УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ Σ-РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ BENJAMIN – BONA – MAHONY ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We study the problem of construction of asymptotic Σ-solutions to the singularly perturbed Benjamin – Bona – Mahony equation with variable coefficients. An algorithm for the construction of solutions is described. We determine main and first terms of the asymptotic solution. The theorems on the accuracy with which the indicated asymptotic solution satisfies the considered equation are also proved.

Рассматривается задача о построении асимптотических Σ-решений сингулярно возмущенного уравнения Benjamin – Bona – Mahony с переменными коэффициентами. Описан алгоритм построения асимптотических Σ-решений, найдены главный и первый члены асимптотического решения, доказаны теоремы о точности, с которой такое асимптотическое решение удовлетворяет рассматриваемому уравнению.

1. Вступ. Рівняння Кортевега – де Фріза [1] є одним із важливих нелінійних диференціальних рівнянь сучасної математики і фізики. Запропоноване для опису явища відокремленої хвилі у 1895 році, воно стало об'єктом інтенсивних досліджень в 60-х роках минулого століття у зв'язку з проблемою Фермі – Паста – Улама і відкриттям методу оберненої задачі розсіювання [2 – 5], який не лише дозволив знайти нові точні розв'язки рівняння Кортевега – де Фріза, а й став одним з основних методів вивчення та побудови в аналітичному вигляді розв'язків низки нелінійних диференціальних рівнянь теоретичної і математичної фізики [6 – 12], зокрема, таких як нелінійне рівняння Шредінгера, модифіковане рівняння Кортевега – де Фріза, рівняння Кадомцева – Петвіашвілі.

Одночасно з дослідженням рівняння Кортевега – де Фріза за допомогою різноманітних методів і підходів проводився інтенсивний пошук нових диференціальних рівнянь і систем рівнянь, розв'язки яких описували б поширення хвиль у рідинах, і при цьому такі рівняння мали б властивості, що подібні до властивостей рівняння Кортевега – де Фріза.

Як наслідок в теорії рівнянь математичної фізики сформувався окремий напрям, що вивчає рівняння, подібні до рівняння Кортевега – де Фріза, серед яких важливу роль відіграє рівняння Benjamin – Bona – Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \tag{1}$$

Рівняння (1) запропонував D. H. Peregrine [13] у 1966 році. Згодом це рівняння вивчали T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, які вперше встановили [14] існування класичного розв'язку для даного рівняння та його єдиність. Згодом для рівняння BBM вивчалися й інші задачі. Спочатку основним інструментом дослідження рівняння (1) були чисельні методи, за допомогою яких було встановлено [15 – 21] низку цікавих властивостей його розв'язків. Зокрема, в [20, 21] було отримано чисельні результати, які дозволили припустити, що рівняння BBM має двосолітонний розв'язок, тобто має властивість, що аналогічна властивостям рівняння Кортевега – де Фріза. Тому цілком природно, що у подальшому проводився інтенсивний пошук багатосолітонних розв'язків даного рівняння. Але гіпотезу про існування багатосолітонних розв'язків для рівняння BBM було спростовано, тобто було показано, що рівняння (1) має односолітонний розв'язок вигляду

$$u(x,t) = 3(a-1)\operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-1}{a}}(x-at)+C\right), \tag{2}$$

де $a = \mathrm{const}$, $|a| > 1$, $C \in \mathbf{R}$ — довільна стала, але це рівняння не має багатосолітонних розв'язків (див. [22, с. 649]).

Як відомо, ефективними методами аналізу нелінійних задач є асимптотичні методи, які успішно використовуються при дослідженні різноманітних задач сучасної математики, фізики та математичного моделювання [23, 24]. Зокрема, впродовж останніх 50-ти років значна увага приділяється вивченню рівняння Кортевега – де Фріза з малим збуренням [25 – 32] та побудові їх асимптотичних розв'язків. При цьому в якості асимптотичних розв'язків цього рівняння часто розглядаються розв'язки, які за певними своїми властивостями подібні до так званих солітонних розв'язків. Зокрема, у [33 – 35] детально вивчено структуру таких розв'язків, розроблено алгоритми їх побудови і наведено обґрунтування запропонованих алгоритмів.

У [36] побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння ВВМ зі змінними коефіцієнтами

$$a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)u_x + c(x,t,\varepsilon)uu_x - \varepsilon^n u_{xxt} = 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T], \tag{3}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $n \in \mathbf{N}$, функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$, $c(x,t,\varepsilon)$ є гладкими або нескінченно диференційовними і записуються у вигляді асимптотичних (за Пуанкаре) рядів

$$\begin{aligned} a(x,t,\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k a_k(x,t) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \\ b(x,t,\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k b_k(x,t) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \\ c(x,t,\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k c_k(x,t) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Тут функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $c_0(x,t)$ є нескінченно диференційовними і для них має місце умова $a_0(x,t)\, b_0(x,t)\, c_0(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$.

Відомо, що коефіцієнти нелінійних диференціальних рівнянь суттєво впливають на властивості їх розв'язків. Тому цілком природно розглядати для рівняння (3) задачу про наявність у нього асимптотичних розв'язків, які за певними своїми властивостями подібні до солітонних розв'язків.

Оскільки рівняння (1) має односолітонні розв'язки, то аналогічно рівнянню Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для якого побудовано [37] асимптотичні Σ-розв'язки, що є аналогами асимптотичних багатофазових солітоноподібних розв'язків, для сингулярно збуреного рівняння ВВМ зі змінними коефіцієнтами вигляду (3) цілком природно розглянути задачу про побудову асимптотичних Σ-розв'язків. Саме вивченню цього питання і присвячено дану статтю.

У цій статті побудовано головний і перший члени асимптотичного багатофазового Σ-розв'язку та доведено теореми про точність, з якою отриманий асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння.

2. Основні припущення і позначення. Як і розв'язки солітонного типу, асимптотичні $\sum$-розв'язки належать певним функціональним просторам, які опишемо нижче.

Позначимо [38] через $G = G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, для яких рівномірно за змінними (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, p, q виконуються такі умови:

1^0) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m\partial t^p\partial\tau^q}f(x,t,\tau)=0;$$

2^0) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m\partial t^p\partial\tau^q}\big(f(x,t,\tau)-f^-(x,t)\big)=0,\qquad (x,t)\in K.$$

За допомогою $G_0=G_0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})\subset G$ позначимо простір таких функцій $f(x,t,\tau)$, для яких (додатково до умов 1^0, 2^0) рівномірно щодо (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ справджується рівність

$$\lim_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0,\qquad (x,t)\in K.$$

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення $\Psi(x,t,\varepsilon)=O\big(\varepsilon^N\big)$. Цей запис означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа N і від множини $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$, що для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і $(x,t)\in K$ виконується нерівність $\big|\Psi(x,t,\varepsilon)\big|\le C\,\varepsilon^N$.

