УДК 517.9

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. П. Журавльов (Житомир. нац. агроекол. ун-т),
О. О. Покутний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

We study the problems of existence and representations of the solutions bounded on the entire axis for both linear and nonlinear differential equations with unbounded operator coefficients in the Fréchet and Banach spaces under the condition of exponential dichotomy on the semiaxes of the corresponding homogeneous equation.

Исследуются вопросы существования и представления ограниченных на всей оси решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в пространствах Фреше и Банаха при условии экспоненциальной дихотомии на полуосях соответствующего однородного уравнения.

Одним із центральних питань якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання про поведінку розв'язків на нескінченності. Експоненціально дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так і необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядалися у роботах В. Коппеля [1], Р. Саккера, Дж. Селла [2 – 4], Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, В. Л. Кулика [5], а у нескінченновимірних просторах Банаха — у монографіях Ю. Л. Далецького, М. Г. Крейна [6], Х. Массери, Х. Шеффера [7]. К. Палмер [8] умову експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи послабив заміною її на умову експоненціальної дихотомії на півосях і вперше довів фредгольмовість відповідного оператора при розв'язанні задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботі [9], де з використанням узагальнено-обернених операторів та псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць досліджувалася задача про існування обмежених на всій осі розв'язків при лінійних та нелінійних збуреннях системи, а у роботі [10] отримано критерій існування та загальний вигляд обмежених на всій дійсній осі розв'язків лінійних неоднорідних функціонально-диференціальних систем із запізненням у випадку, коли відповідна однорідна система із запізненням є експоненціально діхотомічною на півосях.

Ці та інші результати знайшли своє відображення у монографіях О. А. Бойчука, А. М. Самойленка [11, 12]. Дослідженню фредгольмовості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено роботи Д. Хенрі [13], Х. Родрігеса, Дж. Філхо [14], А. Г. Баскакова [15 – 17], Ю. Латушкіна, Ю. Томілова [18].

Дану роботу присвячено питанню існування обмежених на всій осі розв'язків як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами у просторах Фреше та Банаха при умові експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння.

Лінійні рівняння з обмеженим оператором у просторі Банаха. Розглянемо диференціальне рівняння [19 – 22] з обмеженими операторними коефіцієнтами

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$, $f(t) \in BC(\mathbb{R},\ \mathbf{B})$, $A(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbf{B}))$,

$$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \Big\{ f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B},\ f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B}),\ |||f||| := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}} < \infty \Big\}$$

— банахів простір вектор-функцій, неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$; операторнозначна функція $A(t)$ є сильно неперервною з відповідною нормою $|||A||| := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\|_{\mathbf{B}} < \infty$. Необхідно знайти неперервно диференційовний у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $x(t)$ у просторі вектор-функцій Банаха $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ і обмежених разом з похідною, який задовольняє рівняння (1) скрізь на $\mathbb{R}$.

Припустимо, що однорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{2}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами $\mathcal{P}$ та $\mathcal{Q}$ відповідно, тобто існують проектори $\mathcal{P}(\mathcal{P}^2 = \mathcal{P})$ та $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q})$ і сталі $k_{1,2} \geq 1$ та $\alpha_{1,2} > 0$ такі, що

$$\big\|U(t)\mathcal{P}U^{-1}(s)\big\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\big\|U(t)(I-\mathcal{P})U^{-1}(s)\big\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad s \geq t, \qquad \text{для всіх} \quad t, s \in \mathbb{R}_+$$

та

$$\big\|U(t)\mathcal{Q}U^{-1}(s)\big\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\big\|U(t)(I-\mathcal{Q})U^{-1}(s)\big\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad s \geq t, \qquad \text{для всіх} \quad t, s \in \mathbb{R}_-,$$

де $U(t) = U(t, 0)$ — еволюційний оператор [6] рівняння (1) такий, що

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \qquad U(0) = I - \text{одиничний оператор.}$$

Теорема 1 [19]. *Нехай однорідне рівняння* (2) *є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами $\mathcal{P}$ та $\mathcal{Q}$ відповідно, а оператор*

$$D = \mathcal{P} - (I - \mathcal{Q}) : \mathbf{B} \to \mathbf{B} \tag{3}$$

— узагальнено-оборотним.

Тоді для існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (1) *необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0, \tag{4}$$

за виконання якої обмежені на всій осі розв'язки мають вигляд

$$x_0(t, c) = U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}c + \big(G[f]\big)(t), \quad c \in \mathbf{B}, \tag{5}$$

де

$$H(t) = \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{Q}U^{-1}(t) = \mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P})U^{-1}(t),$$

проектори $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^- D$ та $\mathcal{P}_{Y_D} = I - DD^-$, D^- — узагальнено-обернений до оператора D, c — довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$, $\big(G[f]\big)(t)$ — узагальнений оператор Гріна [19] *задачі про обмежені на всій осі розв'язки.*

***Зауваження* 1.** I. Якщо оператор $D : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — узагальнено-оборотний [11], то:

(i) D — нормально розв'язний $\big(\overline{R(D)} = R(D)\big)$;

(ii) підпростір $N(D) = \ker\ D$ має пряме доповнення в $\mathbf{B}$;

(iii) підпростір $R(D) = \operatorname{Im} D$ має пряме доповнення в $\mathbf{B}$.

За виконання цих умов для оператора D завжди існує узагальнено-обернений оператор D^-.

II. У скінченновимірному випадку, коли $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$, оператор D є скінченновимірною матрицею й властивості (i) – (iii) завжди виконуються (оскільки підпростори $N(D)$ та $R(D)$ скінченновимірні). Умова (4) рівносильна умові ортогональності неоднорідності рівняння (1) до розв'язків відповідного однорідного спряженого рівняння. У цьому випадку отримуємо відому лему К. Палмера [8].

III. Застосування теорії узагальнено-обернених операторів й псевдообернених матриць до дослідження вихідної задачі дозволяє отримати як раніше відомі результати, так і нові факти. Якщо ми розглянемо рівняння (1) у просторі $\mathbb{R}^n$ за припущення, що відповідне лінійне однорідне рівняння є експоненціально дихотомічним на півосях, то оператор

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$$

може бути лише нетеровим [9]. А у випадку, коли рівняння (1) розглядається у просторі Банаха $\mathbf{B}$, вихідна задача має значно більше варіантів. За класифікацією С. Г. Крейна [23] з теореми 1 випливає, що оператор L може бути:

1) нормально розв'язним $\big(\overline{R(L)} = R(L)\big)$;

2) d-нормальним $\big(\overline{R(L)} = R(L),\ \dim\operatorname{coker} L < \infty\big)$;

3) n-нормальним $\big(\overline{R(L)} = R(L),\ \dim\ker L < \infty\big)$;

4) нетеровим $\big(\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\operatorname{coker} L < \infty\big)$;

5) фредгольмовим $(\operatorname{ind} L = 0)$.

