УДК 517.5, 539.3

С. В. Грищук (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОМУТАТИВНІ КОМПЛЕКСНІ АЛГЕБРИ ДРУГОГО РАНГУ З ОДИНИЦЕЮ ТА ДЕЯКІ ВИПАДКИ ПЛОСКОЇ ОРТОТРОПІЇ. II*

For an algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}$, $e^2 = \omega^2 = e$, $e\omega = \omega e = \omega$, over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, we consider arbitrary bases (e, e_2), such that $e + 2pe_2^2 + e_2^4 = 0$ for any fixed $p > 1$. We study $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions $\Phi(xe + ye_2) = U_1(x, y)e + U_2(x, y)ie + U_3(x, y)e_2 + U_4(x, y)ie_2$ such that their real-valued components U_k, $k = \overline{1, 4}$, satisfy the equation for the stress function u in the case of orthotropic plane deformations $\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$; here, x and y are real variables. All functions Φ for which $U_1 \equiv u$ are described in the case of a simply connected domain. Particular solutions of the equilibrium system of equations in displacements are found in the form of linear combinations of the components U_k, $k = \overline{1, 4}$, of the function Φ for some plane orthotropic media.

Для алгебри $\mathbb{B}_0 = \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}$, $e^2 = \omega^2 = e$, $e\omega = \omega e = \omega$, над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ розглядаються базиси $(e, e_2) \in \mathbb{B}_0$ такі, що $e + 2pe_2^2 + e_2^4 = 0$ для кожного фіксованого $p > 1$. Досліджуються $\mathbb{B}_0$-значні „аналітичні" функції $\Phi(xe+ye_2) = U_1(x, y)e+U_2(x, y)ie+U_3(x, y)e_2+U_4(x, y)ie_2$ такі, що їх дійснозначні компоненти U_k, $k = \overline{1, 4}$, задовольняють рівняння для знаходження функції напружень u у випадку плоских ортотропних деформацій $\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$, де x, y — дійсні змінні. Описано всі функції Φ, для яких $U_1 \equiv u$ у випадку однозв'язності області. Для певних випадків ортотропії знайдено часткові розв'язки системи рівнянь рівноваги у зміщеннях у вигляді лінійних комбінацій компонент U_k, $k = \overline{1, 4}$, функції Φ.

Дана стаття є продовженням роботи [1] і має спільні з нею позначення, нумерацію пунктів та формул.

7. Зображення розв'язку рівняння (1) в обмеженій однозв'язній області у вигляді компонент моногенних функцій у площині $\mu_\pm$. Нехай базис $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^+$ визначається випадком (23) або (24), а D є обмеженою і однозв'язною областю декартової площини xOy.

Покажемо, що кожна функція $u(x, y)$, яка задовольняє рівняння (1) в області D, є першою компонентою $U_1(\Phi_\pm)$ деякої моногенної функції $\Phi_\pm$ у відповідній області $D_\zeta^\pm$, та опишемо всі такі моногенні функції.

Згідно з теоремою 3, справджуються рівності

$$\Phi_\pm(\zeta) = (F_1)_\pm\big(Z_1^\pm\big)\mathcal{I}_1 + (F_2)_\pm\big(Z_2^\pm\big)\mathcal{I}_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta^\pm, \tag{47}$$

де $(F_k)_\pm$ — деяка голоморфна функція комплексної змінної $Z_k^\pm = x + y\beta_k^\pm$ в області $D_{Z_k^\pm}$ при $k = 1, 2$ відповідно, при цьому β_k^+ і β_k^- пов'язані співвідношеннями (33). Зауважимо, що кожна пара чисел (β_1^+, β_2^+), (β_1^-, β_2^-) визначає два різні не спряжені корені рівняння (9). Більш того,

$$\big\{\big(\beta_1^+, \beta_2^+\big)\big\} = \big\{(s_1, s_2),\, (s_2, s_1)\big\}, \qquad \big\{\big(\beta_1^-, \beta_2^-\big)\big\} = \big\{(\overline{s_1}, \overline{s_2}), (\overline{s_2}, \overline{s_1})\big\},$$
$$\ker l_p(s, 1) = \big\{\beta_1^+, \beta_2^+, \beta_1^-, \beta_2^-\big\},$$

де s_k, $k = 1, 2$, визначаються рівностями (11).

