УДК 517.925.51; 681.5.03

О. Г. Мазко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО РІВНЯ ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ

We establish necessary and sufficient conditions for the validity of the upper bounds for the performance criteria of linear descriptor systems characterizing the weighted damping level of external and initial disturbances. The verification of these conditions is reduced to solving matrix equations and inequalities. The main statements are formulated with an aim of their subsequent application in the problems of robust stabilization and in the H_∞-optimization problems for descriptor control systems.

Встановлено необхідні та достатні умови виконання верхніх оцінок для критеріїв якості лінійних дескрипторних систем, що характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Перевірка даних умов зводиться до розв'язування матричних рівнянь та нерівностей. Основні твердження сформульовано з метою їх подальшого застосування в задачах робастної стабілізації та H_∞-оптимізації дескрипторних систем керування.

1. Вступ. У сучасній теорії керування розвиваються і широко застосовуються методи H_∞-оптимізації систем, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги та мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів (див., наприклад, [1 – 6]). Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних та дискретних систем керування з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. У [7 – 11] застосовувались більш загальні критерії якості, які характеризують зважений рівень гасіння як зовнішніх, так і початкових збурень, що обумовлені невідомими ненульовими значеннями початкового вектора. Введення вагових коефіцієнтів в узагальнених критеріях якості дає можливість встановити пріоритети між компонентами векторів виходу, зовнішніх і початкових збурень [7, 12, 13].

Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на умовах виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь та нерівностей (твердження типу „bounded real lemmas" [5, 14, 15]). Для класу лінійних дескрипторних (диференціально-алгебраїчних) систем аналогічні умови встановлено в [16 – 18]. Такі системи часто виникають при дослідженні динаміки складних об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо [19 – 22].

Слід зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу неперервних та дискретних систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створено достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [23].

Дану роботу присвячено задачам оцінювання впливу зовнішніх і початкових збурень на якість лінійних дескрипторних систем. Розглядаються зважені критерії якості таких систем відносно вектора виходу і проводиться їх оцінювання методом квадратичних функцій Ляпунова. В результаті умови виконання заданих верхніх оцінок для даних критеріїв якості подаються у вигляді ЛМН та додаткових рангових обмежень на матричні коефіцієнти.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — симетрична додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+, \mathrm{i}_-, \mathrm{i}_0\}$ — інерція симетричної матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень з урахуванням кратності; $\sigma(\cdot)$ — спектр матриці (в'язки матриць); $\|x\|_Q$ — зважена L_2-норма векторної функції $x(t)$.

2. Зважений рівень гасіння початкових збурень. Розглянемо лінійну дескрипторну систему

$$E\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану і виходу, $E,\ A$ і C — сталі матриці відповідних розмірів, причому в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ є *регулярною*, тобто $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наведемо відомі властивості регулярної в'язки матриць [24]. У випадку $\operatorname{rank} E = \rho < n$ канонічна форма Вейєрштрасса в'язки $F(\lambda)$ має вигляд

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array}\right], \tag{2.2}$$

де L і R — невироджені матриці, A_1 — $(r \times r)$-матриця, власні значення якої утворюють скінченний спектр $\sigma(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, а N — деяка нільпотентна матриця індексу ν. При цьому в'язка $F(\lambda)$ (або відповідна система (2.1)) має r скінченних динамічних мод, $n - \rho$ нединамічних і $\rho - r$ імпульсивних мод [25].

Регулярну в'язку матриць $F(\lambda)$ при відсутності імпульсивних мод ($\rho = r$) будемо називати *неімпульсивною*. В цьому випадку в (2.2) $N = 0$ і $\nu = 1$. Скрізь у подальших викладках в'язка матриць $F(\lambda)$ є *стійкою*, тобто $\sigma(F) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda \colon \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, і $\nu = 0$, якщо $\rho = n$. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і неімпульсивна.

