УДК 517.5

А. С. Романюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ І БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain the exact order estimates for the Kolmogorov widths of the classes W^g_p of periodic functions of one variable generated by the integral operators with kernels $g(x,y)$ from the Nikol'skii – Besov classes $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$. We also study the behavior of bilinear approximations to the classes $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ of periodic multivariate functions with bounded mixed derivative in the spaces L_{q_1,q_2} for some relations between the parameters $r_1,\ p,\ q_1$, and q_2.

Получены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов периодических функций одной переменной W^g_p, порожденных интегральными операторами с ядрами $g(x,y)$, принадлежащими классам Никольского – Бесова $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$. Исследовано также поведение билинейных приближений классов $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ периодических функций многих переменных с ограниченной смешанной производной в пространствах L_{q_1,q_2} для некоторых соотношений между параметрами $r_1,\ p,\ q_1,\ q_2$.

1. Вступ. У цій статті основну увагу зосереджено на встановленні точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників класів періодичних функцій однієї змінної, певним чином пов'язаних із класами Нікольського – Бєсова $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ періодичних функцій двох змінних. Знайдені оцінки цих величин доповнюють результати, отримані в роботах [1, 2], в яких можна ознайомитися з історією питання і детальною бібліографією. Крім цього, ми досліджуємо наближення класів $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ періодичних функцій $2d$ змінних з обмеженою мішаною похідною лінійними комбінаціями добутків функцій d змінних. Такого виду наближення називають білінійними. Одержані в цьому напрямку результати доповнюють оцінки відповідних величин, які встановлені в [3] (гл. 4, § 3).

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний простір з елементами $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d),\ \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_d),\ (\mathbf{x},\mathbf{y})= = x_1y_1+\ldots+x_dy_d$ і $L_p(\pi_d),\ \pi_d=\prod_{j=1}^d[0;\,2\pi)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x})$, для яких

$$\|f\|_p=\left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\le p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{\mathbf{x}\in\pi_d}|f(\mathbf{x})|<\infty,\quad p=\infty.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f\in L_p(\pi_d),\ 1\le p\le\infty$, виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi}f(\mathbf{x})dx_j=0,\quad j=\overline{1,d},$$

і множину таких функцій будемо позначати $L^0_p(\pi_d)$.

Для векторів $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d),\ k_j\in\mathbb{Z}$, і $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_d),\ s_j\in\mathbb{N},\ j=\overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(\mathbf{s})=\{\mathbf{k}\colon 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\}$$

і для $f\in L^0_1(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай $1 < p < \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тоді класи $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ означаються таким чином [4, 5]:

$$B^{\mathbf{r}}_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}} = \left(\sum_{\mathbf{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})\theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ і

$$B^{\mathbf{r}}_{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\mathbf{r}}_{p,\infty}} = \sup_{\mathbf{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Зазначимо, що класи $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ є аналогами класів функцій, які були введені О. В. Бєсовим [6], і $B^{\mathbf{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\mathbf{r}}_p$, де $H^{\mathbf{r}}_p$ — аналоги класів, уведених С. М. Нікольським (див., наприклад, [7], гл. 4, § 4.3).

Наведене означення класів $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ можна поширити і на крайні значення $p = 1$ і $p = \infty$, видозмінивши певним чином „блоки" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$.

Нехай $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, — ядро Валле Пуссена порядку $2l$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j))$$

і для $f \in L^0_1(\pi_d)$ позначимо

$$A_{\mathbf{s}}(f) := A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = (f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x}),$$

де "$*$" означає операцію згортки. Тоді для кожного $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, класи $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ означаються таким чином:

$$B^{\mathbf{r}}_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}} = \left(\sum_{\mathbf{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})\theta} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ і

$$B^{\mathbf{r}}_{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\mathbf{r}}_{p,\infty}} = \sup_{\mathbf{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Зазначимо, що зі зростанням параметра θ класи $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ розширюються, тобто

$$B^{\mathbf{r}}_{p,1} \subset B^{\mathbf{r}}_{p,\theta_1} \subset B^{\mathbf{r}}_{p,\theta_2} \subset B^{\mathbf{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\mathbf{r}}_p, \tag{1}$$

де $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \infty$.

