УДК 517.98+517.954

Ю. В. Богданский (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ им. И. Сикорского”, Киев)

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ВЕРСИЯ НЕРАВЕНСТВА ФРИДРИХСА

Two infinite-dimensional versions of the classical Friedrichs inequality are proposed.

Запропоновано два нескінченновимірних варіанти класичної нерівності Фрідріхса.

Классическое неравенство Фридрихса имеет вид

$$\int\limits_G u^2\,d\lambda \le C\left(\int\limits_G \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\lambda + \int\limits_S (\gamma(u))^2 d\sigma\right), \tag{1}$$

где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей S, удовлетворяющей определенным условиям; функция u принадлежит $W_2^1(G)$; λ — классическая мера Лебега в $\mathbb{R}^n$; σ — поверхностная мера на S; $\gamma\colon W_2^1(G) \longrightarrow L_2(S)$ — соответствующий оператор следа; постоянная C определяется геометрией области G.

Перенос на бесконечномерный случай некоторых интегральных неравенств для гауссовских мер рассмотрен в [1]. Одному из подходов к построению поверхностного интегрирования в бесконечномерных пространствах посвящена монография [2].

В данной работе предлагаются два варианта бесконечномерной версии формулы (1). При этом второй вариант неравенства получен на основе конструкции ассоциированной поверхностной меры в гильбертовом пространстве, определение которой и ряд приложений рассмотрены в работах [3 – 7].

1. Предварительные сведения. Рассматривается ограниченная область G в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H ($\dim H \le \infty$) с заданной на нем неотрицательной конечной (или конечной на шарах в H) борелевской мерой μ.

Обозначим пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на H через $C_b = C_b(H)$; пространство всех непрерывных и ограниченных на H векторных полей $\mathbf{X}\colon H \longrightarrow H$ через $C_b(H;H)$; пространство всех функций $f \in C_b$ $\big($соответственно векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)\big)$, дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с ограниченной и непрерывной на H производной $f'(\cdot)$ $\big($соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)\big)$, через $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)\big)$; семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на H до функции класса C_b^1, через $C^1(\overline{G})$. Символом $C_0^1(G)$ обозначим семейство всех функций из $C^1(\overline{G})$, каждая из которых равна нулю в некоторой ε-окрестности границы S области G.

Пусть $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ — поток векторного поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$. Сдвиг меры μ вдоль векторного поля $\mathbf{Z}$ обозначим через μ_t ($\mu_t(A) = \mu(\Phi_t A)$ для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$, где $\mathfrak{B}(H)$ — борелевская σ-алгебра в H). Дифференцируемость меры μ вдоль $\mathbf{Z}$ предполагается далее в сильном смысле (по Фомину), т. е. для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ предполагаем существование $\vartheta(A) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu_t(A)$. В этом случае $\vartheta = d_{\mathbf{Z}}\mu$ (производная меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$) является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Соответствующую плотность $\dfrac{d\vartheta}{d\mu}$ принято называть логарифмической производной меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры μ): $\dfrac{d\vartheta}{d\mu} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$.

При построении второго варианта неравенства на область G и меру μ накладываем дополнительные условия.

Граница S области G предполагается гладким вложенным в H подмногообразием коразмерности 1, а поле единичной внешней нормали к S — продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$. Дополнительно предполагаем также, что мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о согласовании S (или G) с мерой μ.

Для $\varepsilon > 0$ символом A_ε обозначим ε-окрестность множества A. В работе [4] доказано, что при согласовании S с мерой μ имеет место равенство

$$\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

поэтому (см. [3], предложение 1) $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную меру [3, 4], которую обозначим μ_S или σ. Если u — ограниченная непрерывная функция на S, $\hat{u} \in C_b$ — ее продолжение на H, то поверхностная мера σ корректно определяется формулой, которая должна выполняться для всех ограниченных непрерывных на S функций:

$$\int\limits_S u\,d\sigma = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \hat{u}\,d\mu, \tag{3}$$

при этом σ не зависит от выбора продолжения $\mathbf{n}$ поля единичной внешней нормали к S (см. [3, 6]).

Помимо функционального пространства $L_2(G) = L_2(G;\mu)$ рассматриваем также $L_2(G;H) = L_2(G;H;\mu)$ — пространство квадратично интегрируемых векторных полей на G. Норму в $L_2(G;H)$ задаем формулой $|||\mathbf{Z}|||^2 = \int_G \|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2\,d\mu$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера (см. [8])). Здесь и в дальнейшем символами $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначены соответственно норма и скалярное произведение в пространстве H.