Із (2.2) випливають такі зображення матриць:

$$E = L^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} R^{-1}, \qquad A = L^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} R^{-1}. \tag{2.3}$$

Із урахуванням (2.3) введемо матриці

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega} F^{-1}(\lambda)\, d\lambda = R\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \tag{2.4}$$

$$E_j = \begin{cases} E, & \nu \le j, \\ EZE, & \nu > j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \tag{2.5}$$

де ω — замкнений контур, що охоплює спектр $\sigma(F)$. Матриця Z є єдиним розв'язком максимального рангу r алгебраїчної системи [7]

$$AZE = EZA, \qquad Z = ZEZ,$$

а числа r і ν можна знайти у вигляді

$$r = \operatorname{rank}\Delta_\alpha^\nu, \qquad \nu = \min\left\{k \in \mathbb{N} \colon \operatorname{rank}\Delta_\alpha^k = \operatorname{rank}\Delta_\alpha^{k+1}\right\},$$

де $\Delta_\alpha = F^{-1}(\alpha)E,\ \alpha \notin \sigma(F)$ і $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Із (2.3) і (2.4) випливає критерій неімпульсивності в'язки матриць $F(\lambda)$.

Лема 2.1. *В'язка матриць $F(\lambda)$ неімпульсивна тоді і лише тоді, коли виконується рівність $EZE = E$.*

Лема 2.2 [18]. *В'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою тоді і лише тоді, коли для деякої матриці U*

$$E^\top U = U^\top E \geq 0, \qquad A^\top U + U^\top A < 0.$$

Застосувавши в (2.1) невироджене перетворення $x = R_1 x_1 + R_2 x_2$, де $R = \big[R_1, R_2\big]$, $x_1 \in \mathbb{R}^r$ і $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, отримаємо $x_2 \equiv 0$ і підсистему

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1, \qquad y = C_1 x_1, \qquad x_1(0) = x_{01}, \tag{2.6}$$

де $C_1 = CR_1$. Тому для довільного початкового вектора $x_0 \in \mathcal{X}$ система (2.1) має єдиний розв'язок $x(t) \in \mathcal{X}$, де $\mathcal{X} = \operatorname{Im} R_1 \subseteq \mathbb{R}^r$. Нульовий розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий, якщо $\sigma(A_1) \subset \mathbb{C}^-$.

Введемо критерій якості системи (2.1):

$$J_1 = \sup_{x_0 \in \mathcal{X}, x_0 \neq 0} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{x_0^\top X_0 x_0}}, \qquad \|y\|_Q^2 = \int\limits_0^\infty y^\top Q y \, dt, \tag{2.7}$$

де $\|y\|_Q$ — зважена L_2-норма вектор-функції $y(t)$, а $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деякі вагові матриці. Зокрема, якщо покласти

$$X_0 = E^\top H E, \qquad H = L^\top \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix} L, \tag{2.8}$$

або

$$X_0 = E_1^\top H E_1 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{2.9}$$

де $H = H^\top > 0$ — задана матриця, а матриця E_1 визначена в (2.5), то $x_0^\top X_0 x_0 = x_{01}^\top H_1 x_{01}$ і

$$J_1 = \sup_{x_{01} \neq 0} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{x_{01}^\top H_1 x_{01}}}$$

є характеристикою підсистеми (2.6), яка описує зважений рівень впливу початкових збурень на вихід y. У випадку $\nu \leq 1$ матриці (2.8) і (2.9) збігаються між собою. Значення x_0, при якому досягається супремум у (2.7), є *найгіршим* відносно введеного критерію якості.

Наступні твердження дають необхідні і достатні умови виконання верхніх оцінок $J_1 \leq \gamma$ і $J_1 < \gamma$ із заданим значенням $\gamma > 0$, які дозволяють обчислити характеристику J_1 як розв'язок оптимізаційної задачі при обмеженнях у вигляді ЛМН.

Лема 2.3. *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН*

$$A^\top X E + E^\top X A + C^\top Q C \leq 0, \tag{2.10}$$

$$0 \leq E^\top X E \leq \gamma^2 X_0, \tag{2.11}$$

то $J_1 \leq \gamma$. Навпаки, якщо $J_1 \leq \gamma$, виконуються умови (2.9) *і*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E_2 \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E_2, \tag{2.12}$$

то лінійне матричне рівняння

$$A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC = 0 \tag{2.13}$$

має розв'язок $X = X^\top$, *що задовольняє співвідношення* (2.11).