Лінійні та нелінійні рівняння з необмеженим оператором. У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \in J, \tag{6}$$

де при кожному $t \in J \subset \mathbb{R}$ оператор $A(t)$ є замкненим із щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t.

Означення 1 [14; 23, с. 237]. *Множина обмежених лінійних операторів* $\big\{T(t,s) \mid t \geq s;$ $t, s \in J\big\}$ *у просторі Банаха* $\mathbf{B}$ *називається еволюційним оператором, якщо виконуються такі умови*:

(i) $T(s,s) = I,\ s \in J$,

(ii) $T(t,\sigma)T(\sigma,s) = T(t,s),\ t \geq \sigma \geq s$ *в* J.

Якщо $T(t,s)$ *додатково задовольняє умову*

(iii) *для довільного* $x \in \mathbf{B}$ *відображення* $(t,s) \mapsto T(t,s)x$ *є неперервним*, $t \geq s$,

то говорять, що $T(t,s)$ — *сильно неперервний еволюційний оператор* (*або множина сильно неперервних еволюційних операторів*).

Якщо задача Коші, породжена рівнянням (6) та початковою умовою $x(s,s,x_0) = x_0 \in D$, рівномірно коректна [23], то можна визначити для $t \geq s$ на J лінійний оператор $T(t,s)\colon$ $D \to \mathbf{B}$ за правилом

$$T(t,s)x_0 = x(t,s,x_0).$$

Твердження 1 [23, с. 237 – 239]. *Припустимо, що задача Коші для рівняння* (6) *рівномірно коректна. Тоді множина лінійних операторів* $\{T(t,s), t \geq s, t, s \in J\}$, *яка визначена вище, є сильно неперервним еволюційним оператором. Крім того,* $T(t,s)D \subset D$, *і якщо* $x \in D$, *то* $T(t,s)x$ *диференційовний за змінною* t *та*

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t,s)x = A(t)T(t,s)x, \qquad t \geq s, \quad t, s \in J.$$

Якщо відображення $t \mapsto A(t)$ *сильно неперервне, то* $T(t,s)x$ *диференційовний для* $s < t$ *на* J *для всіх* $x \in D$ *і*

$$\frac{\partial}{\partial s} T(t,s)x = -T(t,s)A(s)x.$$

У цьому випадку кажуть, що $T(t,s)$ — еволюційний оператор, *асоційований* з рівнянням (6).

При фіксованому $t \geq s$ оператор $T(t,s)$ буде обмеженим лінійним оператором, а оскільки множина D щільна у $\mathbf{B}$, то його можна розширити на весь простір $\mathbf{B}$ за неперервністю, що у подальшому і припускається. Розширення еволюційного оператора на весь простір буде позначатися таким же чином.

Означення 2 [13, с. 245]. *Еволюційний оператор* $\{T(t,s) \mid t \geq s; t, s \in J\}$ *допускає експоненціальну дихотомію на* J, *якщо*:

(i) *існують проекторнозначна оператор-функція* $\{\mathcal{P}(t) \mid t \in J\}$ *у просторі лінійних неперервних операторів* $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ *і дійсні сталі* $\alpha > 0$ *та* $M \geq 1$ *такі, що*

$$T(t,s)\mathcal{P}(s) = \mathcal{P}(t)T(t,s), \quad t \geq s;$$

(ii) *звуження* $T(t,s) \restriction_{N(\mathcal{P}(s))}, t \geq s$ *оператора* $T(t,s)$ *на ядро* $N(\mathcal{P}(s))$ *проектора* $\mathcal{P}(s)$ *здійснює ізоморфізм з* $N(\mathcal{P}(s))$ *на* $N(\mathcal{P}(t))$.

Визначимо $T(s,t)$, як обернений:

$$T(s,t) = \left(T(t,s) \restriction_{N(\mathcal{P}(s))}\right)^{-1} : N(\mathcal{P}(t)) \to N(\mathcal{P}(s)),$$

(iii) $\left\|T(t,s)\mathcal{P}(s)\right\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s$;

(iv) $\left\|T(t,s)(I - \mathcal{P}(s))\right\| \leq Me^{-\alpha(s-t)}$, $s \geq t$.

Окремий інтерес становить вивчення експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}^-_s = (-\infty; s]$, $\mathbb{R}^+_s = [s; \infty)$ (у цьому випадку проекторнозначні функції, визначені на півосях, будемо позначати через $\mathcal{P}_+(t)$ для всіх $t \geq s$ та $\mathcal{P}_-(t)$ для всіх $t \leq s$ зі сталими M_1, α_1 та M_2, α_2 відповідно).

Встановимо необхідні та достатні умови існування слабких обмежених розв'язків для неоднорідного рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in J, \tag{7}$$

з неперервною та обмеженою функцією $f(t) \in BC(J, \mathbf{B}) = \{f : J \to \mathbf{B}\}$. Обмеженість розуміємо у сенсі, що $|||f||| = \sup_{t \in J} \|f(t)\| < \infty$.

Означення 3 [14]. *Вектор-функція*

$$u(t) = T(t,\tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s)\, ds, \quad t \geq \tau, \tag{8}$$

називається слабким (узагальненим) розв'язком на J неоднорідного рівняння (7), *якщо вона неперервна і задовольняє рівність* (8) *для кожного $t \in J$ за умови, що $f : J \to \mathbf{B}$ — неперервна вектор-функція, а $T(t,s)$ є асоційованим з* (6) *сильно неперервним еволюційним оператором на J.*

Має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $\{T(t,s) \mid t \geq s \in \mathbb{R}\}$ — сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з рівнянням* (6), *і виконано такі умови*:

1) *$T(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $\mathcal{P}_+(t)$ та $\mathcal{P}_-(t)$ відповідно*;

2) *оператор $D = \mathcal{P}_+(0) - \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]$ є узагальнено-оборотним.*

Тоді:

1) *для того щоб існували слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння* (7), *необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умову*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0, \tag{9}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)T(0,t)$;

2) *за виконання умови* (9) *рівняння* (7) *має множину слабких розв'язків*

$$x_0(t,c) = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \big(G[f]\big)(t,0) \qquad \forall c \in \mathbf{B}, \tag{10}$$

де

$$\big(G[f]\big)\,(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t T(t,\tau)\mathcal{P}_+(\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau + \\ \qquad \displaystyle +T(t,s)\mathcal{P}_+(s)D^-\left[\int_s^{\infty} T(s,\tau)\big(I - \mathcal{P}_+(\tau)\big)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \qquad \displaystyle \left. + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau\right], \quad t \geq s, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} T(t,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_t^{s} T(t,\tau)\big(I - \mathcal{P}_-(\tau)\big)f(\tau)\,d\tau + \\ \qquad \displaystyle +T(t,s)\big(I - \mathcal{P}_-(s)\big)D^-\left[\int_s^{\infty} T(s,\tau)\big(I - \mathcal{P}_+(\tau)\big)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \qquad \displaystyle \left. + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau\right], \quad s \geq t, \end{cases}$$

— *узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки, який задовольняє властивості*

$$\big(G[f]\big)(0+,0) - \big(G[f]\big)(0-,0) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt,$$

$$L\big(G[f]\big)(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Зауваження 2. Аналогічна теорема залишається правильною й у тому випадку, коли еволюційний оператор $T(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_s^+$ та $\mathbb{R}_s^-$.

