УДК 517.95

**І. І. Волянська, В. С. Ільків** (Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
**М. М. Симотюк** (Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, Львів)

# НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

The conditions of well-posedness of a nonlocal boundary-value problem are established for a second-order linear partial differential equation in an unbounded strip in the case where the real parts of the roots of its characteristic equation are different and nonzero.

Встановлено умови коректної розв’язності в необмеженій за просторовою змінною смузі задачі з нелокальними умовами для лінійного рівняння з частинними похідними другого порядку, корені характеристичного рівняння якого мають різні ненульові дійсні частини.

**1. Вступ.** Останнім часом дослідженню задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними приділяється велика увага. Це пов’язано з тим, що такі задачі є моделями процесів поширення тепла, вологопереносу у капілярно-пористих середовищах, дифузії частинок у турбулентній плазмі, обернених задач, а також задач математичної біології [3, 11, 12, 18]. Крім того, інтерес до вивчення задач із нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зумовлений потребою побудови загальної теорії крайових задач.

У роботах [7, 8, 10, 13, 17] встановлено умови коректної розв’язності задач із нелокальними умовами для окремих видів рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Що стосується рівнянь загального вигляду, то нелокальні задачі для них можуть виявитися некоректними. Зокрема, дослідження задач із нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях пов’язане з проблемою малих знаменників [1, 6, 9, 15]. Ця проблема полягає у тому, що знаменники коефіцієнтів рядів, якими зображуються розв’язки нелокальних задач, можуть бути як завгодно малими; це спричиняє розбіжність вказаних рядів у відповідних функціональних просторах. Для розв’язання проблеми малих знаменників у роботах [4, 5, 14, 16, 22, 23] використано метричний підхід та результати метричної теорії чисел. На підставі метричного підходу встановлено, що для майже всіх (щодо міри Лебега) параметрів нелокальних задач виконуються оцінки знизу для малих знаменників, які забезпечують збіжність рядів — розв’язків задач у просторах степеневого або експоненціального типу.

Обернені задачі з нелокальними умовами для лінійного параболічного рівняння другого порядку з однією просторовою змінною досліджено у роботі [3].

Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами вивчаються також і у необмежених областях. Зокрема, для конструктивної побудови розв’язків нелокальних задач у працях [24 – 26] застосовано диференціально-символьний метод відокремлення змінних. У працях [2, 19, 20] встановлено умови коректної розв’язності у смузі $\{(t,x): t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n\}$ нелокальних задач у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням при $|x| \to +\infty$. Значну роль при доведенні цих умов відіграє теорема Зайденберга – Тарського та її наслідки про структуру напівалгебраїчних множин у $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, додаток A у [21]).

У даній роботі виділено клас рівнянь другого порядку із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, для яких встановлено умови однозначної розв’язності нелокальних задач у просторах Соболєва. Цей клас рівнянь описується тим, що корені характеристичного многочлена мають різні ненульові дійсні частини. Для таких рівнянь проведено аналіз оцінок знизу характеристичних визначників нелокальних задач для звичайних диференціальних рівнянь, одержаних при застосуванні перетворення Фур'є. Наведено приклади нелокальних задач, які ілюструють отримані результати.

**2. Основні умовні позначення.** Будемо використовувати такі позначення: $\Pi(T) = \{(t,x) \in \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $\mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \geq 0$, — класичний простір Соболєва, який складається з таких функцій $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для яких $(1+\xi^2)^{\alpha/2}\tilde{\varphi}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, де $\tilde{\varphi}(\xi)$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Норма у просторі $\mathbf{H}_\alpha$ визначається рівністю

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 \, (1+\xi^2)^\alpha \, d\xi}.$$

Через $C^n([0,T], \mathbf{H}_\alpha)$, $\alpha \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо простір таких функцій $u(t,x) : \Pi(T) \to \mathbb{C}$, що похідні $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0,T]$ належать простору $\mathbf{H}_{\alpha - r}$ відповідно і неперервні на $[0,T]$ за змінною $t$ у цих просторах. Норму в просторі $C^n([0,T], \mathbf{H}_\alpha)$ визначаємо за формулою

$$\|u; C^n([0,T], \mathbf{H}_\alpha)\| = \sum_{r=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}; \mathbf{H}_{\alpha - r} \right\|.$$