Лема 2.4. *Нехай вагову матрицю* X_0 *задано у вигляді* (2.9). *Тоді виконується строга оцінка* $J_1 < \gamma$, *якщо система співвідношень* (2.10), (2.11) *і*

$$\operatorname{rank} Y = r, \qquad Y = E^\top XE - \gamma^2 X_0, \tag{2.14}$$

сумісна відносно $X = X^\top$. *Навпаки, якщо* $J_1 < \gamma$ *і виконується умова* (2.12), *то матричне рівняння* (2.13) *має розв'язок* $X = X^\top$, *що задовольняє співвідношення* (2.11) *і* (2.14).

Доведення лем 2.3 і 2.4. Використаємо квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top E^\top XEx$. Якщо $X = X^\top$ задовольняє ЛМН (2.10) і (2.11), то

$$\dot v(x) + y^\top Qy = x^\top (A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC)\, x \le 0,$$

$$\int\limits_0^\tau \big(\dot v(x) + y^\top Qy\big)\, dt = v(x(\tau)) - v(x_0) + \int\limits_0^\tau y^\top Qy\, dt \le 0,$$

де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x)$ в силу системи (2.1). Оскільки $v(x) \ge 0$ і $v(x(\tau)) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то

$$\|y\|_Q^2 \le v(x_0) = x_0^\top E^\top XEx_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \qquad x_0 \in \mathcal{X},$$

тобто $J_1 \le \gamma$. Якщо при цьому покласти

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L, \qquad E^\top XE = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 N \\ N^\top X_2^\top & N^\top X_3 N \end{bmatrix} R^{-1},$$

то за умов леми 2.4 будемо мати

$$E^\top XE = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \qquad Y = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 - \gamma^2 H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \le 0, \tag{2.15}$$

причому $0 \le X_1 < \gamma^2 H_1$ і $X_1 < (\gamma - \varepsilon)^2 H_1$ для деякого малого $\varepsilon > 0$. Тоді

$$\|y\|_Q^2 \le v(x_0) = x_{01}^\top X_1 x_{01} \le (\gamma - \varepsilon)^2 x_{01}^\top H_1 x_{01}, \qquad x_{01} \in \mathbb{R}^r,$$

тобто виконується строга оцінка $J_1 < \gamma$.

Нехай $J_1 \le \gamma$ і матриця X_0 має вигляд (2.9). Матричне рівняння (2.13) зводиться до трьох незалежних рівнянь

$$A_1^\top X_1 + X_1 A_1 + C_1^\top QC_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$A_1^\top X_2 N + X_2 + C_1^\top QC_2 = 0, \tag{2.17}$$

$$X_3 N + N^\top X_3 + C_2^\top Q C_2 = 0, \tag{2.18}$$

де $\begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix} = CR$. Якщо $\sigma(A_1) \subset \mathbb{C}^-$, то рівняння Ляпунова (2.16) має єдиний розв'язок $X_1 \geq 0$. Рангове обмеження (2.12) означає, що $C_2 = GN$, де G — деяка матриця, або $C_2 = 0$. У першому випадку $N^2 = 0$ і рівняння (2.17), (2.18) задовольняють відповідні матриці

$$X_2 = -C_1^\top QGN, \qquad X_3 = -\frac{1}{2}(G^\top QGN + N^\top G^\top QG). \tag{2.19}$$

При цьому виконуються співвідношення (2.15) і

$$\|y\|_Q^2 = -\int\limits_0^\infty x_1^\top (A_1^\top X_1 + X_1 A_1)\, x_1\, dt = -\int\limits_0^\infty \frac{dv(x)}{dt}\, dt =$$

$$= x_{01}^\top X_1 x_{01} \leq \gamma^2 x_{01}^\top H_1 x_{01}, \quad x_{01} \in \mathbb{R}^r.$$

Остання нерівність буде строгою для довільного вектора $x_{01} \neq 0$, якщо $J_1 < \gamma$. Наведені співвідношення виконуються також для деякого розв'язку рівняння (2.13) при умові $C_2 = 0$. В цьому випадку можна покласти $X_2 = 0$ і $X_3 = 0$.

