УДК 514.132, 515.124

А. В. Костин (Казан. федер. ун-т, Елабуж. ин-т, Россия)

ЗАДАЧА О ТЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

We consider the problem of shadow in a hyperbolic space. This problem can be regarded as a problem of finding conditions guaranteeing that points belong to a generalized convex hull of the family of balls.

Розглядається задача про тінь у гіперболічному просторі. Цю задачу можна розглядати як задачу про знаходження умов, що забезпечують належність точок узагальнено опуклій оболонці сім’ї куль.

1. Задача о тени в евклидовом пространстве. Последние исследования Ю. Б. Зелинского были связаны с задачей о тени [1 – 7]. В используемой в работах Ю. Б. Зелинского и его учеников формулировке задача о тени впервые была рассмотрена Г. Худайбергановым в статье [8] (см. также [1]):

какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере n-мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров.

Полное решение этой задачи (далее — задача 1) дано в работе [2]. В ней, в частности, показано, что для этого достаточно $n+1$ шара. В работах [1, 3, 9] сформулированы различные обобщения этой задачи. В одном из них центр сферы заменяется на произвольные точки шара, ограниченного сферой, которые лежат вне выбранных шаров с центрами на сфере (далее — задача 2). В таком виде результат известен только для евклидовой плоскости (см. [2]). В этом случае имеет место очевидное утверждение для более широкого множества точек.

Лемма 1. *Рассмотрим равносторонний треугольник на евклидовой плоскости. Если выбрать три замкнутых круга с центрами в вершинах этого треугольника и радиуса, равного половине высоты треугольника, то каждая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения трех этих кругов до их выпуклой оболочки, пересекается не менее чем с одним из этих кругов.*

Многие утверждения из статьи [1] могут быть перенесены в гиперболическое пространство. Целью предлагаемой работы является получение гиперболических аналогов некоторых из них. Утверждение из леммы 1 в расширенной постановке задачи о тени (задачи о тени не только для центра 1-сферы) имеет формулировку, допускающую наиболее естественное обобщение на плоскости Лобачевского. Это отражено в теоремах 1 – 3 данной работы. В них будут указаны условия, при которых любая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения замкнутых гиперболических кругов разного типа до их выпуклой оболочки, пересекается хотя бы с одним из этих кругов. В теореме 4 дается решение задачи 2 для замкнутых шаров равного радиуса, центры которых расположены на окружности произвольного радиуса на плоскости Лобачевского. Параметры (радиусы или соответствующие расстояния) для открытых кругов всех типов могут быть выбраны сколь угодно мало отличающимися от замкнутых. Задача о тени для центра сферы также допускает разные варианты обобщения в гиперболическом пространстве в зависимости от того, состоит сфера из собственных, бесконечно удаленных или идеальных точек. В теоремах 5 – 7 содержатся метрические характеристики, обеспечивающие принадлежность точки выпуклой 1-оболочке семейства замкнутых шаров разного типа n-мерного гиперболического пространства.

2. Задача о тени на гиперболической плоскости. В работе [8] доказано, что для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр окружности на евклидовой плоскости, пересекала хотя бы один круг с центром на данной окружности (или, иными словами, чтобы центр окружности принадлежал выпуклой 1-оболочке кругов [1]), достаточно двух кругов. Другое доказательство этого утверждения дано в работе [2]. Это доказательство можно распространить и на гиперболическую плоскость. Приведем основные шаги с указанием отличий, связанных со спецификой гиперболической плоскости. Для кругов B_1 и B_2 с центрами на окружности S рассматриваются общая „внутренняя" касательная l_1, по отношению к которой круги лежат в разных полуплоскостях, и „внешняя" касательная l_2, по отношению к которой круги лежат в одной полуплоскости. Выбирается положение, которое в условиях задачи определяет верхнюю грань расстояний от центра окружности S до прямой l_1, и даются оценки для радиусов кругов B_1 и B_2. Верхняя грань (недостижимая при выполнении условий задачи 1) определяется положением, когда радиус большего круга равен радиусу окружности S, круги B_1 и B_2 касаются, а прямая l_2 проходит через центр окружности S. Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ радиус окружности S равен R, радиусы кругов B_1 и B_2 равны r_1 и r_2 соответственно, $R \geq r_1 \geq r_2$, и круги B_1 и B_2 касаются один другого. Расстояние d от центра окружности S до общей внешней касательной l_2 равно $\rho \operatorname{arsh}\left(\operatorname{ch}\dfrac{R}{\rho}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{r_1-r_2}{\rho}}{\operatorname{ch}\dfrac{r_1+r_2}{\rho}}\right)$. Верхняя грань его соответствует значению $r_1 = R$. При этом r_2 определяется из уравнения