* Частково підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528) та грантом № 32/2018 між академіями наук України та Польщі (проект „Аналоги комплексного аналізу у диференціальних рівняннях, геометрії та фізичних застосуваннях").

З урахуванням (38), (23) і (24) ідемпотентний базис $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ має такий розклад за базисом $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{\pm}$:

$$\mathcal{I}_k = \hat{\alpha}_k^{\pm} e_1 + \hat{\beta}_k^{\pm} e_2, \quad k = 1, 2, \tag{48}$$

де

$$\hat{\alpha}_1^+ = \frac{p_2}{p_2 - p_1}, \qquad \hat{\beta}_1^+ = \frac{i}{p_2 - p_1}, \qquad \hat{\alpha}_2^+ = -\frac{p_1}{p_2 - p_1}, \qquad \hat{\beta}_2^+ = -\hat{\beta}_1^+, \tag{49}$$

або

$$\hat{\alpha}_1^+ = \frac{p_1}{p_1 - p_2}, \qquad \hat{\beta}_1^+ = \frac{i}{p_1 - p_2}, \qquad \hat{\alpha}_2^+ = -\frac{p_2}{p_1 - p_2}, \qquad \hat{\beta}_2^+ = -\hat{\beta}_1^+, \tag{50}$$

$$\hat{\alpha}_k^- = \hat{\alpha}_k^+, \qquad \hat{\beta}_k^- = -\hat{\beta}_k^+, \quad k = 1, 2, \tag{51}$$

де $\hat{\alpha}_k^+$, $\hat{\beta}_k^+$, $k = 1, 2$, визначаються так само, як і в (49) або (50).

Далі, замінюючи, без обмеження загальності, у рівності (47) функції $F_k^{\pm}\big(Z_k^{\pm}\big)$ на $\dfrac{F_k^{\pm}\big(Z_k^{\pm}\big)}{\hat{\alpha}_k^{\pm}}$, $k = 1, 2$, і враховуючи при цьому співвідношення $\dfrac{\hat{\beta}_k^{\pm}}{\hat{\alpha}_k^{\pm}} = \beta_k^{\pm}$, $k = 1, 2$, і (48), одержуємо зображення моногенної функції $\Phi_{\pm} : D_{\zeta}^{\pm} \longrightarrow \mathbb{B}_0$ у базисі $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{\pm}$:

$$\Phi_{\pm}(\zeta) = \Big((F_1)_{\pm}\big(Z_1^{\pm}\big) + (F_2)_{\pm}\big(Z_2^{\pm}\big)\Big)e_1 + \Big(\beta_1^{\pm}(F_1)_{\pm}\big(Z_1^{\pm}\big) + \beta_2^{\pm}(F_2)_{\pm}\big(Z_2^{\pm}\big)\Big)e_2 \quad \forall \zeta \in D_{\zeta}^{\pm}. \tag{52}$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 2. *Будь-яка моногенна у* $D_{\zeta}^{\pm}$ *функція* $(\Phi_{1,0})_{\pm} := \Phi_{\pm}$ *з* (26), *перша компонента якої* $U_1\big[(\Phi_{1,0})_{\pm}\big] \equiv 0$, *має вигляд*

$$(\Phi_{1,0})_{\pm}(\zeta) = -\frac{\pm 2a\, i}{\sqrt{2(p+1)}}\,\zeta^2 + \left(k - \frac{\pm 2b}{\sqrt{2(p+1)}} e_2\right) i\zeta + nie_1 + ce_2 + mie_2, \tag{53}$$

де $a,\ b,\ c,\ k,\ m,\ n$ — *довільні дійсні сталі.*

Доведення. Тотожність

$$(\Phi_{1,0})_{\pm}(\zeta) = \left(-\frac{\pm 2}{\sqrt{2(p+1)}}\Big(a(x^2+y^2) + by\Big) + kx + n\right) ie_1 + \Big(2ay^2 + 2by + c\Big)e_2 +$$

$$+ \left(-\frac{\pm 2x}{\sqrt{2(p+1)}}\Big(2ay + b\Big) + ky + m\right) ie_2 \quad \forall \zeta \in D_{\zeta}^{\pm}, \tag{54}$$

де $a,\ b,\ c,\ k,\ m,\ n$ — довільні дійсні сталі, встановлюється аналогічно доведенню леми 3 роботи [2] з урахуванням рівностей (28) – (31).

