеймана є досить зручною для вивчення властивостей цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними та звичайних диференціальних рівнянь [3, 8, 11, 14].

Введемо такі позначення:

$$\nabla\Phi(z) = \left(\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}\right) \qquad \text{та} \qquad |\nabla|\Phi(z) = \left(\left|\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}\right|\right).$$

Основним результом цієї статті є така теорема.

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція в $\mathbb{C}$, Φ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$ така, що для деякого p і для всіх $z \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ та $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|J\| \le p$, виконуються нерівності $\dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_k} \ne 0$ та*

$$|\Phi^{(J)}(z)| \le C|\nabla|\Phi(z)^J, \qquad C \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{3}$$

Нехай функція $l \in Q$ така, що $l(w) \ge 1$ $(w \in \mathbb{C})$ та $L \in Q^n$, де $L(z) = l\big(\Phi(z)\big)|\nabla|\Phi(z)$. Ціла функція f має обмежений l-індекс тоді і тільки тоді, коли $F(z) = f\big(\Phi(z)\big)$ має обмежений L-індекс за сукупністю змінних.

Доведення. Покажемо, що

$$F^{(K)}(z) = f^{(\|K\|)}\big(\Phi(z)\big)\big(\nabla\Phi(z)\big)^K + \sum_{j=1}^{\|K\|-1} f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)Q_{j,K}(z), \tag{4}$$

де

$$Q_{j,K}(z) = \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1} + \ldots + \mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n} + \ldots + K p_K = K \\ 0 \le p_{\mathbf{1}_1} + \ldots + p_{\mathbf{1}_n} \le j-1}} c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z)\big)^{p_{\mathbf{1}_1}} \ldots \big(\Phi^{(\mathbf{1}_n)}(z)\big)^{p_{\mathbf{1}_n}} \ldots \big(\Phi^{(K)}(z)\big)^{p_K},$$

та $c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K}$ — деякі невід'ємні цілі коефіцієнти, $K \in \mathbb{Z}_+^n$.

Встановимо також таку формулу:

$$f^{(k)}\big(\Phi(z)\big) = \frac{F^{(k\mathbf{1}_i)}(z)}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^k} + \frac{1}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{2k}} \sum_{j=1}^{k-1} F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^j \widetilde{Q}_{j,k}(z), \tag{5}$$

де

$$\widetilde{Q}_{j,k}(z) = \sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)} b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1}\ldots(\Phi^{(k\mathbf{1}_i)}(z))^{m_k}$$

і $b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, — деякі цілі коефіцієнти.

Скористаємося методом математичної індукції для доведенння формул (4), (5). Очевидно, що $K=\mathbf{1}_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, та рівності (4) і (5) виконуються. Припустимо, що вони справджуються для $K=S$. Доведемо їх для $K=S+\mathbf{1}_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Обчислимо частинну похідну за змінною z_i в (4):

$$F^{(S+\mathbf{1}_i)}(z) = f^{(\|S\|+1)}\big(\Phi(z)\big)\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S+\mathbf{1}_i} + f^{(\|S\|)}\big(\Phi(z)\big)\sum_{k=1}^{n} s_k\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\|S\|-1}\Big(f^{(j+1)}\big(\Phi(z)\big)\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j,S}(z) + f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)Q_{j,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big) =$$

$$= f^{(\|S\|+1)}\big(\Phi(z)\big)\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S+\mathbf{1}_i}+$$

$$+f^{(\|S\|)}\big(\Phi(z)\big)\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{\|S\|-1,S}(z) + \sum_{k=1}^{n} s_k\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{s-1} f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)\Big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j-1,S}(z) + Q_{j,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big) + f'\big(\Phi(z)\big)Q_{1,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z).$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n} s_k\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z) + \Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{\|S\|-1,S}(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k\big(\nabla\Phi(z)\big)^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)+$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{1}_1p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_np_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sp_S=S\\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le\|S\|-2}} c_{\|S\|-1,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{1+p_{\mathbf{1}_i}}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S} =$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{1}_1m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_nm_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sm_S=S+\mathbf{1}_i\\ 0\le m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+m_{\mathbf{1}_n}\le\|S\|-1}} \tilde{c}_{\|S\|,S+\mathbf{1}_i,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{m_{\mathbf{1}_1}}\ldots\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_{\mathbf{1}_i}}\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{m_S} =$$