$$\left(4\operatorname{th}^2\frac{R}{\rho}-1\right)\operatorname{sh}^2\frac{r_2}{\rho} - 4\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\operatorname{sh}\frac{r_2}{\rho} + \operatorname{sh}^2\frac{r_2}{\rho} = 0.$$

Если $\operatorname{th}\dfrac{R}{\rho} = \dfrac{1}{2}$, то $r_2 = \rho\operatorname{arsh}\left(\dfrac{1}{4}\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}\right)$. В других случаях

$$r_2 = \rho\operatorname{arsh}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}\left(2-\sqrt{5-4\operatorname{th}^2\dfrac{R}{\rho}}\right)}{4\operatorname{th}^2\dfrac{R}{\rho}-1}.$$

Если линейные размеры фигур малы по сравнению с радиусом кривизны, то отсюда получим евклидовы оценки для радиуса второго круга и расстояния от центра окружности S до прямой l_1: $r_2 = R\big(\sqrt{5}-2\big)$, $d = \dfrac{R\big(3-\sqrt{5}\,\big)}{2}$. Далее, немного уменьшив радиус круга B_1 и чуть раздвинув центры кругов B_1 и B_2, но так, чтобы прямая l_1 все еще не проходила через центр, получим, что на плоскости Лобачевского для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр окружности, пересекала хотя бы один замкнутый (открытый) круг с центром на данной окружности, также достаточно двух кругов.

На евклидовой плоскости вследствие наличия подобия задачу о тени для центра окружности и для всех точек внутри нее достаточно решить при условии равенства радиуса окружности единице. На плоскости Лобачевского, особенно для задачи 2, нужно учитывать радиус окружности S.

Аналогом леммы 1 на плоскости Лобачевского будет следующее утверждение, в котором под выпуклой оболочкой кругов понимается минимальное выпуклое (в традиционном смысле) множество, содержащее эти круги.

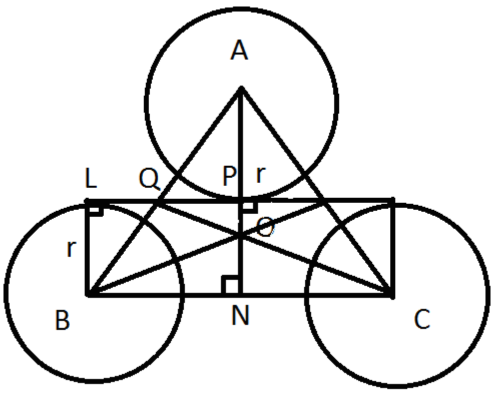
Теорема 1. *Пусть ABC — правильный треугольник с радиусом описанной окружности R на плоскости Лобачевского кривизны $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$. Пусть B_i, $i = 1, 2, 3,$ — замкнутые круги с центрами в вершинах этого треугольника, радиусы r которых удовлетворяют соотношению*

$$\operatorname{th}\frac{r}{\rho} = \frac{3\operatorname{sh}\dfrac{2R}{\rho}}{8 + 6\operatorname{sh}^2\dfrac{R}{\rho}}.$$

Тогда каждая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения объединения трех этих кругов $\bigcup\limits_{i=1}^{3} B_i$ до их выпуклой оболочки, пересекается не менее чем с одним из этих кругов.