В конструкции второго варианта неравенства также предполагаем, что мера μ имеет свойство полноты носителя ($\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого множества $U \subset H$). В этом случае корректно определен оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \longrightarrow L_2(G;H)$ с естественной областью определения $C^1(\overline{G})$.

При этом на область G и меру μ наложим следующие условия:

а) оператор $\mathbf{grad}$ корректно определен и допускает замыкание с областью определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$;

б) $\operatorname{div}_\mu \mathbf{n}\big|_G \in L_\infty(G)$.

Примером меры μ, согласованной с поверхностью S и удовлетворяющей условиям а), б), является мера ϑ_φ — „сглаженная" вдоль поля $\mathbf{n}$ гауссова мера ϑ, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H (см. [5]). Сглаженная мера ϑ_φ задается на борелевских множествах в H формулой

$$\vartheta_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\vartheta(\Phi_t^{\mathbf{n}} A)\,dt,$$

где $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ — неотрицательная функция, для которой $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt < \infty$ и существует постоянная $C_1 > 0$, для которой неравенство $|\varphi'(s)| \leq C_1\varphi(s)$ выполнено при всех $s \in \mathbb{R}$ $\Big($например, $\varphi(s) = \dfrac{1}{1+s^2}\Big)$.

При совместном выполнении условий а), б) существует постоянная C (зависящая только от области G и меры μ) такая, что для каждой функции $u \in C^1(\overline{G})$ имеет место неравенство

$$\|u\big|_S\|_{L_2(S,\sigma)} \leq C(\|u\|_{L_2(G)} + |||\,\mathbf{grad}\,u|||).$$

Тем самым корректно определен ограниченный „оператор следа" γ из банахова в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$ пространства $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$ в $L_2(S,\sigma)$, сужение которого на $C^1(\overline{G})$ определено равенством $\gamma(u) = u\big|_S$ (см. [3]).

В работе [6] доказано, что $\operatorname{Ker}\gamma$ совпадает с замыканием $C_0^1(G)$ по норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$.

Заметим также, что в случае конечномерного пространства H и классической меры Лебега $\mu = \lambda$, пространство $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$ совпадает с соболевским пространством $W_2^1(G)$, а условия а), б) выполняются для широкого класса областей с гладкой границей S.

2. Неравенство Фридрихса. Вариант 1.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная область в H, μ — неотрицательная борелевская мера, конечная на шарах в H. Пусть существует векторное поле $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$, для которого выполнены следующие условия*:

а) $\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}\big|_V \in L_\infty(V;\mu)$ *на шарах* $V \subset H$;

б) *существует* t_0 *такое, что* $G \cap \Phi_{t_0}G = \varnothing$ (*здесь* Φ_t — *поток поля* $\mathbf{Z}$);

в) *существует* $p \in \mathbb{N}$ *такое, что каждая траектория* $t \mapsto \Phi_t(x)$ *поля* $\mathbf{Z}$ *при* $|t| \leq |t_0|$ *пересекает* S *не более чем в* p *точках.*

Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для каждой функции $u \in C_b^1$ имеет место неравенство

$$\int\limits_G u^2 d\mu \leq C\left(\int\limits_G |u|\,\|\mathbf{grad}\,u\|\,d\mu + \varlimsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon} u^2 d\mu\right). \tag{4}$$

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $t_0 > 0$. Пусть u принадлежит C_b^1. Для $t \geq 0$ положим $G(t) := \{x \,\big|\, \forall s \in [0;t] : \Phi_s x \in G\}$ и функцию $F\colon [0;t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ определим равенством

$$F(t) = \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_t) j_{G(t)} d\mu \tag{5}$$

(здесь j_A — индикатор множества A).

Шаг 1. Докажем, что F абсолютно непрерывна на $[0;t_0]$. Полагая $t \geq 0$, $s > 0$, имеем

$$F(t+s) - F(t) = \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_{t+s} - u^2 \circ \Phi_t) j_{G(t+s)} d\mu +$$

$$+ \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_t)(j_{G(t+s)} - j_{G(t)})\, d\mu. \tag{6}$$

В силу теоремы о среднем для каждого $x \in G(t+s)$ существует $\vartheta \in (0;1)$, для которого имеет место равенство

$$u^2(\Phi_{t+s}x) - u^2(\Phi_t x) = s\left((\mathbf{grad}\, u^2)(\Phi_{t+\vartheta s}x), \mathbf{Z}(\Phi_{t+\vartheta s}x)\right), \tag{7}$$

откуда получаем оценку

$$\left|\int\limits_H (u^2 \circ \Phi_{t+s} - u^2 \circ \Phi_t) j_{G(t+s)} d\mu\right| \leq \sup_G \|\,\mathbf{grad}\, u^2(\cdot)\| \sup_G \|\mathbf{Z}(\cdot)\| s\mu(G). \tag{8}$$

Далее оценим второе слагаемое в правой части равенства (6).