Отже, для вказаних розв'язків матричного рівняння (2.13) виконуються нерівності (2.11), а за умов леми 2.4 — співвідношення (2.11) і (2.14).

Леми 2.3 і 2.4 доведено.

***Зауваження* 2.1.** Якщо в лемах 2.3 і 2.4 замість (2.12) використати умову

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E_1 \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E_1, \tag{2.20}$$

яка еквівалентна рівності $C_2 = 0$, то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати у вигляді

$$X = Z^\top \widetilde{X} Z = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \tag{2.21}$$

де $\widetilde{X}$ і X_1 — невідомі матриці. Зокрема, за умов (2.9) і (2.20) оцінка $J_1 < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли існує матриця (2.21), що задовольняє співвідношення (2.11), (2.13) і (2.14).

***Зауваження* 2.2.** Із доведення леми 2.4 випливає, що для виконання строгої оцінки $J_1 < \gamma$ критеріїв якості типу (2.7) з ваговими матрицями (2.8) або (2.9) достатньо, щоб була сумісною система ЛМН (2.10) і

$$E^\top X E \geq 0, \qquad X < \gamma^2 H.$$

***Зауваження* 2.3.** Якщо система (2.1) *спостережувана*, тобто

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda E \\ C \end{bmatrix} \equiv n, \qquad \lambda \in \sigma(F),$$

то у лемах 2.3 і 2.4 розв'язок матричного рівняння (2.13) задовольняє умови

$$E^\top X E \geq 0, \qquad \operatorname{rank}(E^\top X E) = r, \qquad \mathrm{i}_+(X) \geq r.$$

3. Зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Розглянемо дескрипторну систему зі збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \qquad y = Cx + Dw, \qquad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, а в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ регулярна і стійка. У випадку виродженої матриці E дану систему можна записати у вигляді (див. попередній пункт)

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 w, \qquad N\dot{x}_2 = x_2 + B_2 w, \qquad y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + Dw, \tag{3.2}$$

де $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$x = R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = R \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \qquad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ неімпульсивна, то в (3.2) $x_2 = -B_2 w$ і для кожної кусково-неперервної вектор-функції $w(t)$ система (3.1) має єдиний неперервний розв'язок. Якщо

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E_2, B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E_2, \tag{3.3}$$

тобто $NB_2 = 0$, і x є розв'язком системи (3.1), то в (3.2) $Nx_2 = 0$ і $x_2 = -B_2 w$.

Нехай невідомий вектор збурень $w(t)$ обмежений за зваженою L_2-нормою $\|w\|_P$ з ваговою матрицею $P = P^\top > 0$. Узагальнимо критерій якості (2.7) для системи (3.1) у вигляді

$$J = \sup_{(w, x_0) \in \mathcal{W}} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{3.4}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких дана система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деяка вагова матриця. Зокрема, для матриці (2.9) $x_0^\top X_0 x_0 = x_{01}^\top H_1 x_{01}$ і значення J не залежить від x_{02}.

Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (3.1). Даний критерій якості при умові $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ позначимо через J_0. Очевидно, що $J_0 \leq J$. Початковий і збурюючий вектори, при яких досягається супремум у (3.4), є *найгіршими* відносно критерію якості J.