**3. Формулювання задачі.** В області $\Pi(T)$ для рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} +$$
$$+ a_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in \Pi(T), \tag{3.1}$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, розглянемо задачу з нелокальними умовами

$$\begin{gathered} b_1 u(t,x)\Big|_{t=0} + c_1 u(t,x)\Big|_{t=T} = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial t} + b_3 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{t=0} + \left(c_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{t=T} = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

де $b_j, c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$. Будемо припускати, що рівняння (3.1) є таким, що корені $\lambda_1$, $\lambda_2$ многочлена $L(\lambda, i) = 0$ задовольняють умову

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \neq \operatorname{Re} \lambda_2, \quad \operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0. \tag{3.3}$$

Вважатимемо, що нумерація коренів $\lambda_1,\ \lambda_2$ є такою, що $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$. Умова (3.3) виконується, наприклад, якщо $a_1 = 0,\ a_2 = 1$, і порушується, якщо $a_1 = 0,\ a_2 = -1$. У першому випадку рівняння (3.1) є рівнянням Лапласа, у другому — рівнянням малих коливань струни.

Крім того, будемо припускати, що виконуються умови

$$b_1 b_2 \neq 0, \quad c_1 c_2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2\lambda_{3-q} + ib_3 & c_2\lambda_q + ic_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad q = 1, 2. \tag{3.4}$$

**Означення 3.1.** *Задачу* (3.1), (3.2) *будемо називати* $(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)$*-коректною* $(\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha \geq \geq 2)$, *якщо для довільних* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{\alpha_1},\ \varphi_2 \in \mathbf{H}_{\alpha_2}$ *у просторі* $C^2([0,T], \mathbf{H}_\alpha)$ *існує єдина функція* $u(t,x)$, *яка справджує рівняння* (3.1), *умови* (3.2) *і виконується нерівність*

$$\|u; C^2([0,T], \mathbf{H}_\alpha)\| \leq C\left(\|\varphi_1; \mathbf{H}_{\alpha_1}\| + \|\varphi_2; \mathbf{H}_{\alpha_2}\|\right),$$

*де стала* $C > 0$ *не залежить від вибору функцій* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$.

Метою даної роботи є встановлення умов, при виконанні яких задача (3.1), (3.2) є $(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)$-коректною. Ці умови наведено в теоремі 5.1, яка є основним результатом роботи.

**4. Побудова формального розв'язку.** Нехай $\tilde{u}(t,\xi),\ \tilde{\varphi}_1(\xi),\ \tilde{\varphi}_2(\xi)$ — перетворення Фур'є за змінною $x$ функцій $u(t,x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ відповідно. Застосовуючи до рівняння (3.1) та умов (3.2) перетворення Фур'є, отримуємо, що функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком нелокальної задачі з параметром $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2\tilde{u}(t,\xi)}{dt^2} + a_1(i\xi)\frac{d\tilde{u}(t,\xi)}{dt} + a_2(i\xi)^2\tilde{u}(t,\xi) = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} b_1\tilde{u}(0,\xi) + c_1\tilde{u}(T,\xi) = \tilde{\varphi}_1(\xi), \\ b_2\tilde{u}_t(0,\xi) + b_3(i\xi)\tilde{u}(0,\xi) + c_2\tilde{u}_t(T,\xi) + c_3(i\xi)\tilde{u}(T,\xi) = \tilde{\varphi}_2(\xi). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Нехай $f_1(t,\xi),\ f_2(t,\xi)$ — така фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (4.1), що $f_q^{(j-1)}(0,\xi) = \delta_{j,q},\ j,q = 1,2$, де $\delta_{j,q}$ — символ Кронекера. Зауважимо, що функції $f_1(t,\xi),\ f_2(t,\xi)$ є аналітичними за змінними $t, \xi$.

