УДК 517.53 + 517.544.73

Дж. И. Мамедханов, И. Б. Дадашова (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Г. ФРОЙДА

We obtain a generalization and improvement of the G. Freud theorem on arbitrary Jordan curves in the complex plane.

Отримано узагальнення та покращення однієї теореми Г. Фройда на довільних жорданових кривих у комплексній площині.

1. Введение. Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая длины l и диаметра $d\big(d = \sup_{t,\tau\in\gamma}|t-\tau|\big)$, заданная уравнением $t = t(s)(0 \le s \le l)$ в дуговых координатах.

Обозначим $\gamma_\delta(t) = \{\tau \in \gamma\colon |t-\tau| \le \delta\}$, $0 < \delta \le d$, $\theta_t(\delta) = \operatorname{mes}\gamma_\delta(t)$ (мера Лебега), $\theta(\delta) = \sup_{t\in\gamma}\theta_t(\delta)$. Очевидно, что $\theta(\delta) \ge \delta$.

Будем говорить, что кривая γ принадлежит классу S_θ, если существует такая постоянная $K(\gamma) \ge 1$, что $\theta(\delta) \le K(\gamma)\delta$.

Класс кривых S_θ был введен В. Салаевым [1]; он совпадает с классом Рисса (R) и содержит практически все известные классы спрямляемых кривых в комплексной плоскости.

В работе Г. Фройда [2] через $C[\varphi]$ обозначено множество 2π-периодических непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \le C(f)\varphi(h), \qquad 0 < h \le \pi, \quad 0 \le x \le 2\pi, \tag{1}$$

где $\varphi(h)$ — такая неубывающая положительная функция, что $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(2h) \le 2\varphi(h)$ и существует число $B > 1$ такое, что

$$1 < \varliminf_{h\to 0}\frac{\varphi(Bh)}{\varphi(h)} \le \varlimsup_{h\to 0}\frac{\varphi(Bh)}{\varphi(h)} < B. \tag{2}$$

В этой же работе через $m_0(f)$ обозначено множество точек x, для которых выполняется равенство

$$f(x+h) - f(x) = o(\varphi(h)), \quad h \to 0, \tag{3}$$

равномерно по x.

Здесь и всюду в дальнейшем через $C(f,\ldots)$ обозначены положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Г. Фройдом [2] доказано, что множества $m_0(f)$ и $m_0(\widetilde{f})$ совпадают почти всюду, где $\widetilde{f}(x)$ — сингулярный интеграл с ядром Гильберта.

В данной работе приведен аналог теоремы Г. Фройда на кривых в комплексной плоскости. Для этого рассматривается класс кривых $\gamma \in S_\theta$ и соответственно сингулярный интеграл Коши

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t}d\xi, \quad t \in \gamma,$$

который в случае, когда γ — единичная окружность, становится сингулярным интегралом с ядром Гильберта. Доказывается, что утверждение Г. Фройда остается в силе на кривых из класса S_θ и без дополнительного условия равномерности по x в соотношении (3). С этой целью для функции из класса

$$H_\alpha = H_\alpha(\gamma) = \left\{ f \in C(\gamma) \colon |f(t_1) - f(t_2)| \le C(f)|t_1 - t_2|^\alpha \ \ \forall t_1, t_2 \in \gamma \right\},$$

где $0 < \alpha \le 1$, вводится в рассмотрение множество $m(f,\alpha)$, определяемое равенством

$$m(f,\alpha) = \left\{ t \in \gamma \colon |f(t) - f(\tau)| = o(|t-\tau|^\alpha), \tau \to t \right\}.$$

2. Вспомогательные леммы. Обозначим через Φ класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определенных на $(0,d]$ и таких, что $\omega(\delta)\cdot\delta^{-1}$ не возрастает.