$$= Q_{\|S\|,S+\mathbf{1}_i}(z),$$

$$Q_{1,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z) = \sum_{\substack{Jp_J+\ldots+Sp_S=S\\ \|J\|\ge 2}} c_{1,S,0,\ldots,p_S}\Big(p_J(\Phi^{(J)}(z))^{p_J-1}\big(\Phi^{(J+\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{p_{J+\mathbf{1}_i}+1}\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{p_S}+\ldots$$

$$\ldots + p_S\big(\Phi^{(J)}(z)\big)^{p_J}\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{p_S-1}\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{Jm_J+\ldots+(S+\mathbf{1}_i)m_{S+\mathbf{1}_i}=S+\mathbf{1}_i \\ \|J\|\geq 2}} \tilde{c}_{1,S+\mathbf{1}_i,0,\ldots,p_S}\big(\Phi^{(J)}(z)\big)^{m_J}\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{m_S}\big(\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_{S+\mathbf{1}_i}} =$$

$$= Q_{1,S+\mathbf{1}_i}(z)$$

та

$$\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j-1,S}(z)+Q^{(\mathbf{1}_i)}_{j,S}(z)=$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{1}_1p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_np_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sp_S=S \\ 0\leq p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\leq j-2}} c_{j-1,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}\big(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z)\big)^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{1+p_{\mathbf{1}_i}}\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{p_S}+$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{1}_1p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_np_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sp_S=S \\ 0\leq p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\leq j-1}} c_{j,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}\Big(p_{\mathbf{1}_1}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}-1}(\Phi^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_i)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_i}+1}\ldots$$

$$\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S}+\ldots+p_S(\Phi^{(J)}(z))^{p_J}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S-1}\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\Big)=$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{1}_1m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_nm_{\mathbf{1}_n}+\ldots+(S+\mathbf{1}_i)m_{S+\mathbf{1}_i}=S+\mathbf{1}_i \\ 0\leq p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\leq j-1}} \tilde{c}_{j,S+\mathbf{1}_i,m_{\mathbf{1}_1},\ldots,m_{S+\mathbf{1}_i}}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{m_{\mathbf{1}_1}}\ldots$$

$$\ldots\big(\Phi^{(S)}(z)\big)^{m_S}\big(\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_{S+\mathbf{1}_i}}=$$

$$= Q_{j,S+\mathbf{1}_i}(z),$$

отримуємо (4) із $S+\mathbf{1}_i$ замість K.

Після диференціювання за змінною z_i з рівності (5) одержуємо

$$f^{(s+1)}\big(\Phi(z)\big)=\frac{F^{(s+1)\mathbf{1}_i}(z)}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{s+1}}-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)F^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{-s-2}+$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}\Big\{F^{((j+1)\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-1}\widetilde{Q}_{j,s}(z)+$$

$$+F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-2}\Big((j-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}^{(\mathbf{1}_i)}_{j,s}(z)\Big)\Big\}=$$

$$=\frac{F^{(s+1)\mathbf{1}_i}(z)}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{s+1}}+F^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{-s-2}\Big(-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+\widetilde{Q}_{s-1,s}(z)\Big)+$$

$$+\sum_{j=2}^{s-1}\Big\{F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-2}\Big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}^{(\mathbf{1}_i)}_{j,s}(z)+(j-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z)+\widetilde{Q}_{j-1,s}(z)\Big)\Big\}+$$

$$+F^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{-2s-1}\Big((1-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}^{(\mathbf{1}_i)}_{1,s}(z)\Big).$$