Означення [37]. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичною $\sum$-функцією, якщо для деякого $m\in\mathbf{N}$, $m\ge2$, і кожного цілого числа $N\ge0$ для $u(x,t,\varepsilon)$ має місце зображення вигляду*

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\ldots,\frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right).\tag{5}$$

Тут

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+\sum_{k=1}^{m}V_{jk}(x,t,\tau_k)\right),\tag{6}$$

$$\tau_1=\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\qquad \tau_2=\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\qquad \ldots,\qquad \tau_m=\frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},$$

$S_k=S_k(x,t)$, $k=\overline{1,m}$, — деякі нескінченно диференційовні функції змінних $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, причому $\left.\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k}\neq0$, де криві Γ_k визначаються рівняннями $S_k(x,t)=0$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, $k=\overline{1,m}$; функції $u_j(x,t)$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, є нескінченно диференційовними, а функції $V_{jk}(x,t,\tau_k)$ належать G_0, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,N}$.

У подальшому описується алгоритм побудови спеціальних асимптотичних розв'язків рівняння (3) у вигляді функції (5), (6). Такі розв'язки називатимемо (скорочено) асимптотичними $\sum$-розв'язками.

3. Структура асимптотичного розв'язку. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $n = 2$ в рівнянні (3). З урахуванням означення 1 асимптотичний $\sum$-розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \tag{7}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{m} V_{jk}(x,t,\tau_k) \right), \qquad \tau_k = \frac{x - \varphi_k(t)}{\varepsilon}, \quad k = \overline{1,m},$$

N — довільне (фіксоване) натуральне число, $\varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,m}$, — деякі функції, для яких виконується умова $\varphi_k(0) = 0$, $k = \overline{1,m}$, і які визначаються у процесі побудови асимптотичного розв'язку із так званих умов ортогональності [33].

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (7), а функція

$$V_N(x,t,\varepsilon) = V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \sum_{k=1}^{m} V_{jk}(x,t,\tau_k)$$

— сингулярною частиною асимптотики (7). При цьому

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon).$$

Для знаходження рівнянь для коефіцієнтів асимптотичного розкладу (7) аналогічно [33, 37] обчислюються похідні $u_t(x,t,\varepsilon)$, $u_x(x,t,\varepsilon)$, $u_{xxx}(x,t,\varepsilon)$, їх значення підставляються в (3) і береться до уваги зображення (7). За допомогою стандартних міркувань [33, 34] визначаються рівняння для коефіцієнтів регулярної та сингулярної частин асимптотичного розв'язку (7).

Функції регулярної частини асимптотики визначаються із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} + c_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + c_0(x,t)\left(u_j\frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = F_j(x,t), \qquad j = \overline{1,N}, \tag{9}$$

де $F_j(x,t)$, $j = \overline{1,N}$, обчислюються рекурентним чином після знаходження функцій $u_0(x,t)$, $u_1(x,t),\ldots,u_{j-1}(x,t)$, $j = \overline{1,N}$.

Зауважимо, що (8) є рівнянням типу рівняння Хопфа, а (9) — неоднорідним лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

Розв'язки рівнянь (8), (9) легко знаходяться в аналітичному вигляді за допомогою методу характеристик, аналогічно [39, 40]. Тому вважатимемо, що регулярна частина розв'язку вигляду (7) вже відома.

З урахуванням рівнянь для регулярної частини асимптотики (8), (9) з (3) аналогічно знаходимо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для членів сингулярної частини асимптотики, розв'язки яких повинні належати простору G_0. Процедура визначення функцій сингулярної частини асимптотики суттєво складніша, ніж процедура знаходження членів регулярної частини асимптотики, і описується детально нижче.

4. Сингулярна частина асимптотики. Розглянемо питання про визначення головного і першого членів сингулярної частини асимптотики (7). При цьому скористаємось умовою, що функції сингулярної частини асимптотики належать простору швидко спадних за змінними τ_k, $k = \overline{1,m}$, функцій. Старші члени цієї частини асимптотики визначаються аналогічно описаному нижче випадку $N = 1$.

4.1. Головний член сингулярної частини асимптотики. Головний член сингулярної частини асимптотики — функція $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ — записується у вигляді суми

$$\sum_{k=1}^{m} V_{0k}(x,t,\tau_k),$$

доданки якої задовольняють співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial^3 V_{0k}}{\partial \tau_k^3} - a_0(x,t) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial V_{0k}}{\partial \tau_k} + b_0(x,t) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_{0k}}{\partial \tau_k} +$$
$$+ c_0(x,t) \left(u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{m} V_{0k} \right) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_{0k}}{\partial \tau_k} = 0. \tag{10}$$

Це співвідношення містить m невідомих функцій. Оскільки кожна з функцій $V_{0k}(x,t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, належить простору G_0 (за змінною τ_k, $k = \overline{1,m}$), то за межами довільного фіксованого околу кривої Γ_k, $k = \overline{1,m}$, при $\tau_k \to \pm\infty$ значення такої функції експоненціально прямує до нуля [37]. Тому головний член сингулярної частини асимптотики (7) шукатимемо у вигляді суми функцій $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \in G_0$, $k = \overline{1,m}$, кожна з яких є розв'язком рівняння

$$\varphi_k'(t) \frac{\partial^3 \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k^3} - a_0(\varphi_k,t) \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + b_0(\varphi_k,t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} +$$
$$+ c_0(\varphi_k,t) \Big[u_0(\varphi_k,t) + m \bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \Big] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} = 0, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{11}$$

де функції $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $\bar{V}_{0k} = \bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, $t \in [0;T]$.

У подальшому буде доведено, що функцію $\sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$ можна розглядати в якості головного члена сингулярної частини асимптотики (7) (див. теорему 1).

Безпосереднім інтегруванням з рівняння (11) знаходимо його розв'язок [37]

$$\bar{V}_{0k}(x,t,\tau_k) = \bar{V}_{0k}(t,\tau_k) = \frac{3A(\varphi_k,t)}{m\, c_0(\varphi_k,t)} \, \mathrm{ch}^{-2} \left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}} \, \frac{\tau_k + C_k}{2} \right), \qquad k = \overline{1,m}, \tag{12}$$

який, очевидно, належить простору G_0.

У формулі (12) позначено

$$A(\varphi_k, t) = a_0(\varphi_k, t)\varphi_k'(t) - b_0(\varphi_k, t) - c_0(\varphi_k, t)u_0(\varphi_k, t), \tag{13}$$

$C_k = C_k(t),\ k = \overline{1, m},$ — деякі (довільні) сталі інтегрування, змінна t вважається параметром.

У подальшому покладемо $C_k(t) = 0$ для всіх $k = \overline{1, m},\ t \in [0; T]$, і припустимо, що для всіх $t \in [0; T]$ виконується умова

$$\varphi_k'(t)\, A(\varphi_k(t), t) > 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{14}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови*:

1^0) *функції* $a_0(x, t),\ b_0(x, t),\ c_0(x, t)$ *належать* $C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$, *причому*

$$a_0(x, t) b_0(x, t) c_0(x, t) \neq 0$$

для всіх $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$;

2^0) *рівняння* (8) *має розв'язок* $u_0(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$;

3^0) *функції* $\varphi_k = \varphi_k(t),\ t \in [0; T],\ k = \overline{1, m}$, *є нескінченно диференційовними і такими, що* $\varphi_k(0) = 0,\ \varphi_k'(0) \neq 0,\ k = \overline{1, m}$;

4^0) *має місце нерівність* (14) *і для всіх* $t \in [0; T]$ *справджуються співвідношення*

$$A(\varphi_k(t), t) = A(\varphi_l(t), t), \qquad k, l = \overline{1, m}.$$

Тоді функція

$$Y_0(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x - \varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) \tag{15}$$

в околі точки $(0; 0)$ *вигляду*

$$\bigcup_{k=1}^{m} \left\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \left[0; \varepsilon^2 T\right] : |x - \varphi_k(t)| < \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\right\} \tag{16}$$

задовольняє рівняння (3) *з точністю* $O(1)$.