Розв'язок задачі (4.1), (4.2) зображується формулою

$$\tilde{u}(t,\xi) = C_1(\xi)f_1(t,\xi) + C_2(\xi)f_2(t,\xi),$$

де сталі $C_1(\xi), C_2(\xi)$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &(b_1 + c_1 f_1(T,\xi))\,C_1(\xi) + c_1 f_2(T,\xi)C_2(\xi) = \tilde{\varphi}_1(\xi), \\ &\big(b_3(i\xi) + c_2 f_1'(T,\xi) + c_3(i\xi)f_1(T,\xi)\big)\,C_1(\xi) + \\ &\qquad + \big(b_2 + c_2 f_2'(T,\xi) + c_3(i\xi)f_2(T,\xi)\big)\,C_2(\xi) = \tilde{\varphi}_2(\xi). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Позначимо через $\Delta(\xi)$ визначник системи (4.3):

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 f_1(T,\xi) & c_1 f_2(T,\xi) \\ i\xi b_3 + c_2 f_1'(T,\xi) + i\xi c_3 f_1(T,\xi) & b_2 + c_2 f_2'(T,\xi) + i\xi c_3 f_2(T,\xi) \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що $\Delta(0) = (b_1 + c_1)(b_2 + c_2)$.

Якщо виконується умова

$$\Delta(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

то задача (4.1), (4.2) має єдиний розв'язок

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{j,q=1}^{2} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} f_q(t,\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi),$$

де $\Delta_{j,q}(\xi)$ — алгебраїчне доповнення елемента, що стоїть на перетині $j$-го рядка та $q$-го стовпця у визначнику $\Delta(\xi)$.

Наведемо приклади задач, для яких умова (4.4) виконується або порушується.

***Приклад* 4.1.** Визначник $\Delta(\xi)$ задачі з нелокальними умовами

$$u(0,x) + u(T,x) = \varphi_1(x), \quad u_t(0,x) + u_t(T,x) = \varphi_2(x)$$

для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.5}$$

обчислюється за формулою

$$\Delta(\xi) = 4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{\xi T}{2}. \tag{4.6}$$

Оскільки, $\mathrm{ch}\,\dfrac{\xi T}{2} \geq 1$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то з формули (4.6) випливає, що для задачі (3.2), (4.5) умова (4.4) виконується, бо $\Delta(\xi) \geq 4,\ \xi \in \mathbb{R}$.

***Приклад* 4.2.** Якщо корені $\lambda_1, \lambda_2$ многочлена $L(\lambda, i)$ є дійсними, то для кожного $\xi \in \mathbb{R}$ визначник $\Delta(\xi)$ задачі з умовами

$$\mu u(0,x) + u(T,x) = \varphi_1(x), \quad \mu u_t(0,x) + u_t(T,x) = \varphi_2(x)$$

є відмінним від нуля, якщо $\mu \geq 0$. Дійсно, визначник $\Delta(\xi)$ цієї задачі обчислюється за формулою

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} (e^{\lambda_1 \xi T} + \mu)(e^{\lambda_2 \xi T} + \mu), & \xi \neq 0, \\ (\mu+1)^2, & \xi = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Оскільки $(e^{\lambda_1 \xi T} + \mu) > \mu$, $(e^{\lambda_2 \xi T} + \mu) > \mu$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то з формули (4.7) випливає, що при $\mu \geq 0$ для задачі (3.2), (4.5) умова (4.4) виконується, бо $\Delta(\xi) > 0,\ \xi \in \mathbb{R}$.

**5. Умови коректності задачі.** Дослідимо питання про належність функції

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(t,\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,q=1}^{2} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} f_q(t,\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi) e^{ix\xi} d\xi \tag{5.1}$$

простору $C^2([0,T], \mathbf{H}_\alpha)$, якщо $\Delta(\xi) \neq 0$ і $\varphi_1$, $\varphi_2$ належать шкалі просторів Соболєва $\mathbf{H}_\beta$, $\beta \geq 0$. Для цього встановимо оцінки для функцій $\tilde{u}(t,\xi)$ та їхніх похідних по $t$ до порядку 2 включно. Зауважимо, що

$$\tilde{u}(t,\xi) = T_1(t,\xi)\tilde{\varphi}_1(\xi) + T_2(t,\xi)\tilde{\varphi}_2(\xi), \tag{5.2}$$