Прежде всего заметим, что $G(t) \supset G(t+s)$ и при этом

$$\big(x \in G(t) \setminus G(t+s)\big) \Rightarrow \big(\exists \tau \in (t; t+s] : \Phi_\tau x \in S\big). \tag{9}$$

Данная импликация является следствием следующих условий: $\Phi_t x$ принадлежит G; существует $\alpha \in (0, s]$, для которого $\Phi_{t+\alpha}x \notin G$, и отображение $[t, t+\alpha] \ni \tau \mapsto \Phi_\tau x \in H$ непрерывно.

Пусть V — шар в H достаточно большого радиуса ($\Phi_t G \subset V$ при $|t| \leq t_0$). Поскольку $\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}\big|_V$ принадлежит $L_\infty(V)$, при $|t| \leq t_0$ меры $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$ и μ эквивалентны в G. При этом

$$\frac{d\mu_{-t}}{d\mu} \leq e^{M|t|} (\operatorname{mod} \mu) \leq e^{Mt_0} (\operatorname{mod} \mu), \tag{10}$$

где $M = \big\|\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}\big\|_{L_\infty(V;\mu)}$ (см. [6], лемма 2).

Пусть $\delta_0 \in (0; t_0)$; $\Delta \subset [0; t_0]$ представляет собой дизъюнктное объединение числовых промежутков:

$$\Delta = \bigvee_{k=1}^m \langle t_k, t_k + s_k \rangle, \qquad \text{где} \qquad s_k > 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^m s_k \leq \delta < \delta_0.$$

В силу (9) $G(t_k) \setminus G(t_k + s_k) \subset \Phi_{[-(t_k+s_k), -t_k)} S$ (здесь и далее $\Phi_\Delta A := \{\Phi_t x \mid t \in \Delta; x \in A\}$), поэтому, учитывая неравенство (10), получаем оценку

$$\mu(G(t_k) \setminus G(t_k + s_k)) \leq e^{Mt_0} \mu\left(\Phi_{[-\sum_{i=1}^k s_i, -\sum_{i=1}^{k-1} s_i)} S\right) \tag{11}$$

$\left(\sum_{i=1}^0 s_i := 0 \text{ при } k = 1\right)$.

Условие в) теоремы 1 при $\delta_0 < \dfrac{t_0}{2}$ приводит к неравенству

$$\sum_{k=1}^m \mu\left(\Phi_{[-\sum_{i=1}^k s_i, -\sum_{i=1}^{k-1} s_i)} S\right) \leq p\mu(\Phi_{[-\delta;0)} S),$$

поэтому из (11) следует оценка

$$0 \leq \sum_{k=1}^m \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_t)(j_{G(t_k)} - j_{G(t_k+s_k)})\, d\mu \leq p \sup_H u^2 e^{Mt_0} \mu(\Phi_{[-\delta;0)} S). \tag{12}$$

Теперь из равенства (6) и неравенств (8), (12) следует абсолютная непрерывность на $[0;t_0]$ функции $F(t)$.

Шаг 2. $F(t_0) = 0;\ F(0) = \int_G u^2\,d\mu$; вследствие абсолютной непрерывности функция F почти всюду дифференцируема на $[0;t_0]$ и имеет место равенство

$$\int\limits_G u^2\,d\mu = -\int\limits_0^{t_0} F'(t)\,dt. \tag{13}$$

Зафиксируем $t \in [0;t_0]$. При всех $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big(u^2(\Phi_{t+s}x) - u^2(\Phi_t x)\big) = \big((\mathbf{grad}\,u^2)(\Phi_t x), \mathbf{Z}(\Phi_t x)\big), \tag{14}$$

а из (7) следует равномерная, не зависящая от s оценка сверху семейства функций $\left\{\left|\dfrac{1}{s}(u^2\circ\Phi_{t+s} - u^2\circ\Phi_t)\right|\right\}$.