Підставляючи у (54) рівності

$$\left(x^2+y^2\right)e_1+2xye_2=\zeta^2-\pm i\sqrt{2(p+1)}\,y^2\,e_2,\qquad ye_1+xe_2=\Big(\zeta-\pm i\sqrt{2(p+1)}\,y\Big)e_2,$$

що є наслідками співвідношень (12), (22), одержуємо рівність (53).

Лему 2 доведено.

Як відомо (див., наприклад, [3 – 6]), загальний розв'язок рівняння (1) в області D має вигляд

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left((F_1)_\pm\left(Z_1^\pm\right)+(F_2)_\pm\left(Z_2^\pm\right)\right)\quad\forall(x,y)\in D,\tag{55}$$

де $(F_k)_\pm\left(Z_k^\pm\right),\ k=1,2,$ мають той же сенс, що і в (47).

Зафіксуємо $u(x,y)$, тоді в рівності (52) з $(\Phi_u)_\pm:=\Phi_\pm$ беремо ті ж $(F_k)_\pm\left(Z_k^\pm\right),\ k=1,2,$ що і в (55). Як наслідок, одержуємо рівність

$$U_1\left[(\Phi_u)_\pm(\zeta)\right]=u(x,y)\quad\forall\zeta\in D_\zeta^\pm.\tag{56}$$

Беручи до уваги лему 2 і рівність (56), одержуємо теорему, що описує всі моногенні функції $\Phi_\pm$ такі, що $U_1\left[\Phi_\pm(\zeta)\right]=u(x,y)$.

Теорема 4. *Кожна функція $u(x,y)$, що задовольняє рівняння* (1) *в обмеженій і однозв'язній області декартової площини xOy, є першою компонентою $U_1\left[\Phi_\pm(\zeta)\right]$ моногенної в $D_\zeta^\pm$ функції*

$$\Phi_\pm(\zeta)=(\Phi_u)_\pm(\zeta)+(\Phi_{1,0})_\pm(\zeta)\quad\forall\zeta\in D_\zeta^\pm.\tag{57}$$

8. Зображення зміщень у випадку плоскої ортотропії через компоненти моногенних функцій. Для ортотропних плоских деформацій, породжених узагальненим законом Гука (46) з відповідними тензорами напружень та деформацій, функції зміщень $u(x,y)$ і $v(x,y)$ задовольняють систему рівнянь рівноваги у випадку відсутності масових сил (див. [4, с. 74] з $X=Y=Z=\overline{\rho}=0$, де модулі пружності одержуємо при ототожненні коефіцієнтів системи (46) і системи (3.9) з [4, с. 26]):

$$\begin{gathered}\frac{1}{1-(a_{12})^2}\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{1}{2\,(p-a_{12})}\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}+\\+\left(-\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2}+\frac{1}{2\,(p-a_{12})}\right)\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial x\partial y}=0,\\\frac{1}{2\,(p-a_{12})}\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial^2x^2}+\frac{1}{1-(a_{12})^2}\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial y^2}+\\+\left(-\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2}+\frac{1}{2\,(p-a_{12})}\right)\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x\partial y}=0\quad\forall(x,y)\in D.\end{gathered}\tag{58}$$

Нехай окрім співвідношення (46) для a_{12} виконується нерівність

$$a_{12}\neq p-\sqrt{p^2-1}.\tag{59}$$

Тоді систему (58) записуємо в еквівалентній формі

$$\begin{gathered}B_{11}\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial x\partial y}=0,\\B_{21}\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2v(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x\partial y}=0\quad\forall(x,y)\in D,\end{gathered}\tag{60}$$