Лемма 1. *Пусть γ принадлежит S_θ. Если ω принадлежит Φ, $0 \le 2\varepsilon \le \eta \le d$, то*

$$\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\omega\big(|\xi - t|\big)}{|\xi - t|}|d\xi| \le C(\gamma)\int\limits_\varepsilon^\eta \frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi,$$

$$\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\omega\big(|\xi - t|\big)}{|\xi - t|^2}|d\xi| \le C(\gamma)\int\limits_\varepsilon^\eta \frac{\omega(\xi)}{\xi^2}d\xi.$$

Доказательство. Пусть x принадлежит R^1 и $[x]$ обозначает целую часть числа x. Положим $N = \left[\log_2 \dfrac{\eta}{\varepsilon}\right]$. Очевидно, что $2^N\varepsilon \le \eta < 2^{N+1}\varepsilon$, и так как $2\varepsilon \le \eta$, то $N \ge 1$. Имеем

$$\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_\varepsilon(t) = \bigcup_{j=1}^{N-1}\left(\gamma_{2^{j+1}\varepsilon}(t)\setminus\gamma_{2^j\varepsilon}(t)\right) \cup \left(\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_{2^N\varepsilon}(t)\right).$$

Если $\xi \in \gamma_{2^{j+1}\varepsilon}(t)\setminus\gamma_{2^j\varepsilon}(t)$, то $|\xi - t| > 2^j\varepsilon$, а так как $\omega\big(|\xi-t|\big)|\xi-t|^{-1}$ не возрастает, то $\omega\big(|\xi-t|\big)|\xi-t|^{-1} \le \omega\left(2^j\varepsilon\right)\left(2^j\varepsilon\right)^{-1}$. Если же $\xi \in \gamma_\eta(t)\setminus\gamma_{2^N\varepsilon}(t)$, то $|\xi-t| > 2^N\varepsilon$, и поэтому $\omega\big(|\xi-t|\big)|\xi-t|^{-1} \le \omega\left(2^N\varepsilon\right)\left(2^N\varepsilon\right)^{-1}$. Отсюда

$$\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\omega\big(|\xi-t|\big)}{|\xi-t|}|d\xi| \le \sum_{j=1}^{N-1}\int\limits_{\gamma_{2^{j+1}\varepsilon}(t)\setminus\gamma_{2^j\varepsilon}(t)} \frac{\omega\big(|\xi-t|\big)}{|\xi-t|}|d\xi| +$$

$$+\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_{2^N\varepsilon}(t)} \frac{\omega\big(|\xi-t|\big)}{|\xi-t|}|d\xi| \le \sum_{j=0}^{N-1}\frac{\omega(2^j\varepsilon)}{2^j\varepsilon}\int\limits_{\gamma_{2^{j+1}\varepsilon}(t)\setminus\gamma_{2^j\varepsilon}(t)}|d\xi| +$$

$$+\frac{\omega(2^N\varepsilon)}{2^N\varepsilon}\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_{2^N\varepsilon}(t)}|d\xi| = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{\omega(2^j\varepsilon)}{2^j\varepsilon}\left(\theta_t(2^{j+1}\varepsilon) - \theta_t\left(2^j\varepsilon\right)\right) +$$

$$+\frac{\omega(2^N\varepsilon)}{2^N\varepsilon}\big(\theta_t(\eta) - \theta_t(2^N\varepsilon)\big) \le \sum_{j=0}^{N-1}\frac{\omega(2^j\varepsilon)}{2^j\varepsilon}\theta_t\left(2^{j+1}\varepsilon\right) + \frac{\omega(2^N\varepsilon)}{2^N\varepsilon}\theta_t(\eta).$$

Учитывая, что $\theta_t(\delta) \le \theta(\delta) \le K\delta$ и $\eta < 2^{N+1}\varepsilon$, получаем

$$\int\limits_{\gamma_\eta(t)\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\omega\big(|\xi - t|\big)}{|\xi - t|}|d\xi| \le 2K\sum_{j=1}^{N}\omega(2^j\varepsilon).$$