В силу условия в) каждая точка $x \in H$ не может войти более чем в p множеств вида $\Phi_t S$ при $|t| < \dfrac{t_0}{2}$, поэтому вследствие эквивалентности мер μ и μ_t приходим к равенствам $\mu(S) = 0,\ \mu_t(S) = 0$ при $|t| < t_0$. Теперь из вложения

$$\big\{x \mid j_{G(t+s)}(x) \not\to j_{G(t)}(x)\big\} \subset \big\{x \mid \Phi_t x \in S\big\} = \Phi_{-t}S$$

следует сходимость $j_{G(t+s)} \longrightarrow j_{G(t)} \pmod{\mu}$ при $s \to 0$.

Тем самым применение теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и равенство (14) приводят к (корректному) равенству

$$\lim_{s\to 0}\int\limits_H \frac{1}{s}(u^2\circ\Phi_{t+s} - u^2\circ\Phi_t)j_{G(t+s)}\,d\mu =$$

$$= \int\limits_G \big((\mathbf{grad}\,u^2)\circ\Phi_t, \mathbf{Z}\circ\Phi_t\big)j_{G(t)}\,d\mu. \tag{15}$$

Из (15) и (10) следует оценка

$$\left|\lim_{s\to 0}\int\limits_H \frac{1}{s}(u^2\circ\Phi_{t+s} - u^2\circ\Phi_t)j_{G(t+s)}\,d\mu\right| \le$$

$$\le 2\sup_H\|\mathbf{Z}(\cdot)\|\int\limits_G |u|\,\|\mathbf{grad}\,u\|\frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\,d\mu \le$$

$$\le 2Ke^{Mt_0}\int\limits_G |u|\,\|\mathbf{grad}\,u\|d\mu \tag{16}$$

$\big($здесь и далее $K = \sup_H\|\mathbf{Z}(\cdot)\|\big)$.

Пусть теперь t — точка дифференцируемости функции $F(\cdot)$. Тогда из (6) и (15) следует существование предела

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int\limits_H (u^2\circ\Phi_t)(j_{G(t)}-j_{G(t+s)})\,d\mu.$$

Из (9) следует вложение $\Phi_t(G(t)\setminus G(t+s))\subset S_{Ks}$. Поэтому

$$0\le\int\limits_H (u^2\circ\Phi_t)(j_{G(t)}-j_{G(t+s)})\,d\mu\le\int\limits_{\Phi_{-t}(S_{Ks})}(u^2\circ\Phi_t)\,d\mu=$$

$$=\int\limits_{S_{Ks}} u^2\frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\,d\mu\le e^{Mt_0}\int\limits_{S_{Ks}} u^2\,d\mu, \tag{17}$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to 0+0}\frac{1}{s}\int\limits_H (u^2\circ\Phi_t)(j_{G(t)}-j_{G(t+s)})\,d\mu\le Ke^{Mt_0}\,\overline{\lim_{s\to 0+0}}\,\frac{1}{s}\int\limits_{S_s} u^2\,d\mu. \tag{18}$$

Теперь из (13), (16) и (18) получаем неравенство (4) с постоянной $C=2Ke^{Mt_0}$, что и доказывает теорему 1.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *выполняется неравенство*

$$\int\limits_G u^2\,d\mu\le C\left(\left(\int\limits_G u^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int\limits_G\|\,\mathbf{grad}\,u\|^2\,d\mu\right)^{1/2}+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}}\,\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon} u^2\,d\mu\right).$$

Доказательство. К правой части неравенства (4) следует применить неравенство Коши – Буняковского.

***Следствие* 2** (неравенство Фридрихса)**.** *В условиях теоремы* 1 *существует постоянная* C_1, *для которой при всех* $u\in C_b^1$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|^2_{L_2(G)}\le C_1\left(|||\,\mathbf{grad}\,u|||^2+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}}\,\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon} u^2\,d\mu\right).$$

Доказательство. Положим $p=\|u\|_{L_2(G)}$, $q=|||\,\mathbf{grad}\,u|||$, $r=\left(\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0+0}\,\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon} u^2 d\mu\right)^{1/2}$. Тогда из (4) следует, что $p^2\le C(pq+r^2)$, поэтому $p\le\dfrac{Cq}{2}+\sqrt{\dfrac{C^2q^2}{4}+Cr^2}$, $p^2\le\dfrac{C^2q^2}{2}+ +\dfrac{C^2q^2}{2}+2Cr^2\le C_1(q^2+r^2)$, где $C_1=\max(C^2,2C)$, что и доказывает следствие.