Далі буде розглядатися випадок $s=0$.

Доведення. Розв'язки рівняння (7), обмежені на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$, мають вигляд

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi_1 - \displaystyle\int_t^{+\infty} T(t,\tau)\big[I-\mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t T(t,\tau)\mathcal{P}_+(\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t\geq 0, \\ T(t,0)\big[I-\mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 + \displaystyle\int_{-\infty}^t T(t,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^0 T(t,\tau)\big[I-\mathcal{P}_-(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau, \quad t\leq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Дійсно,

$$\big\|T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi_1\big\| \leq \big\|T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\big\|\,\|\xi_1\| \leq M_1e^{-\alpha_1 t}\|\xi_1\|$$

та

$$\frac{\partial(T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi_1)}{\partial t} = A(t)T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi_1.$$

Таким чином, вираз $T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi_1$ визначає всі обмежені на $\mathbb{R}_0^+$ розв'язки однорідного рівняння (6).

Доведемо тепер обмеженість інтеграла з (11):

$$\left\|\int\limits_t^{+\infty} T(t,\tau)[I-\mathcal{P}_+(\tau)]f(\tau)\,d\tau\right\| \leq \int\limits_t^{+\infty} \big\|T(t,\tau)\big[I-\mathcal{P}_+(\tau)\big]\big\|\,\big\|f(\tau)\big\|d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|\int\limits_t^{+\infty} M_1e^{\alpha_1(t-\tau)}d\tau = \frac{M_1}{\alpha_1}|||f||| < \infty.$$

Обмеженість інших інтегралів перевіряється аналогічно. Безпосередньою перевіркою легко переконатись у тому, що вираз (11) дійсно визначає всі обмежені розв'язки рівняння (7) на півосях.

Для того щоб вираз (11) визначав слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння (7), необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$x(0+,\xi_1,\xi_2) = x(0-,\xi_1,\xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$\mathcal{P}_+(0)\xi_1 - \int\limits_0^{+\infty} T(0,\tau)\big[I-\mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \big[I-\mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 + \int\limits_{-\infty}^0 T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Якщо ξ_1 та ξ_2 — розв'язки рівняння (12), то, підставивши їх в (11), отримаємо слабкий обмежений на всій осі розв'язок рівняння (7).

Покажемо, що за виконання умов теореми множину слабких обмежених на всій осі розв'язків рівняння (7) можна знайти у вигляді

$$x(t,\xi) = \begin{cases} T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\xi - \displaystyle\int_t^{+\infty} T(t,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big] f(\tau)\, d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t T(t,\tau)\mathcal{P}_+(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0, \\ T(t,0)\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi + \displaystyle\int_{-\infty}^t T(t,\tau)\mathcal{P}_-(\tau) f(\tau)\, d\tau - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^0 T(t,\tau)\big[I - \mathcal{P}_-(\tau)\big] f(\tau)\, d\tau, \quad t \leq 0, \end{cases} \tag{13}$$

тобто потужності множин слабких обмежених розв'язків (11) та (13) збігаються й елементи ξ_1 та ξ_2 можна вибрати однаковими: $\xi = \xi_1 = \xi_2$.

Очевидно, що будь-який обмежений розв'язок вигляду (13) міститься у множині слабких обмежених розв'язків (11) за виконання умов розв'язності.

Запишемо рівняння (12) у вигляді

$$\mathcal{P}_+(0)\xi_1 = \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 + g, \tag{14}$$

де

$$g = \int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau) f(\tau)\, d\tau + \int\limits_{0}^{+\infty} T(0,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big] f(\tau)\, d\tau.$$

Домноживши (14) на $\mathcal{P}_+(0)$ зліва і використавши той факт, що $\mathcal{P}_+^2(0) = \mathcal{P}_+(0)$, отримаємо

$$\mathcal{P}_+(0)\xi_1 = \mathcal{P}_+(0)\big[[I - \mathcal{P}_-(0)]\xi_2 + g\big].$$

Далі, підставивши $\mathcal{P}_+(0)\xi_1$ у (14), будемо мати

$$\mathcal{P}_+(0)\big[[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 + g\big] = \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 + g,$$

або

$$\mathcal{P}_+(0)\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 - \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 = g - \mathcal{P}_+(0)g.$$

Оскільки $\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]^2 = I - \mathcal{P}_-(0)$, то отримаємо рівняння

$$\mathcal{P}_+(0)\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 - \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]^2\xi_2 = g - \mathcal{P}_+(0)g,$$

яке можна записати у вигляді

$$D\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2 = \big[I - \mathcal{P}_+(0)\big]g. \tag{15}$$

За умовою теореми оператор D є узагальнено-оборотним і, як наслідок, нормально розв'язним, тому [11] необхідною й достатньою умовою розв'язності (15) відносно $\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]\xi_2$ буде умова

$$\mathcal{P}_{Y_D}\big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]g = 0.$$

Оскільки $\mathcal{P}_{Y_D}D = 0$ [12], то

$$\mathcal{P}_{Y_D}D = \mathcal{P}_{Y_D}\big[\mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)]\big] = 0,$$

звідки

$$\mathcal{P}_{Y_D}\big[I - \mathcal{P}_+(0)\big] = \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0).$$

Оскільки еволюційний оператор $\big\{T(t,s) \mid t \geq s; t, s \in J\big\}$ допускає експоненціальну дихотомію на J, то, використовуючи умову (i) з означення 2, отримуємо $T(0,s)\mathcal{P}(s) = \mathcal{P}(0)T(0,s)$. Виходячи з цього, знаходимо $\mathcal{P}_{Y_D}g$:

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau + \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_{0}^{+\infty} T(0,\tau)[I - \mathcal{P}_+(\tau)]f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-^2(0)\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)f(\tau)\,d\tau + \mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))^2\int\limits_{0}^{+\infty} T(0,\tau)f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{P}_-(0)T(0,\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{+\infty}\big[I - \mathcal{P}_+(0)\big]T(0,\tau)f(\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)g = \mathcal{P}_{Y_D}[I - \mathcal{P}_+(0)]g = 0.$$

Умова $\mathcal{P}_{Y_D}g = 0$ є необхідною та достатньою для розв'язності рівняння $D\xi = g$, або $\mathcal{P}_+\xi = (I - \mathcal{P}_-)\xi + g$, яке збігається з рівнянням (14), якщо покласти $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Таким чином, доведено, що множина обмежених розв'язків (11) є підмножиною множини обмежених розв'язків (13) і тим самим вони збігаються між собою. Отже, умова існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (7) рівносильна розв'язності операторного рівняння

$$D\xi = \int\limits_{0}^{\infty} T(0,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Оскільки оператор D узагальнено-оборотний, то рівняння (16) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{Y_D}\left[\int\limits_{0}^{\infty} T(0,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] = 0.$$

За виконання цієї умови рівняння (16) має множину розв'язків

$$\xi = D^-\left[\int\limits_{0}^{\infty} T(0,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big]f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(D)}c,$$

де c — довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$. Підставивши отримані розв'язки в (11), отримаємо (10).