Результати другої частини роботи стосуються наближення класів періодичних функцій $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ з обмеженою мішаною похідною, тому наведемо їх означення.

Нехай $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться лише за тими векторами $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d)$, для яких $k_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Позначимо через $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ (див., наприклад, [3], гл. 2, § 1) клас функцій f, які можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{y},$$

де $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \le 1$.

З детальною інформацією про класи (простори) $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ і $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, а також з історією їх дослідження можна ознайомитись у монографіях [3, 4, 7 – 9] і оглядових статтях [5, 10, 11].

У першій частині роботи при дослідженні колмогоровських поперечників функціональних класів використовуються оцінки найкращих білінійних наближень класів Нікольського – Бєсова у мішаній нормі. Для формулювання відповідного результату введемо необхідні позначення і означення, а також вкажемо на існуючий зв'язок між білінійними наближеннями функцій і сингулярними числами відповідних інтегральних операторів.

Нехай $\mathbf{p} = (p_1,p_2)$, $1 \le p_1,p_2 \le \infty$, і $L_{\mathbf{p}}(\pi_2)$ — множина функцій $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, 2π-періодичних за обома змінними зі скінченними нормами

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |f(\mathbf{t})|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

при $1 \le p_j < \infty$, $j = 1,2$, і

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{t}\in\pi_2} |f(\mathbf{t})|$$

при $p_j = \infty$, $j = 1,2$.

Зауважимо, що при $\mathbf{p} = (p,p)$ $\|\cdot\|_{p,p} \equiv \|\cdot\|_p$, і в такому випадку будемо писати $L_p(\pi_2)$ замість $L_{\mathbf{p}}(\pi_2)$.

Для $f \in L_{\mathbf{q}}(\pi_2)$, $\mathbf{q} = (q_1,q_2)$, означимо найкраще білінійне наближення порядку M формулою

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}[0;2\pi)$, $v_i \in L_{q_2}[0;2\pi)$.

Якщо $F \subset L_{\mathbf{q}}(\pi_2)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}.$$

Перший результат щодо білінійних наближень було одержано Е. Шмідтом [12] при дослідженні інтегральних рівнянь. При цьому виявилось, що наближення функцій $f(x,y)$ двох змінних білінійними формами у просторі $L_{\mathbf{2}}([0;1]^2)$ пов'язані з властивостями інтегральних операторів

$$(J_f\varphi)(x) = \int\limits_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy$$

з ядром $f(x,y)$. Точніше, Е. Шмідт одержав розвинення

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

де $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ — незростаюча послідовність сингулярних чисел оператора J_f, тобто $s_j(J_f) = \lambda_j(J_f^* J_f)$, $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$ — послідовність власних чисел оператора A, J_f^* — оператор, спряжений до оператора J_f, а $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормовані системи власних функцій операторів $J_f J_f^*$ і $J_f^* J_f$ відповідно.

Крім цього, Е. Шмідт встановив рівність

$$\left\| f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y) \right\|_{2,2} = \inf_{u_j,v_j\in L_2} \left\| f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y) \right\|_{2,2},$$

в якій відображається зв'язок між величинами $\tau_M(f)_{2,2}$ і сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f.

З іншого боку, існує також тісний зв'язок між сингулярними числами $s_M(J_f)$ і колмогоровськими поперечниками відповідних функціональних класів.

Нехай Y — нормований простір, $\mathrm{Lin}_M(Y)$ — сукупність підпросторів Y розмірності не вищої за M і W — деяка опукла і центрально-симетрична підмножина в Y. Тоді величина [13]

$$d_M(W,Y) = \inf_{L_M\in \mathrm{Lin}_M(Y)} \sup_{x\in W} \inf_{y\in L_M} \|x-y\|_Y$$

називається колмогоровським поперечником множини W у просторі Y.

Відомо (див., наприклад, [14]), що для сингулярних чисел $s_{M+1}(J_f)$ інтегрального оператора

$$(J_f\varphi)(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

має місце співвідношення

$$s_{M+1}(J_f) = d_M(W_2^f, L_2), \quad f\in L_2(\pi_{2d}),$$

де W_2^f — образ при відображенні J_f одиничної кулі з $L_2(\pi_d)$ у простір $L_2(\pi_d)$.