Більш того, функція (15) *задовольняє рівняння* (3) *з точністю* $O(1)$ *на множині*

$$\mathcal{T} = \left(\bigcup_{k=1}^{m}\Big\{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; \varepsilon^2 T] : |x - \varphi_k(t)| < \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\Big\}\right) \bigcup$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m}\Big\{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; \varepsilon^2 T] : |x - \varphi_k(t)| > \varepsilon^\alpha\Big\}\right), \tag{17}$$

де $\alpha \in (0; 1)$ — *довільне число.*

Якщо ж значення $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; \varepsilon^2 T]$ *такі, що* $|x - \varphi_k(t)|/\varepsilon \to +\infty$ *при всіх* $k = \overline{1, m}$, *то для таких значень* (x, t) *функція* $Y_0(x, t, \varepsilon)$ *задовольняє рівняння* (3) *з точністю* $O(\varepsilon)$.

Доведення. Оскільки множина (16) міститься у множині (17), то достатньо показати, що функція (15) задовольняє рівняння (3) на множині (17) з точністю $O(1)$. Для цього підставимо вираз для $Y_0(x, t, \varepsilon)$ у рівняння (3). Маємо

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^3 \bar{V}_{0k}}{\partial t \partial \tau_k^2} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial^3 \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k^3} =$$

$$= a(x,t,\varepsilon) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial t} \right) - \frac{1}{\varepsilon}\, a(x,t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b(x,t,\varepsilon) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right) + c(x,t,\varepsilon) \left(u_0 + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right). \tag{18}$$

Звідси, враховуючи рівняння (8) і (11) для головних членів регулярної і сингулярної частин асимптотики (7), переконуємося, що для знаходження оцінки, з якою асимптотичний розв'язок (15) задовольняє рівняння (3), досить розглянути нев'язку

$$R_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \big[a_0(x,t) - a_0(\varphi_k,t) \big] \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \big[b_0(x,t) - b_0(\varphi_k,t) \big] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} \big[c_0(x,t) u_0(x,t) - c_0(\varphi_k,t) u_0(\varphi_k,t) \big] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\, c_0(x,t) \sum_{l=1}^{m} \bar{V}_{0l} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} m c_0(\varphi_k,t) \bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + O(1). \tag{19}$$

З неперервної диференційовності функцій $a_0(x,t),\ b_0(x,t),\ c_0(x,t),\ u_0(x,t),\ \varphi_k(t),\ k = \overline{1,m}$, і того, що $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \in G_0,\ k = \overline{1,m}$, та компактності (довільної) множини $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ випливає існування таких сталих $c_k > 0,\ k = \overline{1,m}$, що виконується нерівність

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \big[a_0(x,t) - a_0(\varphi_k,t) \big] \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right| \le \sum_{k=1}^{m} c_k \,|x - \varphi_k| \left| \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right| = \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \,|\tau_k| \left| \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right| \le \varepsilon\, C_1,$$

де стала C_1 залежить лише від множини K.

Аналогічно отримуємо нерівності

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \big[b_0(x,t) - b_0(\varphi_k(t),t) \big] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right| \le \varepsilon\, C_2,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \big[c_0(x,t) u_0(x,t) - c_0(\varphi_k(t),t) u_0(\varphi_k(t),t) \big] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right| \le \varepsilon\, C_3,$$

де сталі $C_2,\ C_3$ залежать лише від множини K.

Розглянемо тепер два останніх доданки нев'язки (19). Позначимо

$$r_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{m} \left[c_0(x,t) \sum_{l=1}^{m} \bar{V}_{0l} - m c_0(\varphi_k,t) \bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \right] \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}.$$

Тоді маємо

$$|r_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)| \le \left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left[c_0(x,t)-c_0(\varphi_l,t)\right]\bar{V}_{0l}(t,\tau_l)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left[c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l}(t,\tau_l)-c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)\right]\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right| \le$$

$$\le \varepsilon C_4 + \left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left[c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l}(t,\tau_l)-c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)\right]\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right|, \tag{20}$$

де C_4 — деяка стала, що залежить від множини K.

Оцінимо кожен із доданків у (20). З формули для $A(\varphi_k,t)$ і формули (12) для функції $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $k=\overline{1,m}$, та умови 4^0 теореми 1 про те, що $A(\varphi_k(t),t)=A(\varphi_l(t),t)$ для всіх $t\in[0;T]$, $k,l=\overline{1,m}$, випливає існування такого значення $\varepsilon_0>0$, що для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ виконується нерівність

$$\left|c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l}(t,\tau_l)-c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)\right| =$$

$$=\frac{3}{m}\left|A(\varphi_l,t)\operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l}{2\varepsilon}\right)-A(\varphi_k,t)\operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k}{2\varepsilon}\right)\right| =$$

$$=\frac{3}{m}\left|A(\varphi_k,t)\right|\left|\operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l}{2\varepsilon}\right)-\operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k}{2\varepsilon}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{3}{m}\left|A(\varphi_k,t)\right|\left(C_{11}\left|\frac{x-\varphi_l}{\varepsilon}\right|^2+C_{22}\left|\frac{x-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\right), \tag{21}$$

де $\varphi_k=\varphi_k(t)$, $\varphi_l=\varphi_l(t)$ для всіх $t\in[0;T]$, $k,l=\overline{1,m}$.

Звідси, враховуючи, що функція $\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)/\partial\tau_k$ є швидко спадною щодо змінної τ_k та беручи до уваги очевидну нерівність $|x-\varphi_l|\le|x-\varphi_k|+|\varphi_k-\varphi_l|$, отримуємо

$$\left(C_{11}\left|\frac{x-\varphi_l}{\varepsilon}\right|^2+C_{22}\left|\frac{x-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\right)\left|\frac{\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)}{\partial\tau_k}\right| \le$$

$$\le (2C_{11}+C_{22})\left|\frac{x-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\left|\frac{\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)}{\partial\tau_k}\right| + 2C_{11}\left|\frac{\varphi_l-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\left|\frac{\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)}{\partial\tau_k}\right| \le$$

$$\le (2C_{11}+C_{22})\left|\frac{x-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\bar{C}_n\left(\left|\frac{x-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2+1\right)^{-n} + 2C_{11}\left|\frac{\varphi_l-\varphi_k}{\varepsilon}\right|^2\left|\frac{\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)}{\partial\tau_k}\right|, \tag{22}$$

де $\bar{C}_n>0$ — деякі сталі, n — довільне натуральне число.