Доказательство утверждения базируется на следующем факте из абсолютной геометрии:

чтобы любая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения трех замкнутых кругов с центрами в вершинах правильного треугольника до их выпуклой оболочки, пересекалась хотя бы с одним из кругов, нужно, чтобы радиусы r этих кругов определялись из условия касания прямой LP всех кругов (см. рисунок).



Конфигурация кругов наименьшего радиуса, создающих тень.

Точнее, этим условием определяется нижняя грань радиусов кругов, создающих тень. Далее применяются стандартные теоремы гиперболической тригонометрии.

Нетрудно видеть, что если линейные размеры фигур будут малы по сравнению с радиусом кривизны гиперболической плоскости, то радиусы кругов r будут асимптотически эквивалентны $3/4R$, т. е. в пределе мы, как и следовало ожидать, получаем евклидову зависимость между радиусами кругов, создающих тень, и радиусом описанной окружности треугольника ABC.

***Замечание* 1.** Аналогичная теорема может быть доказана и в сферической геометрии.

Подобно тому, как в гиперболическом пространстве расширяется область действия „педальных” свойств фигур [10], так и предложенная Г. Худайбергановым постановка задачи о тени и ее вариации, предложенные Ю. Б. Зелинским, в гиперболическом пространстве допускают естественные обобщения. В соответствии с этим на плоскости Лобачевского мы получим следующие аналоги теоремы 1. Часть плоскости Лобачевского, ограниченную орициклом, следуя [11], будем называть орикругом. Аналогичную терминологию будем использовать и в других случаях.

Теорема 2. *Пусть* A, B, C *— три бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского,* ω_1, ω_2, ω_3 *— три замкнутых орикруга с центрами в точках* A, B, C *соответственно, удаленные от центра треугольника* ABC (*центра вращения третьего порядка*) *на расстояние* $d = \dfrac{\rho}{2}\ln\dfrac{5}{3}$. *Тогда каждая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения объединения трех этих орикругов* $\bigcup\limits_{i=1}^{3}\omega_i$ *до их выпуклой оболочки, пересекается не менее чем с одним из этих орикругов.*

Доказательство этой теоремы можно легко получить как по аналогии с доказательством теоремы 1, так и предельным переходом, устремляя длину стороны правильного треугольника к бесконечности. При доказательстве первым способом нужно только учесть, что угол между прямыми, проходящими через центр треугольника перпендикулярно сторонам, будет углом параллельности отрезка перпендикуляра от центра к стороне. Описанная окружность треугольника ABC в данном случае заменяется абсолютом гиперболической плоскости. Она не лежит в выпуклой оболочке трех орикругов и, вообще, любого конечного или счетного числа орикругов. Но в выпуклой оболочке трех орикругов лежит окружность радиуса, равного расстоянию от центра треугольника с бесконечно удаленными вершинами до общей внешней касательной пары орикругов (границы выпуклой оболочки).

Рассмотрим случай, когда вершины правильного треугольника ABC на расширенной гиперболической плоскости уйдут в идеальную область (см. [12]) так, что стороны останутся гиперболическими. Тогда в собственной области стороны и поляры вершин образуют шестипрямоугольник — шестиугольник, все углы которого прямые. Сам треугольник ABC попрежнему будем называть правильным. Множество точек, ограниченных ветвью эквидистанты и ее базой, будем называть эквикругом. В этом случае мы получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* A, B, C *— идеальные вершины правильного гиперболического треугольника. Пусть* b *— расстояние от центра треугольника до его сторон,* h *— параметр эквидистант поляр вершин треугольника* ABC *и*

$$\operatorname{cth}\frac{h}{\rho} = \frac{3}{4}\operatorname{sh}\frac{2b}{\rho}.$$

Тогда каждая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения объединения трех этих замкнутых эквикругов $\bigcup\limits_{i=1}^{3}\varepsilon_i$, *ограниченных эквидистантами, до их выпуклой оболочки, пересекается не менее чем с одним из этих эквикругов.*