де

$$B_{11} = B_{22} := \frac{2\,(p - a_{12})}{(a_{12})^2 - 2pa_{12} + 1}, \qquad B_{12} = B_{21} := \frac{1 - (a_{12})^2}{(a_{12})^2 - 2pa_{12} + 1}. \tag{61}$$

У роботі [7] стверджується, що у загальному випадку ортотропних плоских деформацій функції зміщень u і v задовольняють систему вигляду (60) з дійсними B_{mn}, $m, n = 1, 2$, які визначаються узагальненим законом Гука для довільного випадку плоскої ортотропії. Проте випадок (45) показує, що для нього крім співвідношень (61) між пружними сталими B_{mn}, $m, n = 1, 2$, повинні виконуватися співвідношення (46), (59) для a_{12}, при цьому (59) безпосередньо не випливає з узагальненого закону Гука (45).

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\widetilde{B}_{11}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \widetilde{B}_{12}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y} = 0,\\ &\widetilde{B}_{21}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \widetilde{B}_{22}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{62}$$

де $\widetilde{B}_{mn} \neq 0$ — дійсні числа, а $u, v\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ — шукані функції.

Лема 3. *Нехай мають місце такі співвідношення між коефіцієнтами* $\widetilde{B}_{mn}$, $m, n = 1, 2$, *системи* (62):

$$\widetilde{B}_{mn} \neq 0, \quad m, n = 1, 2, \qquad \widetilde{B}_{12}\widetilde{B}_{22} = \widetilde{B}_{11}\widetilde{B}_{21}, \qquad \widetilde{B}_{11}\widetilde{B}_{22} + \widetilde{B}_{12}\widetilde{B}_{21} - 2p\widetilde{B}_{11}\widetilde{B}_{21} - 1 = 0. \tag{63}$$

Тоді кожна функція-компонента з розв'язку (u, v) *системи* (62) *задовольняє рівняння* (1).

Доведення. З умов (63) і нерівності $p \neq 0$ випливають співвідношення

$$C_1 := -\widetilde{B}_{11}\widetilde{B}_{21} \neq 0, \qquad C_2 := 1 - \widetilde{B}_{11}\widetilde{B}_{22} - \widetilde{B}_{12}\widetilde{B}_{21} \neq 0, \qquad C_3 := -\widetilde{B}_{12}\widetilde{B}_{22} \neq 0. \tag{64}$$

Нехай (u, v) — довільний розв'язок системи (62). З першого рівняння системи (62) маємо

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = -\widetilde{B}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \widetilde{B}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Далі діючи оператором диференціювання $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ на обидві частини другого рівняння системи (62) і підставляючи знайдене співвідношення для $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, одержуємо рівність

$$C_1\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + C_2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + C_3\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \quad \forall (x,y) \in D. \tag{65}$$

На підстави співвідношень (64) одержуємо, що для того, щоб кожен розв'язок рівняння (65) був розв'язком рівняння (1), необхідно і достатньо, щоб мали місце пропорційні співвідношення

$$C_1 : C_2 : C_3 = 1 : 2p : 1,$$

які приводять до співвідношень (63) і перетворюють рівняння (65) на рівняння (1). Отже, при виконанні умов (63) функція u задовольняє рівняння (1).

У випадку другого рівняння системи (62) міркування аналогічні таким для першого рівняння при доведенні того, що функція u задовольняє рівняння (1). В результаті одержуємо, що функція v задовольняє рівняння (1).

Лему 3 доведено.

***Зауваження* 4.** У роботі [7] наведено без доведення результат, аналогічний лемі 3, однак там умови (63) не містять обмеження $\widetilde{B}_{mn} \neq 0,\ m,n = 1,2$, яким, як ми бачили при доведенні леми, не можна нехтувати, оскільки, наприклад, у протилежному випадку не виконуються співвідношення (64).

Лема 4. *Нехай виконуються нерівності* (46), (59). *Кожна функція-зміщення з пари зміщень* (u, v), *що є розв'язком системи* (60), *задовольняє рівняння* (1).