Далее, поскольку $\eta \ge 2^N\varepsilon$, то

$$2\int\limits_{\varepsilon}^{\eta}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi \ge 2\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{2^{j-1}\varepsilon}^{2^j\varepsilon}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi \ge \sum_{j=1}^{N}\omega\left(2^j\varepsilon\right),$$

$$2\int\limits_{\varepsilon}^{\eta}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi \ge 2\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi \ge \omega(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=0}^{N}\omega(2^j\varepsilon) \le 4K\int\limits_{\varepsilon}^{\eta}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi.$$

В силу последней оценки получаем первое неравенство леммы 1. Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть γ принадлежит S_θ. Тогда для любого $0 < \varepsilon < \eta$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(t)}\frac{d\xi}{\xi - t}\right| \le 2\pi.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(t)}\frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Обозначим через γ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $\nu \in N \cup \{+\infty\}$, дуги кривой $\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(t)$ с концами, лежащими на пересечении γ с окружностью, и такие, что γ_i либо является дугой окружности, либо не имеет общих точек с окружностью, кроме своих концов. Тогда

$$\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(t)}\frac{d\xi}{\xi - t} = \sum_{i=1}^{\nu}\int\limits_{\gamma_i}\frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Если γ_i — дуга окружности, то обозначим γ_i через $\widetilde{\gamma}_i$.

Пусть γ_i не является дугой окружности. Обозначим через t_i и τ_i ее концы. Дуги окружности с концами t_i, τ_i обозначим через α_i, β_i. Рассмотрим замкнутые кривые $\gamma_i \cup \alpha_i$, $\gamma_i \cup \beta_i$. Ориентируем их таким образом, чтобы индуцированное на γ_i направление совпадало с направлением на γ. Обозначим через $\widetilde{\gamma}_i$ ту из кривых $\gamma_i \cup \alpha_i$, $\gamma_i \cup \beta_i$, внутри которой не содержится точка t.

Если $\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i \cup \alpha_i$, то обозначим $l_i = -\alpha_i$; соответственно, если $\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i \cup \beta_i$, то $l_i = -\beta_i$. Тогда

$$0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_i} \frac{d\xi}{\xi - t} = \left(\int\limits_{\gamma_i} - \int\limits_{l_i} \right) \frac{d\xi}{\xi - t}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(t)} \frac{d\xi}{\xi - t} = \sum_{j=1}^{\nu} \int\limits_{l_i} \frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Совокупность дуг $\{l_i\}$ окружности с центром в точке t радиуса ε после взаимного гашения сводится к двум наборам попарно непересекающихся дуг окружности, в каждом из которых дуги ориентированы одинаково. Дуги разных наборов ориентированы противоположно. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(t)} \frac{d\xi}{\xi - t}$$

равен сумме приращений аргументов положительно ориентированных дуг без суммы приращений аргументов отрицательно ориентированных дуг окружности. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(t)} \frac{d\xi}{\xi - t} \right| \leq 2\pi.$$

3. Основной результат.

Теорема. *Пусть* γ *принадлежит* S_θ*. Если* α *принадлежит* $(0,1)$*, то почти всюду*

$$m(f,\alpha) = m(\widetilde{f},\alpha).$$

Доказательство. Пусть t принадлежит $m(f,\alpha)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t)$, что

$$|\xi - t| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(t)| \leq \varepsilon |\xi - t|^\alpha.$$

Пусть $\tau \in \gamma$, $\dfrac{3}{2}|\tau - t| < \delta$ и η — произвольное число из $\big(0, |\tau - t|\big)$. Справедливо равенство

$$\widetilde{f}(\tau) - \widetilde{f}(t) = \frac{\tau - t}{\pi i} \left(\int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\delta(t)} + \int\limits_{\gamma_\delta(t) \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \right) \frac{f(\xi) - f(t)}{(\xi - \tau)(\xi - t)}\, d\xi +$$

$$+ \frac{f(t) - f(\tau)}{\pi i} + \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \frac{d\xi}{\xi - t} + \frac{1}{\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t) \setminus \gamma_\eta(\tau)} + \int\limits_{\gamma_\tau(\tau)} \right) \times$$

$$\times \frac{f(\xi) - f(\tau)}{\xi - \tau}\, d\xi - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t}\, d\xi +$$

$$+ f(\tau) - f(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} A_1 + \ldots + A_7. \tag{4}$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое правой части последнего равенства.