Доказательство утверждения аналогично доказательству теоремы 1. „Описанная окружность” треугольника ABC в условиях теоремы 3 является эквидистантой эллиптической прямой идеальной области плоскости Лобачевского. Граничные эквидистанты эквикругов в собственной области плоскости Лобачевского могут также рассматриваться как окружности с центрами в идеальных вершинах треугольника ABC. Впрочем, это утверждение может быть сформулировано и без обращения к идеальной области. В выпуклой оболочке трех эквикругов лежит окружность с центром в центре треугольника и радиусом, равным расстоянию от центра до общей внешней касательной пары эквикругов.

На евклидовой плоскости в условиях леммы 1 окружность, описанная около треугольника, всегда лежит в выпуклой оболочке трех кругов, вне зависимости от радиуса этой окружности. На плоскости Лобачевского картина существенно отличается от евклидовой. В теореме 1 указано нижнее значение радиусов замкнутых кругов, создающих тень для любой точки выпуклой оболочки. Радиусы открытых кругов могут быть сколь угодно близки к указанному значению. Выясним, при каких значениях радиуса R описанной окружности эта окружность будет лежать в выпуклой оболочке кругов, создающих тень. Для замкнутых кругов радиус R не должен превышать расстояние от точки O — центра окружности S — до общей внешней касательной пары кругов, создающих тень. Последнее расстояние будет равно сумме расстояний ON и PN на рисунке. Но удобнее провести оценку способом, применимым для любого числа кругов, создающих тень. Пусть B_1, C_1 — точки касания внешней касательной к кругам с центрами в точках B и C. На луче ON отложим отрезок OE длины R. От его конца E проведем отрезок EF так, чтобы четырехугольник $OEFB$ был двупрямоугольником (см. [13]) с прямыми углами E и F. Четырехугольник ON_1B_1B, где N_1 — точка пересечения луча ON с B_1C_1, также является двупрямоугольником. Если при этом BF будет не больше r, описанная окружность будет лежать в выпуклой оболочке замкнутых кругов, создающих тень. В четырехугольнике $OBEF$ имеем

$$\operatorname{sh}\frac{BE}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{OF}{\rho}\operatorname{ch}\frac{OB}{\rho} - \operatorname{ch}\frac{OF}{\rho}\operatorname{sh}\frac{OB}{\rho}\cos(BOF).$$

Отсюда $\operatorname{sh}\dfrac{BE}{\rho} = \dfrac{1}{4}\operatorname{sh}\dfrac{2R}{\rho}$. Потребовав, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{BE}{\rho}}{\operatorname{sh}\dfrac{r}{\rho}} \leq 1,$$

получим $\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ch}\dfrac{R}{\rho} \leq \sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Увеличивая радиусы кругов, создающих тень, можно увеличить и верхнюю границу радиуса описанной окружности. Верхняя граница для r определяется половиной длины стороны треугольника. При этом $\operatorname{sh}\dfrac{r}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}$. Аналогично предыдущему, для непересекающихся кругов имеем $\operatorname{ch}\dfrac{R}{\rho} < \sqrt{3}$. Обобщая эти рассуждения, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть радиус окружности S на плоскости Лобачевского удовлетворяет условию*

$$\rho \operatorname{arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(n-1)}\right) \leq R < \rho \operatorname{arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right), \quad n \geq 3.$$

Тогда для того, чтобы окружность S принадлежала выпуклой оболочке непересекающихся кругов равного радиуса с центрами на S и меньшего, чем R, необходимо и достаточно n кругов. Если n — нечетно и не меньше трех, то при $R < \operatorname{arch}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}\right)$ для того, чтобы *любая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения кругов B_i с центрами на окружности S до содержащей S их выпуклой оболочки, пересекалась хотя бы с одним из кругов, достаточно n кругов.*