де

$$T_1(t,0) = \frac{1}{b_1+c_1}, \quad T_2(t,0) = -\frac{c_1 T}{(b_1+c_1)(b_2+c_2)} + \frac{t}{b_2+c_2},$$

$$T_1(t,\xi) = \frac{\Gamma_{1,1}(\xi)e^{\lambda_1\xi t} + \Gamma_{1,2}(\xi)e^{\lambda_2\xi t}}{\Gamma(\xi)}, \quad \xi \neq 0,$$

$$T_2(t,\xi) = \frac{\Gamma_{2,1}(\xi)e^{\lambda_1\xi t} + \Gamma_{2,2}(\xi)e^{\lambda_2\xi t}}{\Gamma(\xi)}, \quad \xi \neq 0,$$

$\Gamma(\xi),\ \xi \neq 0,$ обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 e^{\lambda_1\xi T} & b_1 + c_1 e^{\lambda_2\xi T} \\ b_2\lambda_1\xi + b_3 i\xi + (c_2\lambda_1\xi + c_3 i\xi)e^{\lambda_1\xi T} & b_2\lambda_2\xi + b_3 i\xi + (c_2\lambda_2\xi + c_3 i\xi)e^{\lambda_2\xi T} \end{vmatrix},$$

$\Gamma_{j,q}(\xi),\ j,q=1,2,\ \xi\neq 0,$ — алгебраїчне доповнення елемента, що стоїть на перетині $j$-го рядка та $q$-го стовпця у визначнику $\Gamma(\xi)$.

Зазначимо, що $\Gamma(\xi) = (\lambda_2-\lambda_1)\xi\Delta(\xi),\ \xi\neq 0,$ тому умови $\Delta(\xi)\neq 0$ та $\Gamma(\xi)\neq 0$ при $\xi \neq 0$ є рівносильними.

**Лема 5.1.** *Нехай* $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \Gamma_{j,q}(\xi) \left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)} \right| \leq \begin{cases} C_1(1+|\xi|)^{r+2-j} e^{\operatorname{Re}(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi > 0, \\ C_2(1+|\xi|)^{r+2-j}, & \xi < 0, \end{cases}$$

*де* $j,\ q=1,2,\ r=0,1,2.$

***Доведення.*** Оскільки при $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$ і $q=1,2$ виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} |e^{\lambda_q\xi t}| \leq \begin{cases} e^{\operatorname{Re}\lambda_q\xi T}, & \xi > 0, \\ 1, & \xi < 0, \end{cases}$$

то, враховуючи, що

$$\Gamma_{2,q}(\xi) = (-1)^q (b_1 + c_1 e^{\lambda_{3-q}\xi T}), \quad q = 1,2,$$

$$\Gamma_{1,q}(\xi) = (-1)^{q-1}(b_2\lambda_{3-q}\xi + b_3 i\xi + (c_2\lambda_{3-q}\xi + c_3 i\xi)e^{\lambda_{3-q}\xi T}), \quad q=1,2,$$

для досить великих $|\xi|$ отримуємо

$$|\Gamma_{j,q}(\xi)| \leq \begin{cases} C_3(1+|\xi|)^{2-j} e^{\operatorname{Re}\lambda_{3-q}\xi T}, & q=1,2, \quad \xi > 0, \\ C_3(1+|\xi|)^{2-j}, & q=1,2, \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Отже, для $j,\ q=1,2,\ r=0,1,2$ маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\Gamma_{j,q}(\xi)\,(\lambda_q\xi)^r\, e^{\lambda_q\xi t}\right| \leq C_4(1+|\xi|)^{r+2-j} e^{\operatorname{Re}(\lambda_{3-q}+\lambda_q)\xi T}, \quad \xi > 0,$$

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\Gamma_{j,q}(\xi)\,(\lambda_q\xi)^r\, e^{\lambda_q\xi t}\right| \leq C_4(1+|\xi|)^{r+2-j}, \quad \xi < 0.$$

Лему доведено.