2. Колмогоровські поперечники. У цьому пункті будемо досліджувати поведінку величин $d_M(W^g_p, L_q)$, де W^g_p — класи 2π-періодичних функцій $\psi(x)$, які можна записати у вигляді

$$\psi(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} g(x,y)\varphi(y)dy, \quad \|\varphi\|_p \le 1,$$

де функції $g(x,y)$ належать класам $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$.

Зауважимо, що класи $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ є природним узагальненням класів $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, апроксимативні характеристики яких у двовимірному випадку досліджувались у роботі [15].

Зазначимо також, що колмогоровські поперечники $d_M(W^g_p, L_q)$ у випадках, коли функції $g(x,y)$ належать класам $W^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}}$ або $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$, вивчалися В. М. Темляковим [1, 2].

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. При цьому для двох невід'ємних послідовностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує така стала $C > 0$ (незалежна від n), що $a_n \le Cb_n$; співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які далі будуть міститися в порядкових співвідношеннях і, зокрема, в означеннях функцій, можуть залежати від певних параметрів. Інколи ми цю залежність будемо вказувати, а в інших випадках вона буде зрозумілою з контексту.

Для доведення отриманих результатів нам знадобиться кілька допоміжних тверджень.

Нехай для компонент векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ і $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ виконані співвідношення $1 \le$ $\le p_1 \le q_1 \le \infty$ і $1 \le p_2, q_2 \le \infty$.

Покладемо

$$\beta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{q_1}, & 1 \le p_1 \le q_1 \le 2, \\ 0, & 2 \le p_1 \le q_1 \le \infty, \\ \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{2}, & 1 \le p_1 < 2 < q_1 \le \infty, \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{q_1}, \left(\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{q_2}\right)_+\right), & 1 \le p_1 \le q_1 \le 2, \\ \left(\dfrac{1}{p_1}, \dfrac{1}{p_2}\right), & 2 \le p_1 \le q_1 \le \infty, \quad q_1 > 2, \\ \left(\dfrac{1}{p_1}, \max\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{p_2}\right)\right), & 1 \le p_1 < 2 < q_1 \le \infty, \end{cases}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема А [15]. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, $1 \le p_1 \le q_1 \le \infty$, $1 \le p_2$, $q_2 \le \infty$. *Тоді при* $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ *справджується оцінка*

$$\tau_M(B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta})_{\mathbf{q}} \asymp M^{-r_1 - r_2 + \beta(\mathbf{p},\mathbf{q})}.$$

***Зауваження* 1.** Тут і далі векторні нерівності будемо розуміти покомпонентно.

Теорема Б [1]. *Нехай* $g(x,y) \in L_{q_1,\infty}(\pi_2)$. *Тоді*

$$d_M(W^g_1, L_{q_1}) = \tau_M(g)_{q_1,\infty}, \quad 1 \le q_1 \le \infty. \tag{2}$$

Нехай $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d),\ v(\mathbf{m}) = \prod_{j=1}^{d}(2m_j + 1),\ m_j,\ j = \overline{1,d},$ — цілі невід'ємні числа. Позначимо через $T(\mathbf{m})$ множину комплекснозначних тригонометричних поліномів вигляду

$$t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{|k_j| \le m_j \\ j=\overline{1,d}}} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d).$$

Теорема B [2]. *Нехай $\varepsilon > 0$ і підпростір $\Psi \subset T(\mathbf{m})$ такий, що $\dim \Psi \ge \varepsilon\, v(\mathbf{m})$. Тоді знайдеться такий поліном $t \subset \Psi$, що*

$$\|t\|_\infty \le 1 \quad i \quad \|t\|_2 \ge C_1(\varepsilon, d) > 0.$$

Тепер сформулюємо твердження, яке випливає з відомих результатів.

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{q} = (q_1, \infty),\ 1 \le p_1 \le q_1 \le \infty,\ 1 \le p_2 \le \infty$. Тоді при $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ справджується оцінка*

$$\sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}} d_M(W^g_1, L_{q_1}) \asymp M^{-r_1 - r_2 + \beta(\mathbf{p},\mathbf{q})}. \tag{3}$$

Оцінка (3) є наслідком співвідношення (2) і теореми А.