Лема 3.1. *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН* (2.11) *і*

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC & E^\top XB + C^\top QD \\ B^\top XE + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} \leq 0, \tag{3.5}$$

то $J \leq \gamma$. Навпаки, якщо $J \leq \gamma$ і виконуються умови (2.9), *а також* (2.20) *або* (2.12), (3.3) *і*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E_1 \\ D^\top QC \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E_1, \tag{3.6}$$

то система ЛМН (2.11) *і* (3.5) *є сумісною.*

Лема 3.2. *Нехай вагову матрицю* X_0 *задано у вигляді* (2.9). *Тоді якщо в'язка матриць* $F(\lambda)$ *неімпульсивна, то строга оцінка* $J < \gamma$ *є наслідком системи співвідношень* (2.11), (3.5) *і*

$$\operatorname{rank}\Phi(X) = r + s, \qquad \operatorname{rank}(E^\top XE - \gamma^2 X_0) = r. \tag{3.7}$$

Навпаки, якщо $J < \gamma$ *і виконуються умови* (2.20) *або* (2.12), (3.3) *і* (3.6), *то існує матриця* $X = X^\top$, *що задовольняє систему співвідношень* (2.11), (3.5) *і* (3.7).

***Доведення лем* 3.1 *і* 3.2.** Обчислимо вираз

$$\dot v(x) + y^\top Qy - \gamma^2 w^\top Pw = \left[x^\top, w^\top\right]\Phi(X)\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix},$$

де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x) = x^\top E^\top XEx$ в силу системи (3.1), і припустимо, що виконуються матричні нерівності (2.11) і (3.5). Тоді (див. доведення лем 2.3 і 2.4)

$$\|y\|_Q^2 - \gamma^2\|w\|_P^2 \le v(x_0) = x_0^\top E^\top XEx_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \qquad (w, x_0) \in \mathcal{W},$$

тобто виконується нерівність $J \le \gamma$. Для встановлення умов виконання строгої нерівності $J < \gamma$ в лемі 3.2 перетворимо блоки матриці (3.5):

$$A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC = R^{-1\top}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^\top & V_3 \end{bmatrix}R^{-1},$$

$$V_1 = A_1^\top X_1 + X_1A_1 + C_1^\top QC_1, \qquad V_2 = A_1^\top X_2N + X_2 + C_1^\top QC_2,$$

$$V_3 = X_3N + N^\top X_3 + C_2^\top QC_2,$$

$$E^\top XB + C^\top QD = R^{-1\top}\begin{bmatrix} X_1B_1 + X_2B_2 + C_1^\top QD \\ N^\top X_2^\top B_1 + N^\top X_3B_2 + C_2^\top QD \end{bmatrix}.$$

При умові (2.9) $X_2N = 0$ і $N^\top X_3N = 0$. У випадку $N = 0$ із (3.5) випливає $V_3 \le 0$, $C_2 = 0$ і $X_2 = 0$. Отже, за умов леми 3.2 маємо

$$\Phi(X) = T^\top\begin{bmatrix} \Phi_r(X_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T, \tag{3.8}$$

де

$$\Phi_r(X_1) = \begin{bmatrix} A_1^\top X_1 + X_1A_1 + C_1^\top QC_1 & X_1B_1 + C_1^\top QD \\ B_1^\top X_1 + D^\top QC_1 & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$T = \left[\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ \hline 0 & I_{n-r} & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}, \qquad \det T \ne 0,$$

причому згідно з (3.7) $\Phi_r(X_1) < 0$ і $0 \le X_1 < \gamma^2 H_1$. Тому на основі леми 2.3 [12] маємо строгу оцінку $J < \gamma$.

Навпаки, якщо $J \leq \gamma$ ($J < \gamma$), то існує матриця X_1 така, що $0 < X_1 < \gamma^2 H_1$ і $\Phi_r(X_1) \leq 0$ ($\Phi_r(X_1) < 0$). Рангові обмеження (2.12) і (3.3) забезпечують існування матриць S і G таких, що $B_2 = NS$ і $C_2 = GN$, а рівність (3.6) означає, що $D^\top Q C_2 = 0$. Враховуючи наведені умови, шукану матрицю X можна побудувати у вигляді

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L$$

так, щоб виконувалось співвідношення (3.8). Для цього блоки X_2 і X_3 за умов (2.9) і (2.20) можна взяти нульовими, а за умов (2.9), (2.12), (3.3) і (3.6) — у вигляді (2.19).