Оскільки

$$-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+Q^{*}_{s-1,s}(z)=(-s+b_{s-1,s,0,1,\ldots,0})\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+b_{s-1,s,2,0,\ldots,0}\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^2=$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2}} \tilde{b}_{s,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} \big(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_{s+1}} =$$

$$= \widetilde{Q}_{s,s+1}(z),$$

$$(1-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}(z) + \Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z) =$$

$$= (1-2s) \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2s-2}} b_{1,s,m_1,\ldots,m_s} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2+1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2s-2}} b_{1,s,m_1,\ldots,m_s} \Big\{ m_1 \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2+1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} +$$

$$+ m_2 \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2-1} \big(\Phi^{(3\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_3+1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} + \ldots$$

$$\ldots + m_s \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1+1} \ldots \big(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s-1} \Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z) \Big\} =$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2s}} \tilde{b}_{1,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} \big(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_{s+1}} =$$

$$= \widetilde{Q}_{1,s+1}(z)$$

та

$$\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z) + (j-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z) + \widetilde{Q}_{j-1,s}(z) =$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}} b_{j,s,m_1,\ldots,m_s} \Big\{ m_1 \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2+1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} + \ldots$$

$$\ldots + m_s \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1+1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2} \ldots \Big(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\Big)^{m_s-1} \Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z) \Big\} +$$

$$+ (j-2s) \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}} b_{j,s,m_1,\ldots,m_s} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \big(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_2+1} \ldots \big(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_s} +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)+2}} b_{j-1,s,m_1,\ldots,m_s} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \ldots \Big(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\Big)^{m_s} =$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2(s+1-j)}} \tilde{b}_{j,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{m_1} \ldots \Big(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\Big)^{m_{s+1}} =$$

$$= \widetilde{Q}_{j,s+1}(z),$$

одержуємо (5) з $s+1$ замість k.

Нехай f — ціла функція обмеженого l-індексу. За теоремою 1 виконується нерівність (2). Зважаючи на (3) та (4), з (2) маємо, що для $K = S + \mathbf{1}_i$ при $\|S\| = p$ справджується

$$\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{L^K(z)} \le \frac{\left|f^{(\|K\|)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{L^K(z)}|\nabla|\Phi(z)^K + \sum_{j=1}^{\|K\|-1}\frac{\left|f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)\right||Q_{j,K}(z)|}{L^K(z)} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)} : 0 \le k \le p\right\}\left(C + \sum_{j=1}^{p}\frac{|Q_{j,K}(z)|}{l^{p+1-j}\big(\Phi(z)\big)|\nabla|\Phi(z)^K}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)} : 0 \le k \le p\right\}\Bigg(C +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+K p_K=K\\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-1}} c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K}\frac{\left|(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots(\Phi^{(\mathbf{1}_n)}(z))^{p_{\mathbf{1}_n}}\ldots(\Phi^{(K)}(z))^{p_K}\right|}{l^{p+1-j}\big(\Phi(z)\big)|\nabla|\Phi(z)^K}\Bigg) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)} : 0 \le k \le p\right\}\left(C + \sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+(p+1)n_{p+1}=p+1\\ 0\le n_1\le j-1}}\frac{c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K}C_1^{\|K\|}}{l^{p+1-j}\big(\Phi(z)\big)}\right) \le$$

$$\le C_2 \max\left\{\frac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)} : 0 \le k \le p\right\}.$$

Використовуючи (5), можна оцінити зверху дріб $\dfrac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k(\Phi(z))}$:

$$\frac{\left|f^{(k)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)} \le \frac{\left|F^{(k\mathbf{1}_i)}(z)\right|}{l^k\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^k} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\left|F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\right||\widetilde{Q}_{j,k}(z)|}{l^k\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{2k-j}} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{|\widetilde{Q}_{j,k}(z)|}{l^{k-j}\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{2(k-j)}}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\}\times$$

$$\times\left(1 + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)}|b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}|\frac{\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{m_1}\ldots\left|\Phi^{(k\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{m_k}}{l^{k-j}\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{2(k-j)}}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)}\frac{|b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}|C_1^{2(k-j)}}{l^{k-j}\big(\Phi(z)\big)}\right) \le$$

$$\le C_3 \max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\}.$$

Звідси отримуємо

$$\max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}: |J\|=p+1\right\}\le C_2C_3\max\left\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{L^K(z)}: 0\le\|K\|\le p\right\}. \qquad (6)$$

Отже, за теоремою 1 з нерівності (6) випливає, що функція F має обмежений L-індекс за сукупністю змінних.