Тоді для значень $(x,t)\in\mathcal{T}$, тобто коли $|x-\varphi_k(t)|<\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ або $|x-\varphi_k(t)|>\varepsilon^{\alpha}$, $\alpha<1$, виконуються відповідно нерівності

$$\frac{\left|x-\varphi_k(t)\right|^2}{\varepsilon^2}<\varepsilon, \qquad \left|\frac{(x-\varphi_k(t))^2}{\varepsilon^2}+1\right|^{-n} \le \left(\varepsilon^{2\alpha-2}+1\right)^{-n}=\varepsilon^{n(2-2\alpha)}\left(1+\varepsilon^{2-2\alpha}\right)^{-n}.$$

Звідси і з нерівностей (20)–(22) випливає існування такої сталої $C_5>0$, що за умови $|\varphi_k(t)-$ $-\varphi_l(t)|=O(\varepsilon^2)$, $t\in[0;T]$, виконується нерівність

$$|r_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)| \le \varepsilon\,(C_4 + C_5).$$

Зауважимо, що значення сталої $C_5 > 0$ залежить лише від множини K.

З умови $\varphi_k(0) = 0,\ k = \overline{1,m}$, випливає, що функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ вигляду (15) на множині $\mathcal{T}$ задовольняє рівняння (3) з точністю $O(1)$.

Враховуючи, що $\bar V_{0k}(t,\tau_k)$ при кожному $k = \overline{1,m}$ є швидко спадною за змінною τ_k функцією, то у випадку, коли $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T]$ і такі, що $\big|x - \varphi_k(t)\big|/\varepsilon = |\tau_k| \to +\infty$ при всіх $k = \overline{1,m}$, отримуємо властивість: функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ вигляду (15) для всіх $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T]$ задовольняє рівняння (3) з точністю $O(\varepsilon)$.

Теорему 1 доведено.

4.2. Перший член сингулярної частини асимптотики. Перший член сингулярної частини асимптотики (7) — функція $V_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ — записується у вигляді суми

$$\sum_{k=1}^{m} V_{1k}(x,t,\tau_k).$$

Оскільки кожна з функцій $V_{1k}(x,t,\tau_k),\ k = \overline{1,m}$, належить простору G_0 (за змінною τ_k, $k = \overline{1,m}$), то за межами довільного фіксованого околу кривої $\Gamma_k,\ k = \overline{1,m}$, при $\tau_k \to \pm\infty$ значення такої функції експоненціально прямує до нуля [37]. Тому перший член сингулярної частини шуканої асимптотики запишемо у вигляді суми функцій $\bar V_{1k}(t,\tau_k) \in G_0,\ k = \overline{1,m}$, кожна з яких в околі кривої $x = \varphi_l(t),\ t\in[0;T],\ l = \overline{1,m}$, визначається з системи диференціальних рівнянь

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial^3 V_{1k}}{\partial\tau_k^3} + a_0(\varphi_l,t)\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial V_{1k}}{\partial\tau_k} - b_0(\varphi_l,t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{1k}}{\partial\tau_k} -$$
$$-c_0(\varphi_l,t)\left(\left[u_0(\varphi_l,t) + \sum_{k=1}^{m}V_{0k}\right]\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{1k}}{\partial\tau_k} + \sum_{k=1}^{m}V_{1k}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k}\right) =$$
$$= \mathcal{F}_{1l}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m), \qquad l = \overline{1,m}, \tag{23}$$

де $\varphi_l = \varphi_l(t),\ t\in[0;T]$, а функції $\mathcal{F}_{1l}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),\ l = \overline{1,m}$, задаються рекурентним чином за значеннями $V_{0k} = V_{0k}(t,\tau_l),\ k = \overline{1,m}$, і записуються за допомогою формул

$$\mathcal{F}_{1l}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = a_0(\varphi_l,t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{0k}}{\partial t} - \big[\tau_l a_{0x}(\varphi_l,t) + a_1(\varphi_l,t)\big]\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k} +$$
$$+\big[\tau_l b_{0x}(\varphi_l,t) + b_1(\varphi_l,t) + c_0(\varphi_l,t)(\tau_l u_{0x}(\varphi_l,t) + u_1(\varphi_l,t))\big]\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k} + c_0(\varphi_l,t)u_{0x}(\varphi_l,t)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{m}V_{0k} + \big(\tau_l c_{0x}(\varphi_l,t) + c_1(\varphi_l,t)\big)\left(u_0(\varphi_l,t) + \sum_{k=1}^{m}V_{0k}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^3 V_{0k}}{\partial t\,\partial\tau_k^2}.$$

Як і при визначенні головного члена асимптотики (7), одночасно з (23) розглянемо допоміжну функцію $\bar V_{1k} = \bar V_{1k}(t,\tau_k),\ k = \overline{1,m}$, і, відповідно, допоміжне рівняння, яке у даному випадку має вигляд

$$-\varphi_k'(t)\frac{\partial^3\bar V_{1k}}{\partial\tau_k^3}+a_0(\varphi_k,t)\varphi_k'(t)\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}-b_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}-c_0(\varphi_k,t)\times$$
$$\times\left(u_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}+m\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}+m\bar V_{1k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)=\bar{\mathcal F}_{1k}(t,\tau_k), \tag{24}$$

де

$$\bar{\mathcal F}_{1k}(t,\tau_k)=a_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial t}-\left[\tau_k a_{0x}(\varphi_k,t)+a_1(\varphi_k,t)\right]\varphi_k'(t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}+$$
$$+\left[\tau_k b_{0x}(\varphi_k,t)+b_1(\varphi_k,t)+c_0(\varphi_k,t)(\tau_k u_{0x}(\varphi_k,t)+u_1(\varphi_k,t))\right]\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}+c_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\bar V_{0k}+$$
$$+\left[\tau_k c_{0x}(\varphi_k,t)+c_1(\varphi_k,t)\right]\left(u_0(\varphi_k,t)+m\bar V_{0k}\right)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}-\frac{\partial^3\bar V_{0k}}{\partial t\partial\tau_k^2}, \tag{25}$$

функції $\bar V_{0k}(t,\tau_k),\ k=\overline{1,m}$, визначено згідно з формулою (12). Очевидно, що за побудовою функція $\bar{\mathcal F}_{1k}(t,\tau_k)$ належить $G_0,\ k=\overline{1,m}$.

У [36] показано, що необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (24) у просторі G є умова ортогональності вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{\mathcal F}_{1k}(t,\tau_k)\bar V_{0k}(t,\tau_k)d\tau_k=0,\qquad k=\overline{1,m}. \tag{26}$$

При цьому розв'язок рівняння (24) у просторі G за умови (26) записується за допомогою формули [36]

$$\bar V_{1k}(t,\tau_k)=\nu_{1k}(t)\eta_{1k}(t,\tau_k)+\psi_{1k}(t,\tau_k),\qquad k=\overline{1,m}, \tag{27}$$

де

$$\nu_{1k}(t)=(A(\varphi_k(t),t))^{-1}\lim_{\tau_k\to-\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k),\quad k=\overline{1,m},$$

$\eta_{1k}(t,\tau_k)\in G,\ k=\overline{1,m}$, а функції $\psi_{1k}(t,\tau_k),\ k=\overline{1,m}$, є швидко спадними по τ_k,

$$\Phi_{1k}(t,\tau_k)=\int\limits_{-\infty}^{\tau_k}\bar{\mathcal F}_{1k}(t,\xi)d\xi+E_{1k}(t),\quad k=\overline{1,m}, \tag{28}$$