Доведення. Покажемо, що система (60) є системою типу (62) з $\widetilde{B}_{mn} := B_{mn},\ m,n = 1,2$. Доведемо виконання співвідношень (63) для даної заміни. Величини $B_{mn} \neq 0,\ m,n = 1,2$, згідно з (46). Друге співвідношення з (63) є справедливим, оскільки мають місце формули (61).

Третє співвідношення з (63) з огляду на (61) рівносильне рівності

$$\big(1 - a_{12}^2\big)^2 + \big(2(a_{12} - p)\big)^2 + 4p(a_{12} - p)\big(1 - a_{12}^2\big) = \big(a_{12}^2 - 2pa_{12} + 1\big)^2. \tag{66}$$

Вводячи позначення

$$A = 1 - a_{12}^2, \qquad B = 2(a_{12} - p), \tag{67}$$

записуємо (66) у вигляді

$$A^2 + B^2 + 2pAB = (a_{12}B + A)^2.$$

Далі розкриваємо праву частину, групуємо квадратні тричлени і ділимо обидві частини на B^2. В результаті одержуємо рівність

$$1 - a_{12}^2 = 2(a_{12} - p)\frac{A}{B}. \tag{68}$$

Тепер, підставляючи у (68) замість A та B вирази з (67), отримуємо числову тотожність.

Отже, всі умови леми 3 виконано, що й завершує доведення леми 4.

Теорема 5. *Нехай функція* (26) *є моногенною в області* $D_\zeta^{\pm}$, $\alpha_k,\ k = \overline{1,4}$, *— довільні дійсні числа, а* $\beta_k,\ k = \overline{1,4}$, *пов'язані з ними лінійними співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \pm\sqrt{2(p+1)}B_{11}\alpha_2 - (B_{11} + B_{12})\alpha_3,\\
\beta_2 &= -\Big(\pm\sqrt{2(p+1)}\Big)B_{11}\alpha_1 - (B_{11} + B_{12})\alpha_4,\\
\beta_3 &= -(B_{11} + B_{12})\,\alpha_1 - \Big(\pm\sqrt{2(p+1)}\Big)B_{12}\alpha_4,\\
\beta_4 &= -(B_{11} + B_{12})\alpha_2 \pm \sqrt{2(p+1)}B_{12}\alpha_3,
\end{aligned} \tag{69}$$

функції u *і* v *є лінійними комбінаціями компонент* $(U_k)_\pm,\ k = \overline{1,4}$, *функції* (26) *вигляду*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k (U_k)_\pm(x,y), \qquad v(x,y) = \sum_{k=1}^{4} \beta_k (U_k)_\pm(x,y). \tag{70}$$

Тоді впорядкована пара функцій (u, v) *задовольняє систему* (60) *в області* D.

Доведення. Підставляючи рівності вигляду (70) з шуканими дійсними коефіцієнтами α_k, $\beta_k,\ k=\overline{1,4}$, в перше рівняння системи (60), одержуємо співвідношення

$$\sum_{k=1}^{4}\left(B_{11}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{12}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\beta_k\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(U_k)_\pm(x,y)=0\quad\forall(x,y)\in D. \tag{71}$$

З рівностей (28) – (31) випливають співвідношення між похідними другого порядку для компонент $(U_k)_\pm=(U_k)_\pm(x,y),\ k=\overline{1,4}$:

$$\frac{\partial^2(U_1)_\pm}{\partial y^2}=\frac{\partial^2(U_1)_\pm}{\partial x^2}-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial x^2}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial^2(U_2)_\pm}{\partial y^2}=\frac{\partial^2(U_2)_\pm}{\partial x^2}\pm\sqrt{2(p+1)}\,\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial x^2}, \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial y^2}=-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial^2(U_2)_\pm}{\partial x^2}-(2p+1)\,\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial x^2}, \tag{74}$$

$$\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial y^2}=\pm\sqrt{2(p+1)}\,\frac{\partial^2(U_1)_\pm}{\partial x^2}-(2p+1)\,\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial x^2}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial^2(U_1)_\pm}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2(U_2)_\pm}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial x^2}, \tag{76}$$

$$\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(U_1)_\pm}{\partial x^2}-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial x^2}, \tag{77}$$

$$\frac{\partial^2(U_4)_\pm}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(U_2)_\pm}{\partial x^2}\pm\sqrt{2(p+1)}\,\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial x^2}. \tag{78}$$