Перевіримо властивість узагальненого оператора Гріна відносно стрибка у точці $t = 0$:

$$\big(G[f]\big)(0+0) - \big(G[f]\big)(0-0) =$$

$$= -\int\limits_0^\infty T(0,\tau)\big[I - \mathcal{P}_+(\tau)\big] f(\tau)\, d\tau + \mathcal{P}_+(0) D^- g -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^0 T(0,\tau)\mathcal{P}_-(\tau) f(\tau)\, d\tau - \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big] D^- g =$$

$$= -g + \mathcal{P}_+(0) D^- g - D^- g + \mathcal{P}_-(0) D^- g =$$

$$= [\mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_-(0)] D^- g - g = D D^- g - g =$$

$$= -[I - DD^-] g = -\mathcal{P}_{Y_D} g = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t)\, dt.$$

Друга властивість перевіряється безпосередньою підстановкою оператора Гріна у рівняння (7).

Теорему 2 доведено.

Покажемо зв'язок між доведеним твердженням та результатами роботи [14]. Для цього сформулюємо допоміжну лему.

Лема 1. *Якщо проектори $\mathcal{P}_+(0)$ та $\mathcal{P}_-(0)$ комутують, то оператор $D = \mathcal{P}_+(0) - \big[I - \mathcal{P}_-(0)\big]$ завжди має узагальнено-обернений, який збігається з оператором D.*

Доведення. Знайдемо спочатку D^2:

$$D^2 = (\mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_-(0))(\mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_-(0)) =$$

$$= \mathcal{P}_+^2(0) - \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0) + I - \mathcal{P}_-(0) + \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0) + \mathcal{P}_-^2(0) =$$

$$= 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0) + I,$$

оскільки $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0)$.

Тоді

$$D^3 = D^2 D = (2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0) + I)(\mathcal{P}_+\big(0) - I + \mathcal{P}_-(0)\big) =$$

$$= 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_+^2(0) - \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_+(0) - 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) +$$

$$+ \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_-(0) - I + 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-^2(0) - \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_-^2(0) + \mathcal{P}_-(0) =$$

$$= -2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) + 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) + \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_-(0) - I = D.$$

З отриманої рівності випливає, що $DDD = D$, а це й означає, що D є узагальнено-оборотним і $D = D^-$.

***Зауваження* 3.** Основні результати роботи [14] отримано за припущення, що проектори $\mathcal{P}_+(0)$ та $\mathcal{P}_-(0)$ комутують. З леми 1 та теореми 2, як наслідок, отримуємо результати [14].

***Зауваження* 4.** Оскільки фредгольмів оператор є узагальнено-оборотним, то умови доведеної теореми задовольняє випадок, який розглянуто у [18].

Нелінійні диференціальні рівняння у просторі Банаха з необмеженим оператором у лінійній частині. У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t). \tag{17}$$

Будемо шукати обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (17), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c)$ породжуючого рівняння (7).

Для знаходження необхідної умови будемо припускати, що оператор-функція $Z(x,t,\varepsilon)$ задовольняє вимогу

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C\big[\|x - x_0\| \le q\big] \times BC(\mathbb{R},\mathbf{B}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q — деяка додатна стала (неперервність в околі породжуючого розв'язку).

Покажемо, що ця проблема може бути розв'язаною з допомогою операторного рівняння

$$F(c) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c),t,0)\,dt = 0, \tag{18}$$

яке за аналогією з [12] будемо називати рівнянням для породжуючих елементів.

Теорема 3 (необхідна умова). *Припустимо, що однорідне рівняння* (6) *є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $\mathcal{P}_+(t)$ *та* $\mathcal{P}_-(t)$ *відповідно, а нелінійне рівняння* (17) *має обмежений розв'язок* $x(\cdot,\varepsilon)$, *який перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння* (7) *з елементом* $c = c^0 : x(t,0) = x_0(t,c^0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Тоді цей елемент повинен задовольняти рівняння* (18) *для породжуючих елементів.*

Доведення. Якщо рівняння (17) має обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$, то за теоремою 2 повинна виконуватись умова розв'язності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\Big\{f(t) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big\}\,dt = 0. \tag{19}$$

Враховуючи умову (9), отримуємо, що умова (19) еквівалентна такій:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt = 0.$$

При $\varepsilon \to 0$ $x(t,\varepsilon) \to x_0(t,c^0)$. Остаточно (використовуючи неперервність оператор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ отримуємо

$$F(c^0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c^0),t,0)\,dt = 0,$$

що й доводить теорему.

Для розв'язання задачі про достатні умови існування обмежених розв'язків рівняння (17) будемо додатково припускати, що оператор-функція $Z(x,t,\varepsilon)$ сильно диференційовна в околі породжуючого розв'язку

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1\big[\|x-x_0\| \le q\big].$$

У рівнянні (17) виконаємо заміну змінних $x(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon)$, де елемент c^0 задовольняє (18). У підсумку отримаємо рівняння відносно y:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + \varepsilon Z\big(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big). \tag{20}$$

Оскільки оператор $Z(x,t,\varepsilon)$ є диференційовним за Фреше в околі породжуючого розв'язку, то його можна записати у вигляді

$$Z\big(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big) = Z\big(x_0(t,c^0),t,0\big) + A_1(t)y(t,\varepsilon) + R\big(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big), \tag{21}$$

де $A_1(t) = Z_v^{(1)}(v,t,\varepsilon)\,|_{v=x_0,\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше), а для членів більш високого порядку $R(y,t,\varepsilon)$ будуть виконуватись співвідношення

$$R(0,t,0)=0, \qquad R_x^{(1)}(0,t,0)=0.$$

Ця задача може бути розв'язаною з допомогою оператора

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}\,dt \colon \mathbf{B}\to\mathbf{B}. \tag{22}$$

Теорема 4 (достатня умова). *Припустимо, що однорідне рівняння* (6) *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $\mathcal{P}_+(t)$ *та* $\mathcal{P}_-(t)$ *відповідно, а породжуюче рівняння* (7) *має обмежені розв'язки у вигляді* (11).