Тепер, навпаки, припустимо, що F є функцією обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. Тоді вона задовольняє (2). Беручи до уваги (3) та (5), для $\|K\|=p+1$ отримуємо

$$\frac{\left|f^{(p+1)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^{p+1}\big(\Phi(z)\big)}\le\frac{\left|F^{((p+1)\mathbf{1}_i)}(z)\right|}{l^{p+1}\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{p+1}}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\left|F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\right|\left|\widetilde{Q}_{j,p+1}(z)\right|}{l^{p+1}\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{2p+2-j}}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}: 0\le\|J\|\le p\right\}\left(C+\sum_{j=1}^{p}\frac{\left|\widetilde{Q}_{j,p+1}(z)\right|}{l^{p+1-j}\big(\Phi(z)\big)\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{2(p+1-j)}}\right)\le$$

$$\le\max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}: 0\le\|J\|\le p\right\}\times$$

$$\times\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=2(p+1-j)}|b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}|\left|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right|^{m_1}\ldots|\Phi^{((p+1)\mathbf{1}_i)}(z)|^{m_{p+1}}\right)\le$$

$$\le\max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}: 0\le\|J\|\le p\right\}\times$$

$$\times\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=2(p+1-j)}\frac{|b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}|C_1^{2p+2-2j}}{l^{p+1-j}\big(\Phi(z)\big)}\right)\le$$

$$\le C_4\max\left\{\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}: 0\le\|J\|\le p\right\}.$$

Використовуючи (4), одержуємо оцінку

$$\frac{\left|F^{(J)}(z)\right|}{L^J(z)}\le\frac{\left|f^{(\|J\|)}\big(\Phi(z)\big)\right||\nabla|\Phi(z)^J}{L^J(z)}+\sum_{j=1}^{\|J\|}\frac{\left|f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)\right||Q_{j,J}(z)|}{L^J(z)}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{\left|f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)\right|}{l^j\big(\Phi(z)\big)}: 1\le j\le\|J\|-1\right\}\left(1+\sum_{j=1}^{\|J\|-1}\frac{|Q_{j,J}(z)|}{l^{\|J\|-j}\big(\Phi(z)\big)|\nabla|\Phi(z)^J}\right)\le$$

$$\le C_5\max\left\{\frac{|f^{(j)}\big(\Phi(z)\big)|}{l^j\big(\Phi(z)\big)}: 1\le j\le p\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\bigl|f^{(p+1)}\bigl(\Phi(z)\bigr)\bigr|}{l^{p+1}\bigl(\Phi(z)\bigr)} \le C_4 C_5 \max\left\{\frac{\bigl|f^{(j)}\bigl(\Phi(z)\bigr)\bigr|}{l^{j}\bigl(\Phi(z)\bigr)} : 0 \le j \le p\right\}.$$

Тому за теоремою 1 функція f має обмежений l-індекс.

Теорему 2 доведено.

Тепер отримаємо відповідь на загальнішу проблему М. М. Шеремети, сформульовану у вступі.

Теорема 3. *Нехай $L \in Q^2$, $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого L-індексу за сукупністю змінних, $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ та $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ — цілі функції такі, що $\dfrac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_k} \ne 0$, $\dfrac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_l} \ne 0$, та*

$$\bigl|\Phi_1^{(J)}(z)\bigr| \le C|\nabla|\Phi_1(z)^J, \qquad \bigl|\Phi_2^{(I)}(w)\bigr| \le C||\nabla|\Phi_2(w)^I, \qquad C \equiv \mathrm{const} > 0, \tag{7}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,m\}$, $\|J\| \le p$, $\|I\| \le p$, де $p = N(G, L)$ вибрано із нерівності (2).