Теорема 2. *Нехай $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{p}) = \left(\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\right)_+, \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}\right)_+\right)$, $1 \le \theta < \infty$. Тоді для $2 \le a \le \infty$, $1 \le b \le \infty$ справджується співвідношення*

$$\sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}} d_M(W^g_a, L_b) \asymp M^{-r_1 - r_2 + \max\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{2}\right) - 1} \tag{4}$$

з $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{p})$ при $1 \le b \le 2$ і $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{p}) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ при $b > 2$.

Доведення. У процесі доведення ми будемо мати на увазі співвідношення (1), які справедливі і в тому випадку, коли в означенні класів параметр p замінено вектором $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$.

Таким чином, оскільки $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta} \subset H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$, $1 \le \theta < \infty$, то оцінка зверху в (4) випливає із співвідношення [2]

$$\sup_{g \in H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}} d_M(W^g_a, L_b) \asymp M^{-r_1 - r_2 + \max\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{2}\right) - 1}.$$

Для доведення відповідної оцінки знизу розглянемо два випадки: $1 \le p_1 \le 2$ і $2 < p_1 \le \infty$.

У випадку $1 \le p_1 \le 2$ з огляду на вкладення $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},1} \subset B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, шукану оцінку достатньо одержати для деякої функції $g_1(x, y)$, яка належить класу $B^{\mathbf{r}}_{(p,\infty),1}$, а також при $a = \infty$ і $b = 1$.

По заданому M підберемо число $n \in \mathbb{N}$ у відповідності з нерівностями $2^{n-1} \le M \le 2^n$ і розглянемо функцію

$$g_1(x, y) = C_2\, 2^{-n\left(r_1 + r_2 + 1 - \frac{1}{p_1}\right)}\, V_{2^n}(x - y), \quad C_2 > 0.$$

Покажемо, що з відповідною сталою $C_2 > 0$, яка не залежить від n, ця функція належить класу $B^{\mathbf{r}}_{(p,\infty),1}$.

Маємо

$$\|g_1\|_{B^{\mathbf{r}}_{(p,\infty),1}} \asymp 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(s_1 r_1+s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(V_{2^n}(x-y))\|_{p_1,\infty} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} \sum_{s_1=1}^{n+1} \sum_{s_2=1}^{n+1} 2^{(s_1 r_1+s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(V_{2^n}(x-y))\|_{p_1,\infty} \le$$

$$\le 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} \sum_{s_1=1}^{n+1} \sum_{s_2=1}^{n+1} 2^{(s_1 r_1+s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(x,y)\|_{1,1}\times$$

$$\times \|V_{2^n}(x-y)\|_{p_1,\infty} \le 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} \sum_{s_1=1}^{n+1} 2^{s_1 r_1} \sum_{s_2=1}^{n+1} 2^{s_2 r_2} \|V_{2^n}(x)\|_{p_1} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} 2^{n(r_1+r_2)} 2^{n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)} = C_3(r_1,r_2,p_1).$$

Звідси випливає, що $g_1 \in B^{\mathbf{r}}_{(p,\infty),1}$.

Нехай далі $T(M)_\infty$ — множина тригонометричних поліномів t порядку M таких, що $\|t\|_\infty \le 1$. Позначимо через $\widetilde{W}^{g_1}_\infty$ множину функцій $\widetilde{\psi}_(x)$, які мають вигляд

$$\widetilde{\psi}(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} g_1(x,y)\varphi(y)dy,$$

де $\varphi \in T(M)_\infty$.

Для оцінки поперечника $d_M(\widetilde{W}^{g_1}_\infty, L_1)$ скористаємось оцінкою

$$d_M(T(M)_\infty, L_1) \ge C_4 > 0, \tag{5}$$

яка легко отримується з теореми B.

Дійсно, розглянемо деяку систему функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$ і означимо підпростір $\Psi \subset T(M)$:

$$\Psi = \{t \in T(M) \colon (t,u_i) = 0, i = \overline{1,M}\}.$$

Тоді $\dim\Psi \ge M$, і згідно з теоремою B знайдеться елемент $f \in \Psi$ такий, що

$$\|f\|_\infty \le 1 \quad \text{і} \quad \|f\|_2 \ge C_5 > 0.$$

Тому для $u \in \operatorname{lin}\{u_i\}_{i=1}^M$ будемо мати

$$C_5^2 \le (f,f) = (f-u,f) \le \|f-u\|_1 \|f\|_\infty \le \|f-u\|_1.$$

Звідси випливає оцінка (5).