Нехай для оператора B_0 *виконано такі умови*:

1) *оператор* B_0 *є узагальнено-оборотним*;

2) $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)=0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, *що задовольняє рівняння для породжуючих елементів* (18), *існує принаймні один слабкий обмежений розв'язок рівняння* (17). *Цей розв'язок можна знайти з допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(x_0(\tau,c^0)+y_k,\tau,\varepsilon)\big](t,0),$$

$$c_k = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\big\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + R(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big\}d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \qquad k=0,1,2,\ldots, \quad y_0(t,\varepsilon)=0,$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Доведення. Необхідно знайти обмежений розв'язок $y(t,\varepsilon)\colon y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(\mathbb{R},\mathbf{B}), y(t,\cdot) \in \in C[0,\varepsilon_0], y(t,0) = 0$. Очевидно, що розв'язність рівняння (20) еквівалентна розв'язності рівняння (17). За теоремою 2 рівняння (20) розв'язне тоді і лише тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z\big(x_0(t,c^0)+y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big)dt = 0. \tag{23}$$

За виконання цієї умови множина обмежених розв'язків рівняння (20) матиме вигляд

$$y(t,\varepsilon) = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)\big](t,0).$$

Умова (23) з використанням (21) набере вигляду операторного рівняння

$$B_0 c = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big\}dt. \tag{24}$$

За умовою теореми оператор B_0 є узагальнено-оборотним (нормально розв'язним), тому необхідною й достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (24) буде умова

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big\}dt = 0,$$

яка виконується згідно з припущенням 2

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}H(t) = \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)T(0,t) = 0.$$

Тоді рівняння (24) має хоча б один розв'язок

$$c = -B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big\}\,dt.$$

Таким чином, маємо операторну систему

$$y(t,\varepsilon) = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

$$c = -B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big\}dt, \tag{25}$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)\big](t,0).$$

Введемо допоміжний вектор $u = (y,c,\overline{y})^T \in \mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$, що належить декартовому добутку $\mathbf{B}^3$ (T означає операцію транспонування), і допоміжний оператор

$$L_1 g = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) A_1(t) g(t)\, dt.$$

Тоді операторна система (25) набере вигляду

$$u = \begin{bmatrix} 0 & T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) R(y,t,\varepsilon)\, dt \\ \varepsilon G\big[Z(x_0 + y, \tau, \varepsilon)\big](t,0) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix} I & -T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) R(y,t,\varepsilon)\, dt \\ \varepsilon G\big[Z(x_0 + y, \tau, \varepsilon)\big](t,0) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Введемо позначення

$$W = \begin{bmatrix} I & -T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) R(y,t,\varepsilon)\, dt \\ \varepsilon G\big[Z(x_0 + y, \tau, \varepsilon)\big](t,0) \end{pmatrix}.$$

Оператор W має обмежений обернений W^{-1}. Дійсно, оператор W^{-1} можна записати у явному вигляді

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} I & T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Те, що так визначений оператор W^{-1} задовольняє рівність $WW^{-1} = W^{-1}W = I$, перевіряється безпосередньою підстановкою.

Доведемо, що W^{-1} — обмежений оператор. Для цього необхідно довести, що існує така стала $k > 0$, що для всіх $u \in \mathbf{B}^3$ виконується нерівність $\|W^{-1}u\|_{\mathbf{B}^3} \le k\|u\|_{\mathbf{B}^3}$. Ця нерівність еквівалентна [23] такій: для довільних $y, c, \overline{y} \in \mathbf{B}$

$$|||W^{-1}(y, c, \overline{y})^T|||_{\mathbf{B}^3} \le k\big(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}\big),$$

$$W^{-1}(y, c, \overline{y})^T = \begin{pmatrix} y + T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} c + T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} L_1 \overline{y} + \overline{y} \\ c + L_1 \overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Доведемо обмеженість норми кожної компоненти вектора у просторі Банаха $\mathbf{B}$:

$$|||y + T(\cdot,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + T(\cdot,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\leq |||y|||_{\mathbf{B}} + |||T(\cdot,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}|||_{\mathbf{B}}|||c|||_{\mathbf{B}} + |||T(\cdot,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} +$$

$$+ |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + c_1|||c|||_{\mathbf{B}} + c_2|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Аналогічно

$$|||c + L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||c|||_{\mathbf{B}} + |||L_1|||_{\mathbf{B}}|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||c|||_{\mathbf{B}} + c_3|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Таким чином,

$$|||W^{-1}(y,c,\overline{y})^T|||_{\mathbf{B}^3} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + (c_1+1)|||c|||_{\mathbf{B}} + (1 + c_2 + c_3)|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\leq k(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

де $k = \max\{1, 1+c_1, 1+c_2+c_3\}$. Виходячи з цього, отримуємо обмеженість оператора W^{-1}.

Тепер операторну систему (25) запишемо у вигляді

$$u = W^{-1}g = W^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку є нелінійним. Варіюючи параметром ε і використовуючи обмеженість оператора W^{-1}, можемо досягти того, щоб оператор $W^{-1}S(\varepsilon)$ був стискаючим. Тоді з принципу стискаючих відображень [23] випливає, що операторна система (25) має єдину нерухому точку, яка й визначає обмежений розв'язок рівняння (17).

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Для встановлення зв'язку між необхідною та достатньою умовами розв'язності рівняння (17) встановимо спочатку допоміжне твердження.

***Наслідок* 1.** *Припустимо, що оператор $F(c)$ має похідну у сенсі Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Банаха $\mathbf{B}$, що задовольняє рівняння* (18) *для породжуючих елементів. Якщо оператор B_0 має обмежений обернений, то рівняння* (18) *має єдиний обмежений на всій осі розв'язок для кожного c^0.*

Доведення. Маємо

$$F^{(1)}(c)[h] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)\Big|_{v=x_0,\varepsilon=0}\big[x_0^{(1)}(t,s,c)[h]\big]dt.$$

Це зображення випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень у просторі Банаха [24]. Знайдемо похідну від розв'язку $x_0^{(1)}(t,c)$ по c. Оскільки

$$x_0(t,c) = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \big(G[f]\big)(t,0),$$

то [24]

$$x_0^{(1)}(t,c)[h] = \frac{\partial x_0(t, c+\alpha h)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}h \quad \text{та} \quad Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0} = A_1(t).$$

Остаточно

$$F^{(1)}(c)[h] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}\,dt[h] = B_0[h].$$

Оскільки оператор $F^{(1)}(c)$ оборотний, то оператор B_0 також оборотний. Тому рівняння (18) має єдиний розв'язок, а тоді й рівняння (17) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок.

***Зауваження* 5.** Якщо умови наслідку виконуються, то з його доведення випливає рівність операторів $B_0 = F^{(1)}(c^0)$. Оскільки оператор $F^{(1)}(c)$ є оборотним, то для оператора B_0 умови 1 та 2 достатньої умови виконуються. У цьому випадку рівняння (17) буде мати єдиний обмежений розв'язок для кожного $c^0 \in \mathbf{B}$. Таким чином, умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ пов'язує між собою необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c^0 рівняння для породжуючих констант [11].

Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь у локально-опуклих просторах. Дослідження диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах і просторах Фреше є актуальною задачею у зв'язку із застосуваннями у математичній фізиці.