Тоді $H(z,w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ має обмежений $\widetilde{L}$-індекс за сукупністю змінних, де

$$\widetilde{L}(z,w) = \Biggl(l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_1}\right|, \ldots, l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_n}\right|,$$
$$l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_1}\right|, \ldots, l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_m}\right|\Biggr) \in Q^{n+m}.$$

Доведення. Нехай $G = G(v_1, v_2)$, $v_1 = \Phi_1(z)$, $v_2 = \Phi_2(w)$. Як і в теоремі 2, методом математичної індукції можемо встановити формулу

$$\frac{\partial^{\|J\|+\|I\|} H(z,w)}{\partial z^J \partial w^I} = \frac{\partial^{\|J\|+\|I\|} F(v_1,v_2)}{\partial v_1^{\|J\|} \partial v_2^{\|I\|}}\Bigg|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} \cdot (\nabla \Phi_1(z))^J (\nabla \Phi_2(w))^I +$$
$$+ \sum_{\substack{\|K_1\|+\|K_2\| \in \{1,\ldots,\|J\|+\|I\|-1\}\\ \|K_1\| \in \{0,\ldots,\|J\|\}, \|K_2\| \in \{0,\ldots,\|I\|\}}} \frac{\partial^{\|K_1\|+\|K_2\|} F(v_1,v_2)}{\partial v_1^{\|K_1\|} \partial v_2^{\|K_2\|}}\Bigg|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} Q\bigl(z,w; \|K_1\|+\|K_2\|, J, I\bigr), \tag{8}$$

де

$$Q(z,w;k,J,I) = \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+J p_J = J,\ \mathbf{1}_1 s_{\mathbf{1}_1}+\ldots+I s_I = I\\ 0 \le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}+s_{\mathbf{1}_1}+\ldots+s_{\mathbf{1}_m} \le k-1}} c_{k,J,I,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_J,s_{\mathbf{1}_1},\ldots,s_I} \times$$
$$\times \bigl(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z)\bigr)^{p_{\mathbf{1}_1}} \ldots \bigl(\Phi_1^{(J)}(z)\bigr)^{p_J} \bigl(\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w)\bigr)^{s_{\mathbf{1}_1}} \ldots \bigl(\Phi_2^{(I)}(w)\bigr)^{s_I},$$

$c_{k,J,I,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_J,s_{\mathbf{1}_1},\ldots,s_I}$ — деякі цілі невід'ємні коефіцієнти.

Також можна довести, що

$$\frac{\partial^{j+i} G(v_1,v_2)}{\partial v_1^j \partial v_2^i}\Bigg|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} = \frac{\dfrac{\partial^{j+i} H(z,w)}{\partial z^j \partial w^i}}{(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^j (\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^i} + \frac{1}{(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{2j} (\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^{2i}} \times$$
$$\times \sum_{\substack{1 \le p+s \le j+i-1\\ p \le j, s \le i}} \frac{\partial^{p+s} H(z,w)}{\partial z^p \partial w^s} \bigl(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z)\bigr)^p \bigl(\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w)\bigr)^s \widetilde{Q}_{p,s,j,i}(z,w), \tag{9}$$

де

$$\widetilde{Q}_{p,s,j,i}(z,w) = \sum_{\substack{m_1+\ldots+jm_j+n_1+\ldots+in_i=\\=2(i+j-p-s)}} b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}\big(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z)\big)^{m_1}\ldots\big(\Phi_1^{(j\mathbf{1}_1)}(z)\big)^{m_j}\times$$
$$\times\big(\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w)\big)^{n_1}\ldots\big(\Phi_2^{(i\mathbf{1}_1)}(w)\big)^{n_i}$$

та $b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}$ — деякі цілі числа.

Використовуючи (8) та (9), можна встановити за аналогією із доведенням теореми 2, що ціла функція H задовольняє нерівність (2). Тоді за теоремою 1 функція H має обмежений $\widetilde{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Теорему 3 доведено.