Таким чином, використавши (5), можемо записати

$$\sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{(p_1,\infty),1}} d_M(W^g_\infty, L_1) \ge d_M(\widetilde{W}^{g_1}_\infty, L_1) \asymp 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} d_M(T(M)_\infty, L_1) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(r_1+r_2+1-\frac{1}{p_1}\right)} \asymp M^{-r_1-r_2-1+\frac{1}{p_1}}.$$

Оцінку знизу у випадку $1 \le p_1 \le 2$ доведено.

Нехай тепер $p_1 \in (2, \infty]$. Легко бачити, що в цьому випадку шукану оцінку достатньо одержати для $\mathbf{p} = (\infty, \infty)$, $\theta = 1$, $a = \infty$, $b = 1$.

По заданому M підберемо $n \in \mathbb{N}$ з нерівностей $2^{n+1} \le 5M \le 2^{n+2}$ і розглянемо функцію

$$g_2(x, y) = C_6 2^{-n\left(r_1+r_2+\frac{1}{2}\right)} R_{5M}(x - y), \quad C_6 > 0,$$

де

$$R_{5M}(u) = \sum_{k=1}^{5M} \varepsilon_k \cos ku, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

— поліноми Рудіна – Шапіро (див., наприклад, [16, с. 153]), для яких справджується співвідношення

$$\|R_{5M}\|_\infty \ll M^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Покажемо, що функція $g_2(x, y)$ з деякою сталою $C_6 > 0$ належить класу $B^{\mathbf{r}}_{\infty,1}$. Маємо

$$\|R_{5M}(x - y)\|_{B^{\mathbf{r}}_{\infty,1}} = \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(s_1 r_1 + s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(R_{5M}(x - y))\|_\infty =$$

$$= \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(s_1 r_1 + s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(x, y) * R_{5M}(x - y)\|_\infty \le$$

$$\le \sum_{s_1=1}^{n+2} \sum_{s_2=1}^{n+2} 2^{(s_1 r_1 + s_2 r_2)} \|A_{(s_1,s_2)}(x, y)\|_1 \|R_{5M}(x - y)\|_\infty \ll$$

$$\ll 2^{n(r_1+r_2)} M^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{n\left(r_1+r_2+\frac{1}{2}\right)}.$$

Звідси випливає, що $g_2 \in B^{\mathbf{r}}_{\infty,1}$.

Нехай далі $\mathfrak{L}_M$ — довільний підпростір із L_1 розмірності M, а $\mathcal{U}$ — лінійна оболонка $\{\sin k_m x, \cos k_m x\}_{m=1}^{N_1}$, де $\{k_m\}_{m=1}^{N_1} = \Theta_{N_1}$ — множина індексів, для яких $\varepsilon_{k_m} = -1$. Множину решти індексів k_m, які містяться в $R_{5M}(u)$, позначимо через Θ_{N_2}. Тоді згідно зі співвідношенням (6) будемо мати

$$N_1 = \left\| \sum_{k_m \in \Theta_{N_1}} \cos k_m x \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{5M} \varepsilon_k \cos kx - \sum_{k_m \in \Theta_2} \cos k_m x \right\|_\infty \le$$

$$\le \left\| \sum_{k=1}^{5M} \varepsilon_k \cos kx \right\|_\infty + \left\| \sum_{k_m \in \Theta_{N_2}} \cos k_m x \right\|_\infty = N_2 + O(M^{\frac{1}{2}}). \tag{7}$$

Легко бачити, що і для N_2 має місце аналогічна оцінка, тобто

$$N_2 \le N_1 + O(M^{\frac{1}{2}}). \tag{8}$$

Таким чином, згідно з (7) і (8) можемо вважати, що

$$N_1 = \frac{5}{2}M + O(M^{\frac{1}{2}}),$$

і тому починаючи з деякого M_0 для всіх $M \geq M_0$ будемо мати

$$N_1 \leq 3M.$$

Далі розглянемо підпростір Ψ вигляду

$$\Psi = T(5M) \cap U \cap \mathfrak{L}_M^{\perp},$$

при цьому $\dim \Psi \geq M$.