У даному пункті розглядається узагальнення означень е-дихотомії для еволюційних рівнянь у локально-опуклих просторах з необмеженою оператор-функцією. Наводяться необхідні та достатні умови існування узагальнених обмежених розв'язків для диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Фреше з необмеженим оператором.

У повному локально-опуклому просторі E розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in J, \tag{27}$$

де для кожного $t \in J$ $A(t)$ — лінійна замкнена оператор-функція з незалежною від часу t щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset E$, вектор-функція $f(t)$ обмежена й неперервна на J.

Припустимо, що існує обмежена оператор-функція $U(t)$, $t \in J$ з областю визначення $D(U(t)) = D$, яка для кожного $x \in D$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}\Big(U(t)x\Big) = A(t)U(t)x, \qquad U(0) = I.$$

Оскільки множина D щільна в E, то $U(t)$ можна розширити за неперервністю на весь простір E. Оператор-функцію $U(t)$ традиційно будемо називати *еволюційним оператором*, що відповідає однорідному рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \in J. \tag{28}$$

Для простоти викладення додатково припускаємо, що при кожному t еволюційний оператор $U(t)$ має обмежений обернений $U^{-1}(t)\colon E \to E$ (так званий параболічний випадок).

Означення 4. *Якщо $f\colon J \to E$ неперервна, обмежена й $U(t)$ — еволюційний оператор, то вектор-функцію $u(t)$ будемо називати узагальненим* (*слабким*) *розв'язком рівняння* (27), *якщо $u(t)$ неперервна і рівність*

$$u(t) = U(t)U^{-1}(\tau)u(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} U(t)U^{-1}(s)f(s)\,ds, \quad t \geq \tau, \tag{29}$$

виконується для довільного $t \in J$.

Означення 5 [21]**.** *Будемо казати, що рівняння* (28) *допускає експоненціальну дихотомію на J, якщо існує проектор $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E)$ такий, що для довільної напівнорми $q \in \operatorname{Spec}\ E$ існують напівнорма $p \in \operatorname{Spec}\ E$ і сталі $K \geq 1$, $\alpha > 0$ такі, що виконуються нерівності*

$$q(U(t)\mathcal{P}U^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(t-s)}p(\xi), \quad t \geq s,$$

$$q(U(t)(I-\mathcal{P})U^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(s-t)}p(\xi), \quad s \geq t,$$

де $\operatorname{Spec}\ E$ — *множина всіх напівнорм, заданих на* E.

Це означення дозволяє дослідити питання щодо існування узагальнених розв'язків за аналогією з тим, як це було зроблено у просторі Банаха.

Теорема 5. *Нехай однорідне рівняння* (28) *є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_-$ *з проекторами* $\mathcal{P}_+$ *та* $\mathcal{P}_-$ *відповідно.*

Тоді:

1) *для того щоб рівняння* (27) *мало узагальнені обмежені розв'язки, необхідно і достатньо, щоб операторне рівняння*

$$\mathcal{P}_+\xi_1 - (I-\mathcal{P}_-)\xi_2 = g, \tag{30}$$

де

$$g = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{P}_- U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{0}^{+\infty} (I-\mathcal{P}_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

мало розв'язки;

2) *за виконання умов розв'язності рівняння* (30) *узагальнені обмежені на всій осі розв'язки рівняння* (27) *мають вигляд*

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} U(t)\mathcal{P}_+\xi_1 - \displaystyle\int_t^{+\infty} U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t U(t)[I-\mathcal{P}_+]U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0, \\ U(t)(I-\mathcal{P}_-)\xi_2 + \displaystyle\int_{-\infty}^t U(t)\mathcal{P}_-U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^0 U(t)[I-\mathcal{P}_-]U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t \leq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Доведення. Розв'язки рівняння (27), обмежені на півосях, мають вигляд (31). Дійсно, доведемо, наприклад, що (31) визначають обмежені розв'язки для невід'ємної дійсної півосі $t \geq 0$.

З визначення еволюційного оператора для рівняння (27) маємо

$$\frac{d(U(t)\mathcal{P}_+\xi_1)}{dt} = A(t)U(t)\mathcal{P}_+\xi_1.$$

З е-дихотомічності рівняння (28) випливає, що для довільної напівнорми $q \in \operatorname{Spec} E$ існує напівнорма $p \in \operatorname{Spec} E$ така, що

$$q(U(t)\mathcal{P}_+\xi_1) \leq K_1 e^{-\alpha t}p(\xi_1), \quad t \geq 0.$$

Таким чином, $U(t)\mathcal{P}_+\xi_1$ визначає множину обмежених розв'язків однорідного рівняння (28)

$$\frac{d\left(-\displaystyle\int_t^{+\infty} U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau + \int_0^t U(t)(I-\mathcal{P}_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right)}{dt} =$$

$$= U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(t)f(t) + A(t)\int\limits_0^t U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau +$$

$$+U(t)(I-\mathcal{P}_-)U^{-1}(t)f(t) - A(t)\int\limits_t^{+\infty} U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau =$$

$$= f(t) + A(t)\left\{-\int\limits_t^{+\infty} U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t U(t)(I-\mathcal{P}_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Доведемо обмеженість одного з інтегралів:

$$q\left(\int\limits_t^{+\infty} U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right) \le \int\limits_t^{+\infty} q\big(U(t)\mathcal{P}_+U^{-1}(\tau)f(\tau)\big)\,d\tau \le$$

$$\le \int\limits_t^{+\infty} K_1e^{-\alpha(t-\tau)}p\big(f(\tau)\big)\,d\tau \le \sup_{\tau\in\mathbb{R}} p\big(f(\tau)\big)\frac{K_1}{\alpha}.$$

Цілком аналогічно доводиться обмеженість інших доданків. Для того щоб вираз (31) визначав обмежені розв'язки на всій осі, необхідно і достатньо, щоб

$$x(0+,\xi_1,\xi_2) = x(0-,\xi_1,\xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$\mathcal{P}_+\xi_1 - (I-\mathcal{P}_-)\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} U(t)\mathcal{P}_-U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{+\infty} U(t)(I-\mathcal{P}_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Якщо рівняння (32) розв'язне, то, підставивши його розв'язки у (31), отримаємо узагальнені обмежені розв'язки рівняння (27).

Далі розглянемо рівняння (27) у просторі Фреше. Допоміжний оператор має вигляд $S := \big[\mathcal{P}_+,\ \mathcal{P}_- - I\big]$ та вектор $\xi = \operatorname{col}(\xi_1,\xi_2)$. Тоді рівняння (30) можна записати у вигляді

$$S\xi = g.$$

У загальному випадку умова $\mathcal{P}_{Y_S}g = 0$ не гарантує розв'язність рівняння (30), оскільки введений оператор S може не бути нормально розв'язним, а тому рівняння (30) не матиме розв'язків. У цьому випадку зображення (31) дає узагальнені (слабкі) обмежені розв'язки лише на півосях.