Леми 3.1 і 3.2 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Якщо у лемах 3.1 і 3.2 використати умову (2.20), то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати у вигляді (2.21). Зокрема, за умов (2.9) і (2.20) строга оцінка $J < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли існує матриця (2.21), що задовольняє співвідношення (2.11), (3.5) і (3.7). Друге співвідношення в (3.7) завжди виконується, якщо $X < \gamma^2 H$. Якщо використати критерій якості (3.4) з довільною ваговою матрицею $X_0 = X_0^\top > 0$, то для виконання оцінки $J < \gamma$ у випадку неімпульсивної в'язки матриць $F(\lambda)$ достатньо сумісності системи співвідношень (3.5) і

$$\operatorname{rank} \Phi(X) = r + s, \qquad 0 \leq E^\top X E < \gamma^2 X_0.$$

***Наслідок* 3.1.** *Якщо в'язка матриць $F(\lambda)$ неімпульсивна і*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E,$$

то $J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли система співвідношень

$$\Phi(X) \leq 0, \qquad \operatorname{rank} \Phi(X) = r + s, \qquad E^\top X E \geq 0,$$

є сумісною.

***Зауваження* 3.2.** Якщо $S = \gamma^2 P - D^\top Q D > 0$, то ЛМН (3.5) еквівалентна матричній нерівності типу Ріккаті

$$A_0^\top X E + E^\top X A_0 + E^\top X B S^{-1} B^\top X E + Q_0 \leq 0,$$

де

$$A_0 = A + B S^{-1} D^\top Q C, \qquad Q_0 = C^\top (Q + Q D S^{-1} D^\top Q) C.$$

Для класу систем (3.1) з допустимою матричною в'язкою $F(\lambda)$ і критерієм якості (3.4) з ваговою матрицею (2.8) справджується таке твердження.

Лема 3.3. *Якщо існує матриця U, що задовольняє співвідношення*

$$0 \leq E^\top U = U^\top E \leq \gamma^2 X_0, \qquad \operatorname{rank}(E^\top U - \gamma^2 X_0) = \operatorname{rank} E, \tag{3.9}$$

$$\Psi(U) = \begin{bmatrix} A^\top U + U^\top A + C^\top Q C & U^\top B + C^\top Q D \\ B^\top U + D^\top Q C & D^\top Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{3.10}$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується при умові (3.6), *де $E_1 = E$.*

Доведення. Нехай виконуються співвідношення (3.9) і (3.10). Тоді $A^\top U + U^\top A < 0$ і за лемою 2.2 в'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою. Використовуючи функцію $v(x) = x^\top E^\top U x$ і її похідну в силу системи (3.1), обчислюємо вираз

$$\dot{v}(x) + y^\top Q y - \gamma^2 w^\top P w = \left[x^\top, w^\top\right] \Psi(U) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}.$$

Враховуючи (3.9) і (3.10), маємо співвідношення (див. доведення лем 3.1 і 3.2)

$$\|y\|_Q^2 - \gamma^2 \|w\|_P^2 \le v(x_0) = x_0^\top E^\top U x_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \qquad (w, x_0) \in \mathcal{W},$$

тобто $J \le \gamma$. Насправді виконується строга оцінка $J < \gamma$, оскільки співвідношення (3.9) і (3.10) не порушуються при зменшенні γ на достатньо мале $\varepsilon > 0$.

Нехай $J < \gamma$ і в'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою. Розглянемо в (3.2) підсистему

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 w, \qquad y = C_1 x_1 + D_1 w, \qquad x_1(0) = x_{01},$$

де $D_1 = D - C_2 B_2$, і критерій якості

$$J_r = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_{01}^\top H_1 x_{01} < \infty} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_{01}^\top H_1 x_{01}}} \le J.$$

Очевидно, що $J_r \le J$, оскільки в (3.4) значення $J = J_r$ досягається при $x_{02} = -B_2 w(0) = 0$.