Доведемо, для прикладу, рівність (74). Використовуючи послідовно рівності (30), (28) і (31) та застосовуючи довільність порядку диференціювання у мішаних похідних, одержуємо ланцюжок рівностей

$$\frac{\partial^2(U_3)_\pm}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(U_3)_\pm}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(U_1)_\pm}{\partial x}-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial(U_4)^\pm}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(U_1)_\pm}{\partial y}-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial(U_4)_\pm}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(U_3)_\pm}{\partial x}-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\left(\frac{\partial(U_2)_\pm}{\partial x}\pm\sqrt{2(p+1)}\,\frac{\partial(U_3)_\pm}{\partial x}\right)\right)=$$

$$=-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\frac{\partial(U_2)_\pm}{\partial x^2}-(2p+1)\frac{\partial(U_3)_\pm}{\partial x^2}.$$

З урахуванням (72) – (78) записуємо співвідношення (71) у вигляді

$$0=\sum_{k=1}^{4}\left(B_{11}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{12}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\beta_k\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(U_k)_\pm(x,y)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{4}a_k\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}\frac{\partial(U_k)_\pm(x,y)}{\partial x^2}, \tag{79}$$

де

$$a_1\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\} = (B_{11}+B_{12})\,\alpha_1 \pm \sqrt{2(p+1)}B_{12}\alpha_4 + \beta_3,$$

$$a_2\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\} = (B_{11}+B_{12})\,\alpha_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{12}\alpha_3 + \beta_4,$$

$$a_3\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\} =$$

$$= \pm\sqrt{2(p+1)}B_{12}\alpha_2 + (B_{11}-(2p+1)B_{12})\,\alpha_3 + \beta_1 \pm \sqrt{2(p+1)}\beta_4,$$

$$a_4\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\} =$$

$$= -\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{12}\alpha_1 + (B_{11}-(2p+1)B_{12})\,\alpha_4 + \beta_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\beta_3.$$

Тоді для виконання (79) у кожній точці області D достатньо покласти рівними нулю коефіцієнти при $\dfrac{\partial^2 (U_k)_\pm(x,y)}{\partial x^2}$, $k=\overline{1,4}$, що приводить до таких співвідношень між α_k, β_m, $k,m\in\{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
&(B_{11}+B_{12})\,\alpha_1 \pm \sqrt{2(p+1)}B_{12}\alpha_4 + \beta_3 = 0,\\
&(B_{11}+B_{12})\,\alpha_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{12}\alpha_3 + \beta_4 = 0,\\
&\pm\sqrt{2(p+1)}B_{12}\alpha_2 + (B_{11}-(2p+1)B_{12})\,\alpha_3 + \beta_1 \pm \sqrt{2(p+1)}\beta_4 = 0,\\
&-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{12}\alpha_1 + (B_{11}-(2p+1)B_{12})\,\alpha_4 + \beta_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\beta_3 = 0.
\end{aligned} \tag{80}$$

Виражаючи з (80), β_k, $k=\overline{1,4}$, одержуємо співвідношення (69).

Для другого рівняння системи (60), як і при доведенні (71), одержуємо співвідношення

$$0 = \sum_{k=1}^{4}\left(B_{21}\beta_k\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22}\beta_k\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(U_k)_\pm(x,y) \quad \forall (x,y)\in D. \tag{81}$$

З урахуванням (72)–(78) записуємо співвідношення (81) у вигляді

$$0 = \sum_{k=1}^{4}\left(B_{21}\beta_k\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22}\beta_k\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(U_k)_\pm(x,y) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{4} a_k\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}\frac{\partial^2 (U_k)_\pm(x,y)}{\partial x^2}. \tag{82}$$