Для отримання повного результату необхідні додаткові умови на оператор $D = \mathcal{P}_+ - I + \mathcal{P}_-$, які дозволять отримати розв'язність рівняння (30). Тому будемо розглядати це ж рівняння, але у просторі Фреше F. Його геометрія дозволяє ввести поняття сильного узагальнено-оберненого оператора і тим самим уточнити отриману теорему.

Відомо [26], що якщо простір Фреше розкладається в алгебраїчну пряму суму підпросторів, то він розкладається й у топологічну пряму суму цих же підпросторів. Цей факт робить дослідження рівняння (30) у просторі Фреше простішим, ніж у загальних топологічних просторах, і дозволяє доповнити теорему 5.

Теорема 6. *Нехай однорідне рівняння* (28) *є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_+$ *та* $\mathbb{R}_-$ *з проекторами* $\mathcal{P}_+$ *та* $\mathcal{P}_-$ *відповідно, а оператор*

$$D = \mathcal{P}_+ - I + \mathcal{P}_- : F \to F$$

— сильним (X, Y)*-узагальнено-оборотним* [27].

Тоді:

1) *для того щоб існували узагальнені обмежені на всій осі розв'язки рівняння* (27), *необхідно та достатньо, щоб вектор-функція* $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ *задовольняла умову*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0, \tag{33}$$

де $H(t) = (I - \overline{D}D^{-}_{X,Y})\mathcal{P}_- U^{-1}(t)$, $\overline{D}$ *— розширення оператора* D *на поповнений простір* $\overline{F}$;

2) *за виконання умови* (33) *узагальнені розв'язки рівняння* (27) *будуть мати вигляд*

$$x_0(t,c) = U(t)\mathcal{P}_+ P_{N(\overline{D})}c + \overline{(G[f])}(t) \quad \forall c \in \overline{F}, \tag{34}$$

де

$$\overline{(G[f])}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)\mathcal{P}_+ f(\tau)\,d\tau - \int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I - \mathcal{P}_+)f(\tau)\,d\tau + \\ \displaystyle\qquad + U(t)\mathcal{P}_+ D^{-}_{X,Y}\left[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-\mathcal{P}_+)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \displaystyle\qquad \left. + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)\mathcal{P}_- f(\tau)\,d\tau\right], \quad t \geq 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)\mathcal{P}_- f(\tau)\,d\tau - \int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I - \mathcal{P}_-)f(\tau)\,d\tau + \\ \displaystyle\qquad + U(t)(I-\mathcal{P}_-)D^{-}_{X,Y}\left[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-\mathcal{P}_+)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \displaystyle\qquad \left. + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)\mathcal{P}_- f(\tau)\,d\tau\right], \quad t \leq 0, \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна, розширений на $\overline{F}$.

З урахуванням введених означень деталі методики доведення теореми такі ж, як і попередньої. Якщо оператор D має узагальнено-обернений, то з теореми 6 отримаємо результат роботи [28].

***Приклад* 1.** Розглянемо рівняння (27) у вигляді зліченної системи з діагональним оператором

$$A(t) = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{th\,t, \ldots, th\,t}_{k}, -th\,t, -th\,t, \ldots\Big\}$$

у просторах $l^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$ $\Big($з системою напівнорм $\big\|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\big\|^2_{n, l^2_{\mathrm{loc}}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2,\ n \in \mathbb{N}\Big)$ або Кьоте з різними ваговими векторами (означення див., наприклад, у [25]). Тоді рівняння (27) є експоненціально дихотомічним на півосях з проекторами

$$\mathcal{P}_+ = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, 1, \ldots\Big\}, \qquad \mathcal{P}_- = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots\Big\}$$

відповідно.

Еволюційний оператор має вигляд

$$U(t) = \operatorname{diag}\Bigg\{\underbrace{\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \ldots, \frac{e^t + e^{-t}}{2}}_{k}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \ldots\Bigg\}.$$

Таким чином, згідно з теоремою 6 маємо

$$D = \mathcal{P}_+ - I + \mathcal{P}_- = 0, \qquad \mathcal{P}_{N(D)} = I, \qquad \mathcal{P}_{Y_D} = I,$$

і оскільки $\dim R[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-] = k$, то оператор $\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-$ є скінченновимірним, $H(t) = \operatorname{diag}\{H_k(t), 0\}$, де $H_k(t) = \operatorname{diag}\big\{2/(e^t + e^{-t}), \ldots, 2/(e^t + e^{-t})\big\}$ — $(k \times k)$-вимірна матриця. Необхідна і достатня умова існування узагальнених обмежених розв'язків у просторі Фреше набере вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t)\, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}}\, dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}}\, dt = 0. \end{cases}$$

***Приклад* 2.** У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо крайову задачу з умовами на нескінченності

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{35}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \tag{36}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$,

$$f(t) \in BC(R, \mathbf{B}) := \Big\{f(\cdot) \colon R \to \mathbf{B}, |||f||| = \sup_{t \in R} \|f(t)\| < \infty\Big\},$$

операторнозначна функція $A(t)$ сильно неперервна з відповідною нормою

$$|||A||| = \sup_{t \in R} \|A(t)\| < +\infty;$$

$$BC^1(R, \mathbf{B}) := \Big\{x(\cdot) \in C^1(R, \mathbf{B}), |||x||| = \sup_{t \in R}\big\{\|x(t)\|, \|x'(t)\|\big\} < \infty\Big\}$$

— простір функцій, неперервних на $\mathbb{R}$ разом із похідною, l — лінійний та обмежений оператор, що діє з простору $BC^1(R, \mathbf{B})$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$. Визначимо умови існування розв'язків $x(\cdot) \in BC^1(R, \mathbf{B})$ крайової задачі (35), (36) за припущення, що відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{37}$$

допускає експоненціальну дихотомію [6, 8, 29] на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами $\mathcal{P}$ та $\mathcal{Q}$ і сталими $k_{1,2} \geq 1$ та $\alpha_{1,2} > 0$ відповідно. Еволюційний оператор, нормований у нулі, будемо позначати $U(t)$.