причому сталі інтегрування $E_{1k}(t),\ k=\overline{1,m}$, вибираються з умови

$$\lim_{\tau_k\to+\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k)=0,\qquad k=\overline{1,m}.$$

Зауважимо, що функція $\bar V_{1k}(t,\tau_k)$ належить $G_0,\ k=\overline{1,m}$, тоді і лише тоді, коли має місце співвідношення

$$\lim_{\tau_k\to-\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k)=0,\qquad k=\overline{1,m}. \tag{29}$$

При кожному $k=\overline{1,m}$ розв'язок рівняння (27) у просторі G_0 визначається [37] з точністю до функцій ядра оператора $L_{1k}:G_0\to G_0,\ k=\overline{1,m}$, де

$$L_{1k} = -\varphi_k'(t)\frac{d^2}{d\tau_k^2} + a_0(\varphi_k,t)\varphi_k'(t) - b_0(\varphi_k,t) - c_0(\varphi_k,t)\big(u_0(\varphi_k,t) + m\bar{V}_0(t,\tau_k)\big),$$

властивості якого вивчено в [41]. Зокрема, в [41] показано, що ядро оператора $L_{1k} : G_0 \to G_0$, $k = \overline{1,m}$, містить лише одну нетривіальну функцію $\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)/\partial\tau_k$. Тому загальний розв'язок рівняння (24) у просторі G_0 можна записати таким чином:

$$\bar{V}_{1k}(t,\tau_k) = \psi_{1k} + c_{1k}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_k}\bar{V}_{0k}(t,\tau_k),$$

де функцію $\psi_{1k}(t,\tau_k)$ охарактеризовано вище, $c_{1k}(t)$, $k = \overline{1,m}$, — довільні сталі, величина $t \in [0;T]$ розглядається як параметр.

Аналогічно випадку однофазових солітоноподібних розв'язків [36] рівняння (3), умова ортогональності (26) еквівалентна звичайному диференціальному рівнянню для функції $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, яке у даному випадку має вигляд [36]

$$\big[A_1{\varphi_k}'^2 + A_2{\varphi_k}' + A_3\big]{\varphi_k}'' + A_4\,{\varphi_k}'^4 + A_5\,{\varphi_k}'^3 + A_6\,{\varphi_k}'^2 + A_7\,{\varphi_k}' = 0. \qquad (30)$$

Тут функції $A_j(\varphi_k,t)$, $j = \overline{1,7}$, зображуються формулами

$$A_1 = 24a_0^2c_0, \qquad A_2 = -8\,a_0\,c_0\,\alpha, \qquad A_3 = -\,c_0\,\alpha^2, \qquad A_4 = -40\,c_{0x}\,a_0^2 + 30a_0\,a_{0x}\,c_0,$$

$$A_5 = 60\,a_0\,c_{0x}\,\alpha + 20\,a_0\,a_{0t}\,c_0 - 24\,a_0^2\,c_{0t} - 30\,a_0\,c_0\,\alpha_x - 15\,a_{0x}\,c_0\,\alpha + 20a_0\,c_0^2\,u_{0x},$$

$$A_6 = -20\,a_0\,c_0\,\alpha_t\, - 5\,a_{0t}\,c_0\alpha + 15\,c_0\,\alpha\,\alpha_x + 28\,a_0\,c_{0t}\,\alpha - 20\,c_0^2u_{0x}\,\alpha - 20\,c_{0x}\,\alpha^2,$$

$$A_7 = 5\,c_0\,\alpha\,\alpha_t - 20\,c_{0t}\,\alpha^2,$$

де $\alpha = b_0 + c_0u_0$, $a_0 = a_0(\varphi_k,t)$, $b_0 = b_0(\varphi_k,t)$, $c_0 = c_0(\varphi_k,t)$, $u_0 = u_0(\varphi_k,t)$.

Очевидно, що рівняння (30) при досить загальних щодо функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $c_0(x,t)$ припущеннях і початкових умовах $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) \neq 0$, $k = \overline{1,m}$, має розв'язок, який визначено на проміжку $[0;T]$, де $T > 0$ — деяке число.

З'ясуємо тепер питання про те, за яких умов щодо коефіцієнтів $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $c_0(x,t)$ функція $\bar{V}_{1k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, належить простору G_0.

Беручи до уваги зображення (28) та умову (29), з (25) безпосереднім інтегруванням знаходимо функцію $\Phi_{1k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$:

$$\Phi_{1k}(t,\tau_k) = \frac{6}{m}\left[a_0(\varphi_k,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t){\varphi_k}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\right) - \frac{A(\varphi_k,t)\sqrt{A(\varphi_k,t){\varphi_k}'(t)}}{c_0^2(\varphi_k,t)} -\right.$$

$$-\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t){\varphi_k}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\Big(-a_{0x}(\varphi_k,t){\varphi_k}'(t) + b_{0x}(\varphi_k,t) + \big(c_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)\big)_x\Big) +$$

$$\left.+c_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t){\varphi_k}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\right] \times \left[\tanh\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{{\varphi_k}'(t)}}\frac{\tau_k + C_0(t)}{2}\right) + 1\right] -$$

$$-\frac{9}{2m}\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{{\varphi_k}'(t)}}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{{\varphi_k}'(t)}}\right)\tau_k + \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{{\varphi_k}'(t)}}\,C_0(t)\right)\right] \times$$

$$\times \operatorname{ch}^{-4}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau_k+C_0(t)}{2}\right)\operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau+C_0(t)}{2}\right)-$$

$$-\frac{3}{m}\left[\frac{A(\varphi_k,t)\sqrt{A(\varphi_k,t)\varphi_k{}'(t)}}{c_0^2(\varphi_k,t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{A(\varphi_k,t)\sqrt{A(\varphi_k,t)}}{c_0(\varphi,t)\varphi_k{}'(t)}\right)\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}^{-3}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau_k+C_0(t)}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau_k+C_0(t)}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{m}\left[3a_0(\varphi_k,t)\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)\varphi_k{}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\left(\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\right)\tau_k+\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\,C_0(t)\right)\right)+\right.$$

$$+\frac{3A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\Big(-a_{0x}(\varphi_k,t)\varphi_k{}'(t)+b_{0x}(\varphi_k,t)+\big(c_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)\big)_x\Big)\tau_k+$$

$$+\frac{3A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\Big(b_1(\varphi_k,t)-a_1(\varphi_k,t)\varphi_k'(t)+c_0(\varphi_k,t)u_1(\varphi_k,t)+c_1(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)\Big)+$$

$$\left.+\frac{3}{2}\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\left(\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\right)\tau_k+\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\,C_0(t)\right)\right)\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau_k+C_0(t)}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{2m}\,\frac{A^2(\varphi_k,t)}{c_0^2(\varphi_k,t)}\Big[c_{0x}(\varphi_k,t)\tau_k+c_1(\varphi_k,t)\Big]\,\operatorname{ch}^{-4}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k{}'(t)}}\frac{\tau_k+C_0(t)}{2}\right),$$

де $\varphi_k=\varphi_k(t),\ k=\overline{1,m};\ C_0=C_0(t)$ — стала інтегрування з (12).