Доказательство. Достаточно расположить n кругов с центрами в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусами, чуть меньшими половины стороны многоугольника. Верхняя грань радиусов кругов r равна половине длины стороны правильного n-угольника. Следовательно, верхняя грань определяется из условия $\operatorname{sh}\frac{r}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\sin\frac{\pi}{n}$. С другой стороны, радиус должен быть больше, чем боковая сторона двупрямоугольника, построенного по аналогии с двупрямоугольником $OEFB$ выше. Пусть t — длина отрезка, соответствующего отрезку BE при таком построении. Тогда

$$\operatorname{sh}\frac{t}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{\rho}}{\operatorname{sh}\frac{r}{\rho}} \le 1,$$

получаем $\operatorname{ch}\frac{R}{\rho} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$. Отсюда следует первая часть утверждения. Вторая часть, с учетом этой оценки, очевидна.

***Замечание* 2.** Если n четно и не менее 4, то при $R < \rho \operatorname{arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right)$ достаточно n кругов при условии, что их радиусы могут быть разными.

3. Задача о тени для центра сферы в гиперболическом пространстве. Одной из базовых конструкций для решения задачи о тени в евклидовом пространстве в работе [2] является набор шаров с центрами в вершинах правильного симплекса и радиусами, равными половине длины ребра симплекса. В связи с этим в гиперболическом пространстве рассмотрим три аналога этой конструкции. Во всех случаях первоначально есть одно нарушение условий исходной постановки задачи — шары касаются один другого.

Теорема 5. *Пусть в n-мерном гиперболическом пространстве кривизны $K = -\frac{1}{\rho^2}$ дана сфера S^{n-1} радиуса R. Пусть при этом B_i, где $i = 1, \ldots, n+1$, — замкнутые шары радиуса r с центрами в вершинах правильного n-симплекса, вписанного в сферу S^{n-1}, такие, что*

$$\operatorname{sh}\frac{r}{\rho} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}.$$

Тогда каждая прямая, проходящая через центр сферы, пересекается не менее чем с одним из этих шаров.

Доказательство следует из того, что r будет равен половине длины ребра правильного n-симплекса, вписанного в сферу радиуса R.

Для правильного гиперболического тетраэдра радиусы шаров, создающих тень, и радиус описанного шара будут связаны соотношением

$$\operatorname{sh}\frac{r}{\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}.$$

Заметим, что для собственного правильного n-симплекса гиперболического пространства радиус описанной сферы при изменении длины ребра может принимать все возможные положительные действительные значения, в то время как радиус вписанной сферы может принимать значения от 0 до $\dfrac{\rho}{2}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$. Отсюда следует, что радиусы вписанных сфер всех симплексов гиперболических пространств с ростом размерности стремятся к нулю. Аналогичное свойство имеется и у гиперболических кубов.

Если вершины правильного n-симплекса уйдут в бесконечность, то шары с центрами в вершинах перейдут в оришары, а их граничные сферы — в орисферы.

Теорема 6. *Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_n+1$ — замкнутые предельные шары (оришары) с несобственными центрами в вершинах n-симплекса, такие, что расстояние d от центра O n-симплекса до граничных орисфер удовлетворяет условию*

$$\operatorname{sh}\frac{d}{\rho}=\frac{\sqrt{2}(n-1)}{4\sqrt{n(n+1)}}.$$

Тогда каждая прямая, проходящая через центр многогранника, пересекается не менее чем с одним из этих предельных шаров.

Доказательство этого утверждения можно получить из предыдущей конфигурации предельным переходом. Для этого надо выразить расстояние от центра сферы до шара, создающего тень, и устремить радиус сферы к бесконечности.

В случае трехмерного асимптотического тетраэдра (тетраэдра с бесконечно удаленными вершинами) расстояние d от центра до орисфер с несобственными центрами в вершинах тетраэдра будет удовлетворять условию

$$\operatorname{sh}\frac{d}{\rho}=\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Если вершины правильного n-симплекса уйдут в идеальную область, то грани и поляры вершин образуют $2(n+1)$-гранник, $n+1$ грань которого является правильным $(n-1)$-симплексом.