Тоді згідно з теоремою В знайдеться тригонометричний поліном $t \in T(5M)_{\infty}$ такий, що $\|t\|_2 \gg 1$ і, крім цього, для $u \in U$ і $\tau \in \mathfrak{L}_M$ будуть виконані співвідношення

$$(\tau, t) = (u, t) = 0. \tag{9}$$

Таким чином, для полінома t можемо записати

$$(J_{g_2}t)(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} g_2(x,y)t(y)dy = C_7 M^{-r_1-r_2-\frac{1}{2}} t(x). \tag{10}$$

Тепер розглянемо наближення $J_{g_2}t$ елементами підпростору $\mathfrak{L}_M$. Нехай $\tau \in \mathfrak{L}_M$. Тоді, з одного боку, з урахуванням співвідношення (10) і рівностей (9) будемо мати

$$I = (J_{g_2}t - \tau, t) = C_7 M^{-r_1-r_2-\frac{1}{2}} \|t\|_2 - (\tau, t) \gg M^{-r_1-r_2-\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

а з іншого — виконуються нерівності

$$I \leq |\ (J_{g_2}t - \tau, t)\ | \leq \|\ J_{g_2}t - \tau\ \|_1\ . \tag{12}$$

Співставляючи (11) і (12), приходимо до шуканої оцінки й у випадку $p_1 \in (2, \infty]$.

Теорему 2 доведено.

Прокоментуємо результат теореми 2, співставивши його з оцінкою сингулярних чисел $s_M(J_g)$ інтегральних операторів J_g, які одержані в роботі [17]. При цьому для зручності наведемо відповідне твердження у частковому випадку, а саме при $d = 1$ і певних обмеженнях на вектор $\mathbf{p}$ і параметр θ.

Теорема Г. *Нехай* $\mathbf{2} \leq \mathbf{p} \leq \infty,\ 2 \leq \theta < \infty,\ \mathbf{r} > \mathbf{0}$. *Тоді для класу функцій двох змінних* $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ *справджується оцінка*

$$\sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}} s_M(J_g) \asymp M^{-r_1-r_2-\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Таким чином, порівнявши (13) з результатом теореми 2, приходимо до такого висновку.

Нехай $\mathbf{2} \leq \mathbf{p} \leq \infty,\ 2 \leq \theta < \infty,\ 2 \leq a \leq \infty$. Тоді при $1 \leq b \leq 2$ і $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ або при $2 < b < \infty$ і $r_1 > \dfrac{1}{2},\ r_2 > 0$ має місце співвідношення

$$\sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}} s_M(J_g) \asymp \sup_{g \in B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}} d_M(W^g_a, L_b) \asymp M^{-r_1-r_2-\frac{1}{2}}.$$

3. Найкращі білінійні наближення. У цій частині роботи встановимо деякі оцінки, що стосуються найкращих білінійних наближень класів $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$. Іншими словами, одержимо точні за порядком оцінки величин

$$\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}} \tau_M(f(x-y))_{q_1,q_2} \tag{14}$$

за умови, що $f(\mathbf{x}) \in W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d$.

Зазначимо, що величини (14), а також їхні аналоги для класів $H^{\mathbf{r}}_p$ і $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ досліджувалися в роботах [2, 18 – 21], у яких можна ознайомитися з історією питання і більш детальною бібліографією.

Перш ніж перейти до формулювання і доведення одержаного результату, наведемо одну відому оцінку величини $\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1,q_2}$.

Теорема Д [3, с. 96]. *Нехай $1 < p \le 2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$. Тоді при $r_1 > \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{2}$ справджується співвідношення*

$$\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{2}{p}+1}. \tag{15}$$

Зауваження 2. Тут і далі будемо вважати, що координати вектора $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_d)$ упорядковано таким чином: $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$.

Зазначимо також, що оцінку знизу в (15) було отримано при $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$.

Крім співвідношення (15) нам знадобляться оцінки ще однієї апроксимативної характеристики.

Нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас. Тоді позначимо

$$e_M(F)_q = \sup_{f\in F} \inf_{\mathbf{k}^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\mathbf{k}^j,\cdot)} \right\|_q, \tag{16}$$

де $\{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^M$ — система векторів $\mathbf{k}^j = (k_1^j,\ldots,k_d^j)$ з цілочисловими координатами, а c_j, $j=\overline{1,M}$, — довільні комплексні числа. Величина (16) називається найкращим M-членним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

З історією дослідження величин $e_M(F)_q$ для різноманітних функціональних класів можна ознайомитись у роботах [10, 22 – 24] і монографіях [3, 9].

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $1 < p \le 2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$. Тоді при $r_1 > \dfrac{1}{p}$ має місце співвідношення*

$$\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{2}{p}+1}. \tag{17}$$

Доведення. Оцінка знизу в (17) є наслідком оцінки величини $\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{2,1}$, яку встановлено в [3] при $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$.

При доведенні відповідної оцінки зверху скористаємось співвідношенням [23]

$$e_M(W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{2}{p}+1}, \tag{18}$$

$1 < p \leq 2 < q_1 < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{p}.$

Таким чином, згідно з (18) для довільної функції $f(\mathbf{x})$ з класу $W^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ знайдуться множини векторів $\mathbf{k}^1,\ldots,\mathbf{k}^M,\ \mathbf{k}^j=(k^j_1,\ldots,k^j_d),\ k^j_m\in\mathbb{Z},\ m=\overline{1,d}$, і чисел $c_1,\ldots,c_M$ таких, що

$$\left\|f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}\right\|_{q_1} \ll M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{2}{p}+1}. \tag{19}$$

З іншого боку, для лівої частини (19) можемо записати

$$\left\|f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}\right\|_{q_1} = \left\|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(\mathbf{k}^j,(\mathbf{x}-\mathbf{y}))}\right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}\,e^{-i(\mathbf{k}^j,\mathbf{y})}\right\|_{q_1,\infty}. \tag{20}$$

Співставивши (19) і (20), будемо мати

$$\left\|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}\,e^{-i(\mathbf{k}^j,\mathbf{y})}\right\|_{q_1,\infty} \ll M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{2}{p}+1}. \tag{21}$$

Тепер поклавши у (21) $c_je^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}=u_j(\mathbf{x})$ і $e^{-i(\mathbf{k}^j,\mathbf{y})}=v_j(\mathbf{y})$, отримаємо шукану оцінку.

Теорему 3 доведено.

Насамкінець наведемо твердження щодо оцінки величини $\tau_M(W^{r_1}_{1,\alpha})_{q_1,q_2}$ в одновимірному випадку.

Теорема 4. *Нехай* $d=1,\ 2<q_1<\infty,\ 1\leq q_2\leq\infty$. *Тоді при* $r_1>1$ *справджується оцінка*

$$\tau_M(W^{r_1}_{1,\alpha})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Доведення. Оцінка зверху в (22) випливає зі співвідношення [22]

$$e_M(W^{r_1}_{1,\alpha})_{q_1} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{2}}.$$

Відповідну оцінку знизу одержано в [3] (гл. 4, § 3).

Теорему 4 доведено.

Зауваження 3. Питання про порядок величин $\tau_M(W^{\mathbf{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}})_{q_1,q_2},\ 2<q_1<\infty,\ 1\leq q_2\leq\infty$, при $d\geq 2$ залишається відкритим.

Література

1. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **134(176)**, № 1(9). – С. 93 – 107.

2. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1992. – **194**. – С. 229 – 248.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
4. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 224 с.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
6. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. *Бесов О. И., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
9. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
10. *Ding D., Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601.03978v2 [math. NA] 2 Dec. 2016.
11. *Теляковский С. А.* О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАНе // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **182**. – С. 128 – 179.
12. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**, № 4. – S. 433 – 476.
13. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – P. 107 – 111.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.
15. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
16. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
17. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Оценки наилучших билинейных приближений классов $B^r_{p,\theta}$ и сингулярных чисел интегральных операторов // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1240 – 1250.
18. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.
19. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097 – 1111.
20. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
21. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 12. – С. 1681 – 1699.
22. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
23. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
24. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.

Одержано 13.10.17