**Лема 5.2.** *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q \xi t}\right)^{(r)}\right| \le \begin{cases} C_5(1+|\xi|)^{r+2-j}, & \xi > 0, \\ C_5(1+|\xi|)^{r+2-j} e^{\operatorname{Re}(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi < 0, \end{cases}$$

*де* $j,\ q = 1, 2,\ r = 0, 1, 2$.

**Лема 5.3.** *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q \xi t}\right)^{(r)}\right| \le \begin{cases} C_6(1+|\xi|)^{r+2-j} e^{\operatorname{Re}\lambda_2 \xi T}, & \xi > 0, \\ C_6(1+|\xi|)^{r+2-j} e^{\operatorname{Re}\lambda_1 \xi T}, & \xi < 0, \end{cases}$$

*де* $j,\ q = 1, 2,\ r = 0, 1, 2$.

Доведення лем 5.2 та 5.3 проводиться аналогічно доведенню леми 5.1.

**Лема 5.4.** *Нехай* $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$ *і виконується умова* (3.4). *Тоді існує таке число* $R_1 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_1$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \ge \begin{cases} C_7(1+|\xi|) e^{\operatorname{Re}(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi > R_1, \\ C_7(1+|\xi|), & \xi < -R_1. \end{cases} \tag{5.3}$$

***Доведення.*** Визначник $\Gamma(\xi)$ є квазімногочленом за змінною $\xi$ і має вигляд

$$\Gamma(\xi) = b_1 b_2 \xi(\lambda_2-\lambda_1) + \xi e^{\lambda_1 \xi T} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2\lambda_1 + c_3 i & b_2\lambda_2 + b_3 i \end{vmatrix} +$$

$$+\xi e^{\lambda_2 \xi T} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2\lambda_1 + b_3 i & c_2\lambda_2 + c_3 i \end{vmatrix} + c_1 c_2 \xi(\lambda_2-\lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, \tag{5.4}$$

показники експонент якого дорівнюють числам $0,\ \lambda_1 T,\ \lambda_2 T,\ (\lambda_1+\lambda_2)T$. Оскільки $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$, то при $\xi > 0$ домінуючим доданком у формулі (5.4) є доданок $c_1 c_2 \xi(\lambda_2-\lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}$, а при $\xi < 0$ — доданок $b_1 b_2 \xi(\lambda_2-\lambda_1)$.

Враховуючи умови (3.4), отримуємо оцінку (5.3).

Доведення наступних двох лем є аналогічним доведенню леми 5.4.

**Лема 5.5.** *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ *і виконується умова* (3.4). *Тоді існує таке число* $R_2 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_2$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \ge \begin{cases} C_8(1+|\xi|), & \xi > R_2, \\ C_8(1+|\xi|) e^{\operatorname{Re}(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi < -R_2. \end{cases}$$

**Лема 5.6.** *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_2$ *і виконується умова* (3.4). *Тоді існує таке число* $R_3 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_3$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \ge \begin{cases} C_9(1+|\xi|) e^{\operatorname{Re}\lambda_2 \xi T}, & \xi > R_3, \\ C_9(1+|\xi|) e^{\operatorname{Re}\lambda_1 \xi T}, & \xi < -R_3. \end{cases}$$

Тепер ми можемо встановити основний результат про існування єдиного розв'язку задачі (3.1), (3.2).

**Теорема 5.1.** *Якщо виконуються умови* (3.3), (3.4), (4.4), *то для всіх* $\alpha \geq 2$, $\alpha_1 \geq \alpha$, $\alpha_2 \geq \alpha - 1$ *задача* (3.1), (3.2) *є* $(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)$*-коректною.*

***Доведення.*** Оскільки справджуються умови (3.3), (3.4), то з формули (5.2) та з лем 5.1 – 5.6 випливає, що існує число $R_4 > 0$ таке, що для всіх $\xi, |\xi| > R_4$, виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^r T_j(t,\xi)}{dt^r} \right| \leq C_{10}(1+|\xi|)^{r+1-j}, \quad j=1,2, \quad r=0,1,2. \tag{5.5}$$

Згідно з умовою (4.4), визначник $\Delta(\xi)$ відмінний від нуля для всіх $\xi \in \mathbb{R}$. Оскільки $\Delta(\xi)$ є неперервною функцією параметра $\xi$, то існує така стала $C_{11} > 0$, що $|\Delta(\xi)| \geq C_{11} > 0$ для всіх $\xi \in [-R_4; R_4]$. Тому оцінки (5.5) справджуються і для $|\xi| \leq R_4$.