Зауваження. Теорема 3 узагальнюється на випадок, коли $G\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$. Для того щоб уникнути громіздких формулювань і викладок, ми обмежилися випадком $p=2$.

Література

1. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком // Мат. студ. – 2007. – **27**, № 1. – С. 30 – 52.
2. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Цілі функції обмеженого і необмеженого індексу за напрямком // Мат. студ. – 2007. – **27**, № 2. – С. 211 – 215.
3. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Sufficient sets for boundedness L-index in direction for entire functions // Mat. Stud. – 2008. – **30**, № 2. – P. 177 – 182.
4. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z,m\rangle)$ and existence theorems // Mat. Stud. – 2014. – **41**, № 1. – P. 45 – 52.
5. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 3. – С. 426 – 432.
6. *Bandura A., Skaskiv O.* Analytic in an unit ball functions of bounded L-index in joint variables // Ukr. Mat. Visn. – 2017. – **14**, № 1. – P. 1 – 15.
7. *Bandura A., Skaskiv O.* Analytic functions in the unit ball. Bounded L-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. – Beau-Bassin: LAP Lambert Acad. Publ., 2017. – 100 p.
8. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Publ. I. E. Chyzhykov, 2016. – 128 p.
9. *Bandura A. I., Bordulyak M. T., Skaskiv O. B.* Sufficient conditions of boundedness of L-index in joint variables // Mat. Stud. – 2016. – **45**, № 1. – P. 12 – 26.
10. *Бандура А.* Нові критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій // Мат. вісн. Наук. т-ва ім. Т. Шевченка. – 2016. – **13**. – С. 58 – 67.
11. *Bandura A., Skaskiv O., Filevych P.* Properties of entire solutions of some linear PDE's // Appl J. Math. and Comput. Mech. – 2017. – **16**, № 2. – P. 17 – 28.
12. *Bandura A. I., Petrechko N. V., Skaskiv O. B.* Analytic functions in a polydisc of bounded L-index in joint variables // Mat. Stud. – 2016. – **46**, № 1. – P. 72 – 80.
13. *Bandura A.* Composition of entire functions and bounded L-index in direction // Mat. Stud. – 2017. – **47**, № 2. – P. 179 – 184.
14. *Bordulyak M. T.* On the growth of entire solutions of linear differential equations // Mat. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 219 – 223.
15. *Hayman W. K.* Differential inequalities and local valency // Pacif. J. Math. – 1973. – **44**, № 1. – P. 117 – 137.
16. *Krishna G. J., Shah S. M.* Functions of bounded indices in one and several complex variables // Math. essays dedicated to A. J. Macintyre. – Athens, Ohio: Ohio Univ. Press, 1970. – P. 223 – 235.
17. *Кушнір В. О.* Про аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – **58**. – С. 21 – 24.

18. *Кушнір В. О.* Аналітичні функції обмеженого l-індексу: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2002. – 132 с.
19. *Salmassi M.* Functions of bounded indices in several variables // Indian J. Math. – 1989. – **31**, № 3. – P. 249 – 257.
20. *Шеремета М. Н.* О целых функциях и рядах Дирихле ограниченного l-индекса // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 9. – С. 81 – 87.
21. *Sheremeta M.* Analytic functions of bounded index // Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.
22. *Sheremeta M.* On the l-index boundedness of some composition of functions // Mat. Stud. – 2017. – **47**, № 2. – P. 207 – 210.
23. *Nuray F., Patterson R. F.* Entire bivariate functions of exponential type // Bull. Math. Sci. – 2015. – **5**, № 2. – P. 171 – 177.
24. *Nuray F., Patterson R. F.* Multivalence of bivariate functions of bounded index // Matematiche. – 2015. – **70**, № 2. – P. 225 – 233.
25. *Patterson R., Nuray F.* A characterization of holomorphic bivariate functions of bounded index // Math. Slovaca. – 2017. – **67**, № 3. – P. 731 – 736.

Одержано 08.10.17