Відомо [12], що $J_r < \gamma$ тоді і лише тоді, коли існує така матриця X_1, що $0 < X_1 < \gamma^2 H_1$ і

$$\Phi_r(X_1) = \begin{bmatrix} A_1^\top X_1 + X_1 A_1 + C_1^\top Q C_1 & X_1 B_1 + C_1^\top Q D_1 \\ B_1^\top X_1 + D_1^\top Q C_1 & D_1^\top Q D_1 - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0. \tag{3.11}$$

Побудуємо невідому матрицю U в (3.9) і (3.10) у вигляді

$$U = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ -C_2^\top Q C_1 & W_\varepsilon \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{3.12}$$

де $W_\varepsilon = -C_2^\top Q C_2 - \varepsilon I_{n-r} < 0$ і $\varepsilon > 0$. Співвідношення (3.9) можна легко перевірити. Врахувавши умову (3.6), еквівалентну рівності $D^\top Q C_2 = 0$, перетворимо і оцінимо вираз (3.10): $\Psi(U) \le T^\top \Omega T$, де

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_1^\top X_1 + X_1 A_1 + C_1^\top Q C_1 & X_1 B_1 + C_1^\top Q D_1 & 0 \\ B_1^\top X_1 + D_1^\top Q C_1 & D^\top Q D - \gamma^2 P & B_2^\top W_\varepsilon \\ 0 & W_\varepsilon B_2 & W_\varepsilon \end{bmatrix},$$

а матрицю перетворення T визначено в (3.8). Далі, враховуючи (3.11), для деякого малого $\varepsilon > 0$ маємо

$$T_1^\top \Omega T_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{r\varepsilon}(X_1) & 0 \\ 0 & W_\varepsilon \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$\Phi_{r\varepsilon}(X_1) = \Phi_r(X_1) + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^\top B_2 \end{bmatrix}, \qquad T_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & -B_2 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Отже, побудована матриця (3.12) задовольняє співвідношення (3.9) і (3.10).

Лему доведено.

***Зауваження* 3.3.** Співвідношення $E^\top U = U^\top E \geq 0$ в (3.9) можна подати у вигляді ЛМН відносно двох матриць U і V:

$$\begin{bmatrix} V & V - E^\top U \\ V - U^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.13}$$

При цьому $\mathrm{i}(V - \gamma^2 X_0) = \{0, r, 0\}$, де $V = E^\top U = U^\top E$.

Из доведення леми 3.3 випливають такі твердження.

***Наслідок* 3.2.** *Для виконання строгої оцінки $J < \gamma$ критерію якості* (3.4) *з додатно визначеною ваговою матрицею X_0 достатньо сумісності системи ЛМН* (3.10), (3.13) *і $V < < \gamma^2 X_0$.*

***Наслідок* 3.3.** *В'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J_0 < \gamma$, якщо система ЛМН* (3.10) *і* (3.13) *є сумісною. Зворотне твердження виконується при умові* (3.6), *де $E_1 = E$.*

***Зауваження* 3.4.** Неважко встановити, що всі твердження лем 2.3, 2.4, 3.1 – 3.3 не порушуються, якщо в умовах (2.12), (2.20), (3.3) і (3.6) замість E_1 і E_2 використати відповідні матриці

$$E_1 = \begin{cases} E, & \nu \leq 1, \\ E\Delta_\alpha^{\nu-1}, & \nu > 1, \end{cases} \qquad E_2 = \begin{cases} E, & \nu \leq 2, \\ E\Delta_\alpha^{\nu-2}, & \nu > 2, \end{cases}$$

де $\Delta_\alpha = F^{-1}(\alpha)E$ і $\alpha \notin \sigma(F)$.

***Приклад* 3.1.** Розглянемо систему (3.1) з матрицями

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 1,$$

а також критерій якості (3.4) з ваговими коефіцієнтами $P = 1$, $Q = 1$ і $X_0 = E_1^\top E_1$. Відповідна в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ є регулярною при довільному $a \in \mathbb{R}$ і неімпульсивною при $a \neq 0$ [6].

У випадку $a = 0$ маємо $\sigma(F) = \{-5\}$, $r = 1$, $\nu = 2$ і

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = E.$$

Поклавши $\gamma = 1,5$, знайдемо розв'язок

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}7746 & -0{,}7746 & -1{,}5492 \\ -0{,}7746 & 0{,}7746 & 1{,}5492 \\ -1{,}5492 & 1{,}5492 & 0 \end{bmatrix}$$

системи ЛМН (2.11) і (3.5), яка за лемою 3.1 забезпечує оцінку $J \leq 1{,}5$. При цьому виконуються рангові умови (2.12), (2.20), (3.3) і (3.6).