Покажемо, що за виконання умов теореми 2 крайова задача (35), (36) може бути розв'язана з допомогою оператора

$$Q_0 = lU(\cdot)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to \mathbf{Y}.$$

Теорема 7. *Нехай оператор $Q_0 : \mathbf{B} \to \mathbf{Y}$ є узагальнено-оборотним.*
Тоді:

(i) *для існування розв'язків крайової задачі* (35), (36) *необхідно й достатньо*, *щоб*

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_0}}\big[\alpha - l(\big(G[f]\big)(\cdot))\big] = 0; \tag{38}$$

(ii) *за виконання умови* (38) *розв'язки крайової задачі* (35), (36) *мають вигляд*

$$x(t,\overline{c}) = U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q_0)}\overline{c} + U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}Q_0^-\big[\alpha - l\big(G[f]\big)(\cdot)\big] + \big(G[f]\big)(t),$$

де $\overline{c} \in \mathbf{B}$ — довільний елемент, $\big(G[f]\big)(\cdot)$ — узагальнений оператор Гріна, Q_0^- — узагальнено-обернений оператор до оператора Q_0, $\mathcal{P}_{Y_{Q_0}}$ — проектор, *який проектує $\mathbf{B}$ на підпростір $\mathbf{Y} \ominus R(Q_0)$.*

Доведення. З теореми випливає, що множина обмежених розв'язків рівняння (35) має вигляд $x(t,c) = U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}c + \big(G[f]\big)(t)$. Підставимо ці розв'язки у крайову умову (36) і отримаємо операторне рівняння

$$Q_0 c = \alpha - l\big(G[f]\big)(\cdot).$$

За умовою теореми оператор Q_0 є узагальнено-оборотним, тоді для існування розв'язків крайової задачі (35), (36) необхідно та достатньо [11], щоб

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_0}}\big[\alpha - l(\big(G[f]\big)(\cdot))\big] = 0.$$

Множина обмежених розв'язків крайової задачі (35), (36) має вигляд

$$x(t,\overline{c}) = U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q_0)}\overline{c} + U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}Q_0^-\big[\alpha - l\big(G[f]\big)(\cdot)\big] + \big(G[f]\big)(t).$$

Зауваження 6. Якщо $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, $lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha, \alpha) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, де α — положення рівноваги (35), то всі обмежені розв'язки крайової задачі (35), (36) є „гомоклінічними" траєкторіями [30]. Наведемо інші приклади крайових умов, які можна дослідити з допомогою наведених вище результатів:

a) $lx(\cdot) = x(+\infty) - x(-\infty) = \alpha$;

b) $lx(\cdot) = x(+\infty) - Ax(-\infty) = \alpha$,

де $\mathbf{B} = \mathbf{Y}$, оператор A лінійний та обмежений, що діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе, $A \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$, $\alpha \in \mathbf{B}$;

c) $lx(\cdot) = A_1 x(+\infty) - A_2 x(-\infty) = \alpha$, де оператори A_1, A_2 лінійні та обмежені, що діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{B}, \mathbf{Y})$.

Розглянемо, наприклад, крайову задачу, де оператор крайових умов l визначається таким чином:

$$lx(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} A_i x(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i x(t_i) = \alpha,$$

де $m, n \in \mathbb{N},\ m < n;\ t_i < 0,\ i = \overline{1, m};\ t_i > 0,\ i = \overline{m+1, n}$; оператори $A_i \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{Y}),\ i = \overline{1, m}$; $B_i \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{Y}),\ i = \overline{m+1, n};\ \alpha \in \mathbf{Y};\ \mathbf{H}, \mathbf{Y}$ — простори Гільберта. У такому випадку оператор

$$Q_0 = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i U(t_i) \right) \mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}.$$

Як наслідок із теореми 7 отримаємо таке твердження.

***Наслідок* 2.** *Припустимо, що*

$$R\left(\left(\sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i U(t_i) \right) \mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\right) = \overline{= R\left(\left(\sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i U(t_i) \right) \mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\right)}.$$

Тоді:

(i) *для існування розв'язків крайової задачі* (35), (36) *необхідно й достатньо, щоб*

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_0}} \left[\alpha - \sum_{i=1}^{m} A_i \big(G[f]\big)(t_i) - \sum_{i=m+1}^{n} B_i \big(G[f]\big)(t_i) \right] = 0; \tag{39}$$

(ii) *за виконання умови* (39) *розв'язки крайової задачі* (35), (36) *мають вигляд*

$$x(t, \overline{c}) = U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q_0)}\overline{c} + \big(G[f]\big)(t) +$$
$$+ U(t)\mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i U(t_i) \right) \mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\right)^{+} \times$$
$$\times \left[\alpha - \sum_{i=1}^{m} A_i \big(G[f]\big)(t_i) - \sum_{i=m+1}^{n} B_i \big(G[f]\big)(t_i) \right],$$

де $\overline{c} \in \mathbf{H}$ — *довільний елемент гільбертового простору* $\mathbf{H}$, $\big(G[f]\big)(\cdot)$ — *узагальнений оператор Гріна*, $\left(\left(\sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=m+1}^{n} B_i U(t_i)\right) \mathcal{P}\mathcal{P}_{N(D)}\right)^{+}$ — *псевдообернений за Муром – Пенроузом до відповідного оператора.*

Література

1. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 500 – 521.
2. *Sacker R., Sell G.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II // J. Different. Equat. – 1976. – **22**. – P. 478 – 496.
3. *Sacker R. J.* Existence dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, IV // J. Different. Equat. – 1978. – **27**. – P. 106 – 137.

4. *Sacker R. J.* The splitting index for linear differential systems // J. Different. Equat. – 1979. – **33**. – P. 368 – 405.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
8. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
9. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. – 1999. – **2**, № 1. – P. 3 – 10.
10. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F.* Dichotomy on semiaxes and the solutions of linear systems with delay bounded on the entire axis // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 4. – P. 377 – 393.
11. *Boichuk A. A., , Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – 2nd ed. – Berlin: De Gruyter, 2016. – 296 p.
13. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
14. *Rodrigues H. M.* Evolution equations: dichotomies and the Fredholm alternative for bounded solutions // J. Different. Equat. – 1995. – **119**. – P. 263 – 283.
15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов // Докл. РАН. – 2002. – **383**, № 5. – С. 583 – 585.
16. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Мат. заметки. – 2000. – **67**, № 6. – С. 816 – 827.
17. *Баскаков А. Г.* О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах // Докл. РАН. – 2007. – **416**, № 2. – С. 156 – 160.
18. *Latushkin Yu., Tomilov Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients // J. Different. Equat. – 2005. – **208**. – P. 388 – 429.
19. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Bounded solutions of linear differential equations in Banach space // Nonlinear Oscillations. – 2006. – **9**, № 1. — P. 3 – 14.
20. *Boichuk O. A., Pokutnyi O. O.* Bounded solutions of weakly nonlinear differential equations in a Banach space // Nonlinear Oscillations. – 2008. – **11**, № 2. — P. 158 – 167.
21. *Покутний О. О.* Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь в локально-опуклих просторах // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 2009. – **2(98)**. – С. 35 – 40.
22. *Покутний О. О.* Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків еволюційних рівнянь з необмеженим оператором // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С. 93 – 99.
23. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
24. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.
25. *Радыно А. Я.* Линейные уравнения и борнология. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1982. – 199 с.
26. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
27. *Бойчук О. А, Покутний О. О.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1181 – 1188.
28. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Экспоненциальная дихотомия и ограниченные решения дифференциальных уравнений в пространстве Фреше // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 12. – С. 1587 – 1597.
29. *Sacker R. J., Sell G. R.* Dichotomies for linear evolutionary equations in Banach spaces // J. Different. Equat. – 1994. – **113**. – P. 17 – 67.
30. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 559 p.

Одержано 08.12.17