Если ξ принадлежит $\gamma \setminus \gamma_\delta(t)$, то

$$|\xi - t| \leq |\xi - \tau| + |\tau - t| \leq |\xi - \tau| + \frac{2}{3}\delta \leq |\xi - \tau| + \frac{2}{3}|\xi - t|,$$

откуда $|\xi - \tau| \geq \dfrac{1}{3}|\xi - t|$. Тогда

$$|A_1| = \left| \frac{\tau - t}{\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\delta(t)} \frac{f(\xi) - f(t)}{(\xi - \tau)(\xi - t)} d\xi \right| \leq \frac{3}{\pi} C(f) |\tau - t| \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\delta(t)} |\xi - \tau|^{\alpha - 2} |d\xi|.$$

Учитывая, что γ принадлежит $\gamma_\alpha(t)$, и применяя лемму 1 к последнему интегралу, получаем

$$|A_1| = C(f, \gamma) |\tau - t| \int\limits_\delta^d \xi^{\alpha - 2} d\xi \leq C(f, \gamma) |\tau - t| \delta^{-\alpha - 1}. \tag{5}$$

Пусть теперь γ принадлежит $\gamma_\delta(t) \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)$, тогда $|\xi - t| \geq \dfrac{3}{2}|\tau - t|$. Отсюда имеем $|\xi - t| \leq |\xi - \tau| + |\tau - t| \leq |\xi - \tau| + \dfrac{2}{3}|\xi - t|$, и, следовательно, $|\xi - \tau| \geq \dfrac{1}{3}|\xi - t|$.

Используя это неравенство и то, что $|f(\xi) - f(t)| \leq \varepsilon |\xi - t|$ при $\xi \in \gamma_\delta(t)$, находим

$$|A_2| = \left| \frac{\tau - t}{\pi i} \int\limits_{\gamma_\delta(t) \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \frac{f(\xi) - f(t)}{(\xi - t)(\xi - \tau)} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{\pi} \varepsilon |\tau - t| \int\limits_{\gamma_\delta(t) \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} |\xi - \tau|^{\alpha - 2} |d\xi|,$$

откуда в силу второго соотношения леммы 1 имеем

$$|A_2| \leq C(\gamma) \varepsilon |\tau - t|^\alpha. \tag{6}$$

Далее, так как в силу леммы 2

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \frac{d\xi}{\xi - t} \right| \leq 2,$$

то

$$|A_3 + A_7| \leq |f(\tau) - f(t)| \left(\left| \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_{\frac{3}{2}|\tau - t|}(t)} \frac{d\xi}{\xi - t} \right| + 1 \right) \leq$$

$$\leq 3 |f(\tau) - f(t)| \leq 3 \varepsilon |\tau - t|^\alpha. \tag{7}$$

Для оценки величины

$$|A_4| = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma_{\frac{3}{2}|\tau-t|}(t)\setminus\gamma_\eta(t)} \frac{f(\xi)-f(\tau)}{\xi-\tau} d\xi$$

заметим, что

$$|f(\xi)-f(\tau)| \le |f(\xi)-f(t)| + |f(t)-f(\tau)| \le$$

$$\le \varepsilon|\xi-t|^\alpha + \varepsilon|\tau-\alpha|^\alpha \le \left(\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha + 1\right)\varepsilon|\tau-t|^\alpha,$$

откуда, учитывая, что $\gamma_{\frac{3}{2}|\tau-t|}(\tau) \subset \gamma_{\frac{5}{2}|\tau-t|}(\tau)$, имеем

$$|A_4| = C\varepsilon|\tau-t|^\alpha \int\limits_{\gamma_{\frac{5}{2}|\tau-t|}(\tau)\setminus\gamma_\eta(\tau)} \frac{|d\xi|}{|\xi-\tau|}.$$