У випадку $a = 1$ маємо $\sigma(F) = \{-0{,}6277, -6{,}3723\}$, $r = 2$, $\nu = 1$ і

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = E_2 = E.$$

Знову поклавши $\gamma = 1,5$, знайдемо матриці

$$U = \begin{bmatrix} 1{,}0704 & 0{,}8552 & 0 \\ -0{,}2153 & 0{,}0047 & 0 \\ -5{,}0120 & -9{,}1585 & -4{,}1532 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} -1{,}0704 & -0{,}8552 & 0 \\ -0{,}8552 & -0{,}8598 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

які задовольняють ЛМН (3.10) і (3.13). При цьому $\mathrm{i}(V - \gamma^2 X_0) = \{0, 2, 0\}$ і виконується рангова умова (3.6). Отже, $J < 1{,}5$ (див. лему 3.3 і зауваження 3.3).

4. Висновок. Для лінійних дескрипторних систем встановлено умови виконання верхніх оцінок для критеріїв якості, що характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Перевірка даних умов зводиться до розв'язування систем ЛМН і може бути реалізована за допомогою комп'ютерної системи Matlab. Отримані оцінки можуть бути використані у майбутніх дослідженнях, присвячених узагальненим задачам H_∞-оптимізації дескрипторних систем керування, у яких замкнена система „об'єкт-регулятор” має вигляд (3.1).

Література

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. – М.: Ленанд, 2014. – 560 с.
3. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
4. *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A course in robust control theory. A convex approach. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 419 p.
5. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Intern. J. Robust and Nonlinear Control. – 1994. – **4**. – P. 421 – 448.
6. *Inoue I. M., Wada T., Ikeda M., Uezato E.* State-space H_∞ controller design for descriptor systems // Automatica. – 2015. – **59**. – P. 164 – 170.
7. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **102**. – 332 с.
8. *Khargonekar P. P., Nagpal K. M., Poolla K. R.* H_∞ control with transients // SIAM J. Control and Optim. – 1991. – **29**, № 6. – P. 1373 – 1393.
9. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 6. – С. 20 – 38.

10. *Баландин Д. В., Коган М. М., Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 1. – С. 3 – 22.
11. *Бирюков Р. С.* Обобщенный H_∞-оптимальный фильтр для непрерывного объекта по дискретным по времени наблюдениям // Информатика и системы управления. – 2014. – № 4 (42). – С. 89 – 101.
12. *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 3. – С. 129 – 145.
13. *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 6. – С. 78 – 93.
14. *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory // SIAM Stud. Appl. Math. – 1994. – **15**. – 193 p.
15. *Xu S., Lam J., Zou Y.* New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems // Circuits, Systems, and Signal Process. – 2007. – **26**. – P. 829 – 838.
16. *Chadli M., Shi P., Feng Z., Lam J.* New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems // Asian J. Control. – 2018. – **20**, № 1. – P. 1 – 7.
17. *Gao F., Liu W. Q., Sreeram V., Teo K. L.* Bounded real lemma for descriptor systems and its application // IFAC 14th Triennial World Congress (Beijing, P. R. China). – 1999. – P. 1631 – 1636.
18. *Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach // Automatica. – 1997. – **33**, № 4. – P. 669 – 673.
19. *Dai L.* Singular control systems // Lect. Notes Control and Inform. Sci. – New York: Springer-Verlag, 1989. – 340 p.
20. *Riaza R.* Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications. – Singapore: World Sci., 2008. – 330 p.
21. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
22. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Comput. Math. and Math. Phys. – 2013. – **53**, № 6. – P. 777 – 788.
23. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI control toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. – Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. – 138 p.
24. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
25. *Bender D. J., Laub A. J.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – **AC-32**, № 8. – P. 672 – 688.

Одержано 04.04.18