Тоді умову (29) при $j=1$, яка гарантує, що функція $\bar V_{1k}(t,\tau_k),\ k=\overline{1,m}$, належить простору G_0, можна записати у вигляді

$$a_0(\varphi_k,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)\varphi_k{}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\right)+\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)\varphi_k{}'(t)}}{c_0(\varphi_k,t)}\times$$

$$\times\left[a_{0x}(\varphi_k,t)\varphi_k'(t)-b_{0x}(\varphi_k,t)-c_{0x}(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)-\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\right]=0.$$

Аналогічно теоремі 1 має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови*:

$1^0)$ *функції* $a_k(x,t),\ b_k(x,t),\ c_k(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T]),\ k=0,1,$ *причому*

$$a_0(x,t)\,b_0(x,t)\,c_0(x,t)\neq 0$$

для всіх $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$;

$2^0)$ *рівняння* (8), (9) *мають розв'язки* $u_0(x,t),\ u_1(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$ *відповідно*;

$3^0)$ *функції* $\varphi_k=\varphi_k(t),\ t\in[0;T],\ k=\overline{1,m},$ *є розв'язками диференціальних рівнянь* (30) *з початковою умовою* $\varphi_k(0)=0,\ k=\overline{1,m},$ *і такими, що* $\varphi_k'(0)\neq 0,\ k=\overline{1,m}$;

$4^0)$ *має місце нерівність* (14) *і для всіх* $t \in [0;T]$ *справджуються співвідношення* $A(\varphi_k(t),t) = A(\varphi_l(t),t),\ k,l=\overline{1,m}.$

Тоді функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{1k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) \qquad (31)$$

в околі точки $(0;0)$ *вигляду*

$$\bigcup_{k=1}^{m} \left\{ (x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T] : |x-\varphi_k(t)| < \varepsilon^2 \right\}$$

задовольняє рівняння (3) *з точністю* $O(\varepsilon)$.

Більш того, функція (31) *задовольняє рівняння* (3) *з точністю* $O(\varepsilon)$ *на множині*

$$\mathcal{T}_1 = \left(\bigcup_{k=1}^{m} \left\{ (x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T] : \big|x-\varphi_k(t)\big| < \varepsilon^2 \right\} \right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \left\{ (x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T] : \big|x-\varphi_k(t)\big| > \varepsilon^\alpha \right\} \right),$$

де $\alpha \in (0;1)$ — *довільне число.*

Якщо ж значення $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;\varepsilon^2 T]$ *такі, що* $\big|x-\varphi_k(t)\big|/\varepsilon \to +\infty$ *при всіх* $k=\overline{1,m}$, *то для таких значень* (x,t) *функція* $Y_1(x,t,\varepsilon)$ *задовольняє рівняння* (3) *з точністю* $O(\varepsilon^2)$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, враховуючи рівняння (8), (9) і (11), (24) для регулярної і сингулярної частин асимптотики (7), для знаходження оцінки, з якою функція (31) задовольняє рівняння (3), досить оцінити нев'язку вигляду

$$R_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) + R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon).$$

Тут

$$R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \big[a(x,t,\varepsilon) - a_0(x,t)\big]\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) +$$

$$+\Big[b(x,t,\varepsilon) - b_0(x,t) + \big(c(x,t,\varepsilon)-c_0(x,t)\big)(u_0+\varepsilon u_1)\Big]\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \varepsilon^3\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \varepsilon F_1(x,t) + \sum_{k=1}^{m}\Big[a(x,t,\varepsilon) - a_0(\varphi_k,t)\Big]\left(\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial t}\right) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\Big[a(x,t,\varepsilon) - a_0(\varphi_k,t) - \varepsilon\big(\tau_k a_{0x}(\varphi_k,t) + a_1(\varphi_k,t)\big)\Big]\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\big[a(x,t,\varepsilon) - a_0(\varphi_k,t)\big]\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\Big[b(x,t,\varepsilon) - b_0(\varphi_k,t) - \varepsilon\big(\tau_k b_{0x}(\varphi_k,t) + b_1(\varphi_k,t)\big)\Big]\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Big[b(x,t,\varepsilon)-b_0(\varphi_k,t)\Big]\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\Big[c(x,t,\varepsilon)\big(u_0(x,t)+\varepsilon u_1(x,t)\big)-c_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)-$$

$$-\varepsilon\Big[\tau_k(c_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t))_x+c_1(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)+c_0(\varphi_k,t)u_1(\varphi_k,t)\Big]\Big]\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Big[c(x,t,\varepsilon)u_0(x,t)-c_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)\Big]\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Big[c(x,t,\varepsilon)u_{0x}(x,t)-c_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\Big]\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}+O(\varepsilon),$$

де $F_1(x,t)$ — функція у правій частині рівняння (9) при $j=1$;

$$R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)+B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)+$$

$$+B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)+B_4(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon),$$

$$B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{0k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}mc_0(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}-\sum_{k=1}^{m}m\tau_k c_{0x}(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}-\sum_{k=1}^{m}mc_1(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k},$$

$$B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)-\sum_{k=1}^{m}mc_0(\varphi_k,t)\bar V_{1k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k},$$

$$B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{0k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}\right)-\sum_{k=1}^{m}mc_0(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k},$$

$$B_4(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\varepsilon c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{1k}}{\partial\tau_k}\right).$$

Використовуючи теорему Лагранжа, отримуємо нерівності

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\Big[c(x,t,\varepsilon)u_0(x,t)-c_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)-\right.$$

$$\left.-\varepsilon\tau_k\big(c_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)\big)_x-\varepsilon c_1(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)\Big]\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{m}C_{1k}\big|x-\varphi_k(t)\big|^2\left|\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}C_{2k}\big|x-\varphi_k(t)\big|\left|\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|+O(\varepsilon^2)\le C_6\,\varepsilon^2,$$

де $C_{1k},\ C_{2k},\ k=\overline{1,m},\ C_6$ — деякі додатні сталі, що залежать лише від множини K.

Аналогічні асимптотичні оцінки справджуються також і для інших доданків виразу для $R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$.

Розглянемо тепер доданки виразу для функції $R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$.

З формули для $B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$ за допомогою групування доданків і оцінки відповідних різниць знаходимо асимптотичне співвідношення

$$B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\,c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{0k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}mc_0(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}m\tau_k c_{0x}(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}-\sum_{k=1}^{m}mc_1(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{l=1}^{m}\big[c_0(x,t)+\varepsilon c_1(x,t)\big]\bar V_{0l}-\big[c_0(\varphi_k,t)+\varepsilon\tau_k c_{0x}(\varphi_k,t)+\varepsilon c_1(\varphi_k,t)\big]\bar V_{0k}\right]\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}+O(\varepsilon).$$

Доданки правої частини цієї рівності, що залежать від функції $c_0(x,t)$ та її похідних, запишемо таким чином:

$$c_0(x,t)\bar V_{0l}-\Big[c_0(\varphi_k,t)+\varepsilon\tau_k c_{0x}(\varphi_k,t)\Big]\bar V_{0k}=\Big[c_0(x,t)-c_0(\varphi_l,t)-c_{0x}(\varphi_l,t)\big(x-\varphi_l(t)\big)\Big]\bar V_{0l}+$$

$$+\Big[\Big(c_0(\varphi_l,t)+c_{0x}(\varphi_l,t)(x-\varphi_l(t))\Big)\bar V_{0l}-\Big(c_0\big(\varphi_k(t),t\big)+c_{0x}(\varphi_k(t),t)\big(x-\varphi_k(t)\big)\Big)\bar V_{0k}\Big].$$