Тоді для виконання (82) у кожній точці області D достатньо покласти рівними нулю коефіцієнти при $\dfrac{\partial^2 (U_k)_\pm(x,y)}{\partial x^2}$, $k=\overline{1,4}$, що приводить до таких співвідношень між α_k, β_m, $k,m\in\{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
&(B_{21}+B_{22})\,\beta_1 \pm \sqrt{2(p+1)}\,B_{22}\beta_4 + \alpha_3 = 0,\\
&(B_{21}+B_{22})\,\beta_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{22}\beta_3 + \alpha_4 = 0,\\
&\pm\sqrt{2(p+1)}B_{22}\beta_2 + (B_{21}-(2p+1)B_{22})\,\beta_3 + \alpha_1 \pm \sqrt{2(p+1)}\alpha_4 = 0,\\
&-\left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)B_{22}\beta_1 + (B_{21}-(2p+1)B_{22})\,\beta_4 + \alpha_2 - \left(\pm\sqrt{2(p+1)}\right)\alpha_3 = 0.
\end{aligned} \tag{83}$$

Легко встановлюємо, що елементи $\beta_k,\ k=\overline{1,4}$, з (69) задовольняють співвідношення (83).

Теорему 5 доведено.

Зауважимо, що твердження, аналогічне доведеній теореми, встановлено у роботі [7] для базису (12) та системи (62) з довільними дійсними $B_{km} := \widetilde{B}_{km},\ k,m=1,2$, що задовольняють співвідношення з (63) без $\widetilde{B}_{mn}\neq 0,\ m,n=1,2$.

Формули вираження зміщень u і v в ізотропному середовищі через лінійні комбінації компонент моногенних функцій $\Phi: D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ встановлено у роботах [8, 9].

Враховуючи, що матриця коефіцієнтів відносно змінних $\alpha_k,\ k=\overline{1,4}$, з (69) є оборотною, що встановлюється на підставі нерівностей (46), $p>1$ і співвідношення (59), отримуємо таку теорему.

Теорема 6. *Нехай функція* (26) *є моногенною в області* $D_\zeta^{\pm}$, $\beta_k,\ k=\overline{1,4}$, *— довільні дійсні числа*, $\alpha_k=\sum_{k=1}^{4} b_{k,j}\beta_j$, *де*

$$b_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{2(p+1)}}{B_{11}^2-2pB_{11}B_{12}+B_{12}^2},\qquad b_{1,3}=-\frac{B_{11}+B_{12}}{B_{11}^2-2pB_{11}B_{12}+B_{12}^2},$$

$$b_{1,1}=b_{1,4}=b_{2,2}=b_{2,3}=b_{3,2}=b_{3,3}=b_{4,1}=b_{4,4}=0,$$

$$b_{2,1}=-b_{1,2},\qquad b_{2,4}=b_{1,3},\qquad b_{3,1}=b_{1,3},$$

$$b_{3,4}=-\frac{B_{12}}{B_{11}}\,b_{1,2},\qquad b_{4,2}=b_{1,3},\qquad b_{4,3}=-b_{3,4},$$

а функції u *і* v *є лінійними комбінаціями компонент* $(U_k)_\pm,\ k=\overline{1,4}$, *функції* (26) *вигляду*

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k(U_k)_\pm(x,y),\qquad v(x,y)=\sum_{k=1}^{4}\beta_k(U_k)_\pm(x,y).$$

Тоді впорядкована пара функцій (u,v) *задовольняє систему* (60) *в області* D.

Література

1. *Грищук С. В.* Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 8. – С. 1058 – 1071.
2. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1587 – 1596.
3. *Фридман М. М.* Математическая теория упругости анизотропных сред // Прикл. математика и механика. – 1950. – **14**, № 3. – С. 321 – 340.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды // Тр. Сейсм. ин-та АН СССР. – 1938. – № 86. – С. 51 – 78.
6. *Боган Ю. А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 17 – 26.
7. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Алгебры функционально-инвариантных решений p-бигармонического уравнения. – Киев, 1991. – 15 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 91.10).
8. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические потенциалы и плоские изотропные поля смещений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 229 – 231.
9. *Грищук С. В.* Гіперкомплексні моногенні функції бігармонічної змінної в деяких задачах плоскої теорії пружності // Доп. НАН України. – 2015. – № 6. – С. 7 – 12.

Одержано 04.10.17