Далее, используя лемму 1, получаем

$$|A_4| = C\varepsilon|\tau-t|^\alpha \ln\frac{\frac{5}{2}|\tau-t|}{\eta}. \tag{8}$$

Наконец для величин

$$|A_5| \le \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma_\eta(\tau)} \frac{|f(\xi)-f(\tau)|}{|\xi-\tau|}|d\xi|$$

и

$$|A_6| \le \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma_{\frac{3}{2}|\tau-t|}(t)} \frac{|f(\xi)-f(t)|}{|\xi-t|}|dt|$$

в силу леммы 1 имеем следующие оценки:

$$|A_5| \le C(f)\frac{1}{\pi} \int\limits_{\gamma_\eta(\tau)} |\xi-t|^{\alpha-1}|d\xi| \le C(f,\gamma)\eta^\alpha \tag{9}$$

и

$$|A_6| \le C\varepsilon \int\limits_{\gamma_{\frac{3}{2}|\tau-t|}(t)} |\xi-t|^{\alpha-1}|d\xi| \le C(\gamma)\varepsilon|\tau-t|^\alpha. \tag{10}$$

Суммируя оценки (5) – (10), из (4) получаем

$$|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)| \le$$

$$\le C(f,\gamma)\left(\varepsilon|\tau-t|^\alpha\eta^\alpha + |\tau-t|\delta^{\alpha-1} + \varepsilon|\tau-t|^\alpha \ln\frac{5/2|\tau-t|}{\eta}\right). \tag{11}$$

Пусть ε такое, что $\varepsilon^{1/\alpha} < 1$. Положим $\eta = \varepsilon^{1/\alpha}|\tau-t|$. Тогда оценка (11) примет вид

$$|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)| \leq C(f,\gamma)\left(\varepsilon|\tau-t|^{\alpha}+|\tau-t|\delta^{\alpha-1}+\varepsilon|\tau-t|^{\alpha}\ln\frac{5}{2\varepsilon}\right),$$

откуда

$$\frac{|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)|}{|\tau-t|^{\alpha}} \leq C(f,\gamma)\left(\varepsilon+\left(\frac{|\tau-t|}{\delta}\right)^{1-\alpha}+\varepsilon\ln\frac{5}{2\varepsilon}\right)$$

и

$$\overline{\lim_{\tau\to t}}\frac{|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)|}{|\tau-t|^{\alpha}} \leq C(f,\gamma)\left(\varepsilon+\varepsilon\ln\frac{5}{2\varepsilon}\right) \leq C(f,\gamma)\ \varepsilon\ \ln\frac{5}{2\varepsilon}.$$

Теперь, устремляя ε к нулю, имеем

$$\overline{\lim_{\tau\to t}}\frac{|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)|}{|\tau-t|^{\alpha}} = 0,$$

т. е. $|\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(t)| = o\big(|\tau-t|^{\alpha}\big)$.

Таким образом, $m(f,\alpha) \subset m(\widetilde{f},\alpha)$.

Поскольку в классе Гельдера $H_{\alpha},\ 0<\alpha<1$, почти всюду справедливо равенство $\widetilde{\widetilde{f}}=f$, то одновременно получаем $m(\widetilde{f},\alpha)\subset m(\widetilde{\widetilde{f}},\alpha)=m(f,\alpha)$, откуда $m(f,\alpha)\subset m(\widetilde{f},\alpha)\subset m(f,\alpha)$ или $m(f,\alpha)=m(\widetilde{f},\alpha)$ почти всюду.

Замечание. Нетрудно проверить, что метод доказательства теоремы позволяет получить более общее утверждение, а именно почти всюду

$$m_0(f)=m_0(\widetilde{f}),$$

причем без условия равномерности по x в соотношении (3).

Литература

1. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.
2. *Freud G.* An approximation theoretical study of the structure of real functions // Stud. Sci. Math. Hung. – 1970. – **5**. – P. 141 – 150.

Получено 30.04.17