На підставі теореми Лагранжа і умови 4^0 теореми 2 отримуємо нерівності

$$\left|\Big[c_0(x,t)-c_0(\varphi_l,t)-c_{0x}(\varphi_l,t)\big(x-\varphi_l(t)\big)\Big]\bar V_{0l}\right|\le C_7\varepsilon^2,$$

$$\left|\left[c_0(\varphi_l,t)+c_{0x}(\varphi_l,t)(x-\varphi_l(t))\right)\bar V_{0l}-\left(c_0(\varphi_k,t)+c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))\right]\bar V_{0k}\right|\le$$

$$\le\left|\Big[c_0(\varphi_l,t)+c_{0x}(\varphi_l,t)(x-\varphi_l(t))\Big)\,\bar V_{0l}-\Big(c_0(\varphi_k,t)+c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))\Big]\bar V_{0l}\right|+$$

$$+\left|\left[c_0(\varphi_k,t)+c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))\right)\bar V_{0l}-\left(c_0(\varphi_k,t)+c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))\right]\bar V_{0k}\right|\le$$

$$\le|c_0(\varphi_l,t)-c_0(\varphi_k,t)|\left|\bar V_{0l}\right|+|c_{0x}(\varphi_l,t)(x-\varphi_l(t))-c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))|\left|\bar V_{0l}\right|+$$

$$+|c_0(\varphi_k,t)+c_{0x}(\varphi_k,t)(x-\varphi_k(t))|\left|\bar V_{0l}-\bar V_{0k}\right|\le|c_0(\varphi_l,t)-c_0(\varphi_k,t)|\left|\bar V_{0l}\right|+$$

$$+|c_{0x}(\varphi_l,t)|\,|\varphi_l(t)-\varphi_k(t)|\left|\bar V_{0l}\right|+|x-\varphi_k(t)|\,|c_{0x}(\varphi_l,t)-c_{0x}(\varphi_k,t)|\left|\bar V_{0l}\right|+$$

$$+|c_0(\varphi_k,t)|\left|\bar V_{0l}-\bar V_{0k}\right|+|c_{0x}(\varphi_k,t)|\,|x-\varphi_k(t)|\left|\bar V_{0l}-\bar V_{0k}\right|\le$$

$$\le|c_0(\varphi_l,t)-c_0(\varphi_k,t)|\left|\bar V_{0l}\right|+|c_{0x}(\varphi_l,t)|\,|\varphi_l(t)-\varphi_k(t)|\left|\bar V_{0l}\right|+$$

$$+\big|x-\varphi_l(t)\big||\bar V_{0l}|\,|c_{0x}(\varphi_l,t)-c_{0x}(\varphi_k,t)|+|\varphi_k(t)-\varphi_l(t)|\left|\bar V_{0l}\right|\big|c_{0x}(\varphi_l,t)-c_{0x}(\varphi_k,t)\big|+$$

$$+\big|c_0(\varphi_k,t)\big||\bar V_{0l}-\bar V_{0k}|+|x-\varphi_k|\big|c_{0x}(\varphi_k,t)\big||\bar V_{0k}|+|x-\varphi_k|\big|c_{0x}(\varphi_k,t)\big||\bar V_{0l}|.$$

Аналогічно міркуванням, що використані при доведенні теореми 1, знаходимо нерівність

$$\left|\bar V_{0l}-\bar V_{0k}\right|=\frac{3}{m}\left|\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{A(\varphi_l,t)}{c_0(\varphi_l,t)}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon}\right)\right|\le$$

$$\leq \frac{3}{m}\left|\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}\left(\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon}\right)-\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon}\right)\right)\right|+$$

$$+\frac{3}{m}\left|\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon}\right)\left(\frac{A(\varphi_k,t)}{c_0(\varphi_k,t)}-\frac{A(\varphi_l,t)}{c_0(\varphi_l,t)}\right)\right|\leq$$

$$\leq C_{11}\left|\frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right|^2+C_{12}\left|\frac{x-\varphi_l(t)}{\varepsilon}\right|^2+C_{13}\big|\varphi_k(t)-\varphi_l(t)\big|.$$

Таким чином, маємо

$$|B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)|\leq C_9\,\varepsilon,\qquad (x,t)\in\mathcal{T}_1,$$

де C_9 — деяка стала, що залежить лише від множини K.

Далі розглянемо вираз для $B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$. Маємо

$$B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=c(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}mc_0(\varphi_k,t)\bar V_{1k}\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(c(x,t,\varepsilon)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)\bar V_{1k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(c_0(x,t)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right)\bar V_{1k}+O(\varepsilon).$$

Оскільки

$$\left|c_0(x,t)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|\big|\bar V_{1k}\big|=$$

$$=\left|(c_0(x,t)-c_0(\varphi_l,t))\,\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}+c_0(\varphi_l,t)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|\big|\bar V_{1k}\big|\leq$$

$$\leq C_{10}\varepsilon|\tau_l|\left|\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}\right|\big|\bar V_{1k}\big|+\left|c_0(\varphi_l,t)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|\big|\bar V_{1k}\big|,$$

то, враховуючи нерівність

$$\left|c_0(\varphi_l,t)\frac{\partial\bar V_{0l}}{\partial\tau_l}-c_0(\varphi_k,t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k}\right|\big|\bar V_{1k}\big|\leq$$

$$\leq\frac{3\,|A(\varphi_k,t)|}{m}\left|\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\mathrm{ch}^{-3}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_l,t)}{\varphi_l'(t)}}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\mathrm{ch}^{-3}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{A(\varphi_k,t)}{\varphi_k'(t)}}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon}\right)\right|\big|\bar V_{1k}\big|\leq$$

$$\leq \left(C_{23} \frac{|x-\varphi_l(t)|}{\varepsilon} + C_{33} \frac{|x-\varphi_k(t)|}{\varepsilon} \right) \left| \bar{V}_{1k} \right| \leq$$

$$\leq \left((C_{23}+C_{33}) \frac{|x-\varphi_k(t)|}{\varepsilon} + C_{23} \frac{|\varphi_l(t)-\varphi_k(t)|}{\varepsilon} \right) |\bar{V}_{1k}|,$$

отримуємо асимптотичну оцінку

$$\left| B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) \right| \leq C_{10}\,\varepsilon, \qquad (x,t) \in \mathcal{T}_1,$$

де C_{10} — деяка стала, що залежить лише від множини K.

Розглянемо нарешті вираз для $B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$. Маємо

$$B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = c(x,t,\varepsilon) \left(\sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right) - \sum_{k=1}^{m} m c_0(\varphi_k,t) \bar{V}_{0k} \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \big(c(x,t,\varepsilon)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \big) \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \big(c_0(x,t)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \big) \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} + O(\varepsilon).$$

Очевидно, що виконуються такі нерівності:

$$\left| c_0(x,t)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \right| \left| \frac{\bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right| =$$

$$= \left| \big(c_0(x,t) - c_0(\varphi_l,t) \big) \bar{V}_{0l} + c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right| \leq$$

$$\leq C_{11}\varepsilon|\tau_l| \left| \bar{V}_{0l} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right| + \left| c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right|,$$

де C_{11} — деяка стала, що залежить лише від множини K.