***Замечание* 1.** В качестве модельного примера можно рассмотреть в H продакт-меру $\mu= =\vartheta_1\times\vartheta_2$, соответствующую разложению $H=H_1\oplus H_2$, где $\dim H_1<\infty$; плотность $\dfrac{d\vartheta_1}{d\lambda}$ меры ϑ_1 относительно классической лебеговой меры λ в H_1 из класса C^1; $\mathbf{Z}(\cdot)\equiv h\in H_1$ — постоянное векторное поле; область G строго выпукла в H. При этом выполнены все условия теоремы 1 и следствий 1, 2; $p=2$.

3. Неравенство Фридрихса. Вариант 2.

Теорема 2. *Пусть ограниченная область* $G \subset H$ *и мера* μ *согласованы и удовлетворяют условиям* а), б) п. 1. *Пусть существуют векторное поле* $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$, *для которого на шарах* $V \subset H$ *выполнено условие* $\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}\big|_V \in L_\infty(V;\mu)$, *и* t_0 *такое, что* $G \cap \Phi_{t_0} G = \varnothing$ (*здесь* Φ_t — *поток поля* $\mathbf{Z}$).

Тогда существует постоянная $C > 0$ *такая, что для любой функции* $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_G u^2 d\mu \le C \left(\int\limits_G |u| \, \| \overline{\mathbf{grad}}\, u \| d\mu + \int\limits_S (\gamma(u))^2 d\sigma \right). \tag{19}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенство (19) достаточно получить лишь для функций $u \in C_b^1$. Предельным переходом оно переносится на функции $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$. Не теряя общности также можно считать, что $t_0 > 0$.

Далее доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Шаг 1. Докажем, что функция F, определенная формулой (5), удовлетворяет на $[0;t_0]$ условию Липшица.

Оценку второго слагаемого в правой части равенства (6) проведем по другой схеме.

Из неравенства (17) получаем оценку

$$0 \le \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_t)(j_{G(t)} - j_{G(t+s)})\, d\mu \le e^{Mt_0} \sup_H u^2 \mu(S_{Ks}). \tag{20}$$

В силу (2) существуют $l > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $s \in (0;\delta)$ имеет место неравенство $\mu(S_{Ks}) \le ls$, поэтому из (20) следует вывод о том, что при $s \in (0;\delta)$ и при всех $t \in [0;t_0]$ имеет место оценка

$$0 \le \int\limits_H (u^2 \circ \Phi_t)(j_{G(t)} - j_{G(t+s)})\, d\mu \le e^{Mt_0} \sup_H (u^2) ls,$$

что в силу равенства (6) и оценки (8) завершает проверку липшицевости функции F.

Шаг 2. Вывод равенства (15) и оценки (16) проводится по той же схеме с единственным отличием: равенство $\mu(S) = 0$ не нуждается в дополнительном выводе, оно следует из согласованности меры μ и области G (см. (2)).

Наконец осталось заметить, что для $u \in C_b^1$ существует $\lim_{s\to 0+0} \dfrac{1}{s} \displaystyle\int_{S_s} u^2\, d\mu = 2 \int_S u^2\, d\sigma$ (см. (3)), что вместе с оценкой (18) и завершает доказательство теоремы.

По той же схеме, что и в п. 2, выводятся соответствующие следствия. В частности, отметим последнее из них.

***Следствие* 3** (неравенство Фридрихса)**.** *В условиях теоремы* 2 *существует постоянная* C_1, *для которой при всех* $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}})$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|^2_{L_2(G)} \le C_1 \Big(\| | \overline{\mathbf{grad}}\, u | \|^2 + \|\gamma(u)\|^2_{L_2(S)} \Big).$$

***Замечание* 2.** Условия теоремы 2 очевидным образом выполняются в случае конечномерного H и классической лебеговой меры μ. Однако в случае бесконечномерного пространства H на данном этапе исследований, в отличие от первого варианта, автору не удалось предложить нетривиальный модельный пример, в котором одновременно выполнены все условия теоремы 2. Путь решения этой проблемы, по мнению автора, следует искать в ослаблении условий согласования области G с мерой μ (см. п. 1).

***Замечание* 3.** Полученные результаты остаются в силе в случае замены H на (бесконечномерное) риманово многообразие с заданной на нем конечной неотрицательной борелевской мерой (см. [9, 10]), а также в случае конечномерных римановых многообразий с классической мерой „риманов объем”. Соответствующие доказательства идентичны приведенным выше.

Литература

1. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.
2. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
3. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L^2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
4. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
5. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
6. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
7. *Богданский Ю. В.* Принцип максимума для лапласиана по мере в области гильбертова пространства // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 4. – С. 460 – 468.
8. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
9. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 7. – С. 897 – 907.
10. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1443 – 1449.

Получено 24.03.18