Тоді з формул (5.1), (5.2), (5.5) маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}; \mathbf{H}_{\alpha-r} \right\|^2 \leq C_{12} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_1(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2r} (1+|\xi|)^{2\alpha-2r} d\xi +$$

$$+ C_{13} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_2(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2r-2} (1+|\xi|)^{2\alpha-2r} d\xi =$$

$$= C_{12} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_1(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2\alpha} d\xi + C_{13} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_2(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2\alpha-2} d\xi =$$

$$= 2\pi C_{12} \left\| \varphi_1(x); \mathbf{H}_\alpha \right\|^2 + 2\pi C_{13} \left\| \varphi_2(x); \mathbf{H}_{\alpha-1} \right\|^2, \quad r = 0,1,2. \tag{5.6}$$

Із оцінок (5.6) та означення норми у просторі $C^2([0,T], \mathbf{H}_\alpha)$ отримуємо нерівності

$$\|u(t,x); C^2([0,T], \mathbf{H}_\alpha)\| = \sum_{r=0}^{2} \max_{t\in[0,T]} \left\| \partial^r u(t,x)/\partial t^r; \mathbf{H}_{\alpha-r} \right\| \leq$$

$$\leq C_{14} \|\varphi_1(x); \mathbf{H}_{\alpha_1}\| + C_{14} \|\varphi_2(x); \mathbf{H}_{\alpha_2}\|,$$

які справджуються у випадку, коли $\alpha_1 \geq \alpha$, $\alpha_2 \geq \alpha - 1$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що теорема 5.1 залишається істинною і для випадку, коли показники $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha$ є від'ємними, важливим є збереження нерівностей $\alpha_1 \geq \alpha$, $\alpha_2 \geq \alpha - 1$.

**Висновки.** Отримані у статті результати можна перенести на випадок задач із нелокальними умовами для рівнянь із молодшими членами та рівнянь порядку вищого за 2.

## Література


1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 6, № 114. – С. 91 – 192.
2. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Мат. заметки. – 1990. – **8**, № 1. – С. 20 – 25.
3. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами // Доп. НАН України. – 1997. – № 5. – С. 15 – 21.

4. *Ільків В. С.* Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 498 – 502.
5. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624 – 1650.
6. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763 – 766.
7. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292 – 296.
8. *Матійчук М. І.* Про нелокальну параболічну крайову задачу // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 362 – 367.
9. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1963. – **23.** – С. 179 – 238.
10. *Нахушев А. М.* Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядку на плоскости // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 1. – С. 192 – 195.
11. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72 – 81.
12. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
13. *Нахушев А. М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1995. – **21**, № 1. – С. 95 – 101.
14. *Пташник Б. Й., Власій О. Д.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 3. – С. 370 – 381.
15. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
16. *Савка І. Я.* Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною // Карпат. мат. публ. – 2010. – **2**, № 2. – С. 101 – 110.
17. *Савченко Г. Б.* О корректности одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1450 – 1453.
18. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925 – 1935.
19. *Фардигола Л. В.* Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 662 – 671.
20. *Фардигола Л. В.* О нелокальной двухточечной краевой задаче в слое для уравнения с переменными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 2. – С. 424 – 438.
21. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
22. *Il'kiv V. S.* Incorrect nonlocal boundary value problem for partial differential equations // North-Holland Math. Stud. – 2004. – **197(C)**. – P. 115 – 121.
23. *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Y.* Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lame' equations in the space of almost periodic functions // Electron. J. Different. Equat. – 2016. – **304**.
24. *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, № 1. – P. 1 – 15.
25. *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, № 3. – P. 293 – 304.
26. *Malanchuk O., Nytrebych Z.* Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Math. – 2017. – **15**, № 1. – P. 101 – 110.
27. *Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M.* The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. – 2017. – **224**, № 4. – P. 541 – 554.

Одержано 01.12.17,
після доопрацювання — 17.08.18