Сам исходный симплекс, как и прежде, будем называть правильным.

Теорема 7. *Пусть h — параметр (высота) эквидистантных поверхностей поляр идеальных вершин правильного n-симплекса, b — расстояние от центра многогранника до ребра, и $\operatorname{cth}\dfrac{h}{\rho}=\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\operatorname{sh}\dfrac{b}{\rho}$. Тогда каждая прямая, проходящая через центр многогранника, пересекается не менее чем с одним из замкнутых эквишаров, ограниченных эквидистантными поверхностями.*

Доказательство этого утверждения также проводится с использованием стандартных теорем гиперболической тригонометрии с учетом того, что углы между лучами, идущими от центра к вершинам, и лучами, идущими от центра перпендикулярно ребрам, совпадают с соответствующими углами в правильном евклидовом симплексе.

В трехмерном случае высота эквидистанты плоскости связана с расстоянием от центра до ребра следующим образом:

$$\operatorname{cth}\frac{h}{\rho}=\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}.$$

Грани и поляры идеальных вершин тетраэдра образуют октаэдр, четыре грани которого являются правильными треугольниками, а четыре оставшиеся — шестипрямоугольники.

Доказательство достаточности для создания тени $n+1$ шара без общих точек из работы [2], основанное на семействе шаров с центрами в вершинах правильного симплекса, остается в силе и в гиперболическом пространстве. Нужно только сделать оговорки для случаев, не имеющих места в евклидовом пространстве. Для эквишаров вместо изменений радиусов меняются их высоты. В трехмерном гиперболическом пространстве для создания тени в центре сферы будет достаточно четырех шаров или эквишаров, не имеющих общих точек. Центры их лежат на сфере, состоящей соответственно из собственных и идеальных точек. Ситуация с оришарами особая. При малых шевелениях оришаров их центры образуют симплекс, близкий к исходному, в двумерном пространстве даже изометричный, с вершинами в новых бесконечно удаленных точках. Сами оришары, создающие тень, изометричны, как и все оришары гиперболического пространства. В этом случае, в отличие от двух других, определен только центр вписанной сферы симплекса. Центр же такой „сферы" из бесконечно удаленных точек не определен. В двух других случаях при малых изменениях радиусов шаров или эквишаров (высот, ограничивающих их эквидистантных поверхностей) многогранники также будут близки к исходным. Поэтому около них будут описываться собственные или идеальные сферы тех же типов.

Литература

1. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К.* Задача о тени и смежные задачи // Proc. Intern. Geom. Center. – 2016. – **9**, № 3-4. – P. 50 – 58.
2. *Выговская И. Ю., Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1658 – 1666.
3. *Зелінський Ю. Б., Стефанчук М. В.* Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 757 – 762.
4. *Zelinskii Y. B.* Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow // J. Math. Sci. – 2015. – **211**, № 5. – P. 710 – 717.
5. *Zelinskii Y. B.* Problem of shadow (complex case) // Adv. Math.: Sci. J. – 2016. – **5**, № 1. – P. 1 – 5.
6. *Zelinskii Y. B.* The problem of the shadows // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź. – 2016. – **66**. – P. 37.
7. *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**. – С. 197 – 204.
8. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // ВИНИТИ. – 1982. – **21.** — С. 1772 – 1785.
9. *Осипчук Т. М., Ткачук М. В.* Задача о тени для областей в евклидовых пространствах // Укр. мат. вісн. – 2016. – **13**, № 4. – С. 532 – 542.
10. *Kostin A. V., Sabitov I. K.* Smarandache theorem in hyperbolic geometry // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2014. – **10**, № 2. – P. 221 – 232.
11. *Кайдасов Ж., Шикин Е. В.* Об изометрическом погружении в E^3 выпуклой области плоскости Лобачевского, содержащей два орикруга // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 4. – С. 612 – 617.
12. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
13. *Несторович Н. М.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. – 304 с.

Получено 06.02.18