Тоді, беручи до уваги нерівність

$$\left| c_0(\varphi_l,t)\bar{V}_{0l} - c_0(\varphi_k,t)\bar{V}_{0k} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{m} \left| A(\varphi_k,t) \right| \left(C_{11} \left| \frac{x-\varphi_l(t)}{\varepsilon} \right|^2 + C_{22} \left| \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon} \right|^2 \right) \left| \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} \right|,$$

отримуємо асимптотичне співвідношення

$$\left| B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) \right| \leq C_{12}\,\varepsilon, \qquad (x,t) \in \mathcal{T}_1,$$

де C_{12} — деяка стала, що залежить від множини K.

Таким чином, знаходимо асимптотичну оцінку $R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

Це означає, що на множині $\mathcal{T}_1$ функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{1k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right)$$

задовольняє рівняння (3) з точністю $O(\varepsilon)$.

З доведення теореми 2 випливає така властивість побудованого асимптотичного розв'язку $Y_1(x,t,\varepsilon)$: якщо значення $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ такі, що $|x-\varphi_k(t)|/\varepsilon = |\tau_k| \to +\infty$ при всіх $k=\overline{1,m}$, то для таких значень (x,t) функція $Y_1(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$, вигляду (31) задовольняє рівняння (3) з точністю $O(\varepsilon^2)$.

Ця властивість асимптотичного розв'язку $Y_1(x,t,\varepsilon)$ випливає з того, що функції $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $\bar{V}_{1k}(t,\tau_k)$ є швидко спадними за кожною із змінних τ_k, $k=\overline{1,m}$.

Теорему 2 доведено.

Висновки. Побудовано асимптотичний солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Benjamin – Bona – Mahony зі змінними коефіцієнтами у вигляді суми, що містить функції, кожна з яких є однофазовою солітоноподібною функцією. Отримано головний і перший члени такого асимптотичного розв'язку і доведено теореми про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння.

Література

1. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240 – 243.
3. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095 – 1097.
4. *Novikov S., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E.* Theory of solitons. The inverse scattering method. – Berlin: Springer, 1984. – 276 p.
5. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral transform and solitons. – Amsterdam: North-Holland, 1982. – 516 p.
6. *Wadati M.* The modified Korteweg – de Vries equation // J. Phys. Soc. Jap. – 1973. – **34**, № 6. – P. 1289 – 1296.
7. *Toda M.* Nonlinear waves and solitons. – Tokyo: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 377 p.
8. *Kaup D. J., Newell A. C.* An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, № 4. – P. 798 – 801.
9. *Kadomtsev B. B., Petviashvili V. I.* On the stability of solitary waves in weakly dispersive media // Sov. Phys. Dokl. – 1970. – **15**. – P. 539 – 541.
10. *Kaup D. J.* A higher-order water-wave equation and the method for solving it // Prog. Theor. Phys. – 1975. – **54**. – P. 396 – 408.
11. *Newell A. C.* Nonlinear wave motion // Lect. Appl. Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1974. – 229 p.
12. *Lamb G.R., Jr.* Elements of soliton theory. – New York: J. Wiley, 1980. – 289 p.
13. *Peregrin D. H.* Calculations of the development of an undular bore // J. Fluid Mech. – 1966. – **25**, № 2. – P. 321 – 330.
14. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1972. – **272**. – P. 47 – 78.
15. *Abdulloyev Kh. O., Bogolubsky I. L., Makhankov V. G.* One more example of inelastic soliton interaction // Phys. Lett. A. – 1976. – **56**. – P. 427 – 428.
16. *Santarelli A. R.* Numerical analysis of the regularized long-wave equation: inelastic collision of solitary waves // Nuova Cim. B. – 1978. – **46**. – P. 179 – 188.
17. *Bona J. L., Pritchard W. G., Scott L. R.* Solitary wave interaction // Phys. Fluids. – 1980. – **23**, № 3. – P. 438 – 441.
18. *Bona J. L., Pritchard W. G., Scott L. R.* An evolution of a model equation for water waves // Phyl. Trans. Roy. Soc. A. – 1981. – **302**. – P. 457 – 510.
19. *Seadway A. R., Sayed A.* Travelling wave solutions of the Benjamine – Bona – Mahony wate wave equations // Abstr. and Appl. Anal. – 2014. – **2014**. – Article ID 926838. – 7 p.

20. *Eilback J. C., McGruire G. R.* Numerical studies of the regularized long wave equation. I: Numerical methods // J. Comput. Phys. – 1975. – **19**. – P. 43 – 57.
21. *Eilback J. C., McGruire G. R.* Numerical studies of the regularized long wave equation. II: Interaction of solitary waves // J. Comput. Phys. – 1977. – **23**. – P. 63 – 73.
22. *Dodd R. K., Eilback J. C., Gibbon J. D., Morris H. C.* Solitons and nonlinear wave equations. – First ed. – Acad. Press., 1982. – 630 p.
23. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 407 с.
24. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
25. *Miura R. M., Kruskal M. D.* Application of nonlinear WKB-method to the Korteweg – de Vries equation // SIAM Appl. Math. – 1974. – **26**, № 2. – P. 376 – 395.
26. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. I // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 3. – P. 253 – 290.
27. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. II // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 5. – P. 571 – 593.
28. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. III // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 6. – P. 809 – 829.
29. *Flaschka H., Forest M. G., McLaughlin D. W.* Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**, № 6. – P. 739 – 784.
30. *Ильин А. М., Калякин Л. А.* Возмущение конечносолитонных решений уравнения Кортевега – де Фриса // Докл. РАН. – 1994. – **336**, № 5. – С. 595 – 598.
31. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.
32. *de Kerf F.* Asymptotic analysis of a class of perturbed Korteweg – de Vries initial value problems. – Amsterdam: Centr. Wiskunde Inform., 1988. – **50**. – 180 p.
33. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg – de Vries equation with variable coefficients // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 1. – P. 132 – 148.
34. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients. I // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 7. – P. 1109 – 1127.
35. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients. II // Ukr. Math. J. – 2013. – **64**, № 8. – P. 1241 – 1259.
36. *Samoilenko V., Samoilenko Yu.* Asymptotic soliton like solutions to the singularly perturbed Benjamin – Bona – Mahony equation with variable coefficients // arXiv:1703.01265. – 19 p.
37. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic multiphase Σ-solutions to the singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients // J. Math. Sci. – 2014. – **200**, № 3. – P. 358 – 373.
38. *Maslov V. P., Omel'yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: Amer. Math. Soc., 2001. – 243 p.
39. *Самойленко Ю. І.* Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 1. – С. 293 – 300.
40. *Самойленко Ю. І.* Існування розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Буков. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 120 – 124.
41. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I* Existence of a solution to the inhomogeneous equation with the one-dimensional Schrödinger operator in the space of quickly decreasing functions // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, № 1. – P. 70 – 76.

Одержано 28.09.17