УДК 517.9

Н. А. Перестюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

We develop the ideas of the method of averaging for some classes of fuzzy systems (fuzzy differential equations with delay, fuzzy differential equations with pulsed action, fuzzy integral equations, fuzzy differential inclusions and differential inclusions with fuzzy right-hand sides without and with pulsed action).

Розглянуто розвиток ідей методу усереднення для деяких класів нечітких систем (нечітких диференціальних рівнянь із запізненням, нечітких диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, нечітких інтегральних рівнянь, нечітких диференціальних включень і диференціальних включень з нечіткою правою частиною при відсутності та наявності імпульсного впливу).

Теория нечетких множеств является очень удобным аппаратом моделирования неопределенности. С одной стороны, она дает более широкие возможности, чем, например, интервальный анализ, так как совмещает его с использованием вероятностных оценок, а с другой — отличается от теории вероятностей в основных модельных предположениях, подходе и утверждениях. Теория нечетких множеств может применяться в случаях, когда использовать вероятностную интерпретацию невозможно, например если флуктуации переменной не стохастичны по своей природе, если недоступны статистические данные, если имеющейся информации недостаточно для того, чтобы утверждать выполнение вероятностных аксиом. С 1965 г., когда L. Zadeh [74] опубликовал свою новаторскую работу, рассмотрены сотни примеров, в которых природа неопределенности в поведении процессов системы является нечеткой.

Нечеткие дифференциальные уравнения очень важны как с теоретической точки зрения, так и с практической. Они находят применение, например, в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в строительстве, в создании гидравлических и популяционных моделей, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений, при прогнозировании различных экономических, политических, биржевых ситуаций и т. п.

Асимптотические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений занимают центральное место в нелинейной механике и смежных разделах математики, механики, физики и техники. Разработка общего алгоритма, получившего название метода усреднения Крылова – Боголюбова, и теорема о близости решений точной и усредненной систем принадлежат Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову [11]. В дальнейшем Н. Н. Боголюбов создал строгую теорию метода усреднения и показал, что этот метод органично связан с существованием замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра ε, обосновал асимптотический характер приближений, получаемых методом усреднения, и установил соответствие между решениями точных и усредненных уравнений на бесконечном временном интервале.

Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Л. Д. Акуленко, В. М. Волосова, Е. А. Гребенникова, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. Н. Филатова, Ф. Л. Черноусько и др. для нелинейных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, многочастотных систем уравнений в частных производных, разностных уравнений, уравнений с разрывными правыми частями, импульсных дифференциальных уравнений, уравнений с запаздыванием, стохастических уравнений, уравнений в бесконечномерных пространствах, дифференциальных включений, дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары, многозначных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, квазидифференциальных уравнений и т. п. (см. [3, 4, 12 – 16, 20, 21, 24, 33, 34, 38, 43, 49, 63] и приведенную там библиографию).

В данном обзоре рассмотрим развитие идей метода усреднения для некоторых классов нечетких систем.

1. Нечеткие уравнения. Введем в рассмотрение нечеткое пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру, т. е. для любых $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\tilde{y}, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y - \tilde{y}\| < \delta$ выполняется неравенство $u(y) < u(\tilde{y}) + \varepsilon$;

2) u нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(y_0) = 1$;

3) u нечетко выпукло, т. е. для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ имеет место неравенство $u(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \geq \min\{u(y_1), u(y_2)\}$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$$

Определение 1. *α-Срезкой $[u]^\alpha$ нечеткого множества $u \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ называется множество $\big\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) \geq \alpha\big\}$. Нулевой срезкой множества $u \in \mathbb{E}^n$ называется замыкание множества $\big\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\big\}$.*

Теорема 1 [40]. *Если $u \in \mathbb{E}^n$, то*:

1) $[u]^\alpha \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$;

2) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) *если $\{\alpha_k\}$ — неубывающая последовательность, стремящаяся к α, то* $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{k \geq 1} [u]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если семейство множеств $\big\{A_\alpha : \alpha \in [0,1]\big\}$ из пространства $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет свойствам 1 – 3, то существует $u \in \mathbb{E}^n$ такое, что $[u]^\alpha = A_\alpha$ для всех $\alpha \in (0,1]$ и $[u]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A_\alpha} \subset A_0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}_+$, положив

$$D(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h\big([u]^\alpha, [v]^\alpha\big),$$

где $h\colon \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ — расстояние по Хаусдорфу. Модулем $|u|$ нечеткого множества $u \in \mathbb{E}^n$ будем называть величину $D(u, \hat{0})$.

В 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [62] ввели понятия H-производной и интеграла для нечетких отображений, в которых использовались подходы M. Hukuhara и R. J. Aumann для α-срезок нечетких отображений.

Определение 2. *Отображение* $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *называется измеримым* (*непрерывным*, *липшицевым по* x *с постоянной* L) *на* $[t_0,T]$, *если для всех* $\alpha \in [0,1]$ *многозначное отображение* $f_\alpha\colon [t_0,T] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, *определенное как* $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$, *измеримо* (*непрерывно*, *липшицево по* x *с постоянной* L).

Определение 3 [40]. *Интегралом от отображения* $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *на отрезке* $[t_0,T]$ *называется элемент* $g = \int_{t_0}^{T} f(t)dt \in \mathbb{E}^n$ *такой, что* $[g]^\alpha = \int_{t_0}^{T} f_\alpha(t)dt$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$ (*интеграл от многозначного отображения* $f_\alpha(\cdot)$ *понимается в смысле Ауманна*).

Определение 4 [40]. *Отображение* $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *называется дифференцируемым в точке* $\tilde t \in [t_0,T]$, *если для любого* $\alpha \in [0,1]$ *многозначное отображение* $f_\alpha(\cdot)$ *дифференцируемо по Хукухаре в точке* $\tilde t$ *и семейство* $\big\{D_H f_\alpha(\tilde t)\colon \alpha \in [0,1]\big\}$ *определяет некоторый элемент* $f'(\tilde t) \in \mathbb{E}^n$. *Если* $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *дифференцируемо в точке* $\tilde t \in [t_0,T]$, *то элемент* $f'(\tilde t)$ *будем называть нечеткой производной от* $f(\cdot)$ *в точке* $\tilde t$.

Определение 5. *Отображение* $f\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *называется абсолютно непрерывным на промежутке* $[t_0,T]$, *если существуют* $x_0 \in \mathbb{E}^n$ *и интегрируемое измеримое нечеткое отображение* $g\colon [t_0,T] \to \mathbb{E}^n$ *такие, что*

$$f(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

В 1987 г. O. Kaleva в работе [40] впервые рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения на основе H-производной. В дальнейшем были доказаны теоремы существования и изучались свойства решений нечетких дифференциальных уравнений (O. Kaleva, H. K. Han, J. Y. Park, S. Seikkala, C. X. Wu, S. J. Song и др.), получены условия устойчивости решений (А. А. Мартынюк, Ю. А. Мартынюк-Черниенко, В. И. Слынько, P. Diamond, T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi и др.), рассмотрены уравнения высшего порядка (R. P. Agarwal, E. Ahmady, N. Ahmady, T. Allahviranloo, A. Arara, M. Benchohra, D. N. Georgiou, I. E. Kougias, M. S. N. Murty, J. J. Nieto, A. Ouahab, D. O'Regan, R. Rodriguez-Lopez, G. Suresh Kumar и др.), интегро-дифференциальные уравнения (А. В. Плотников, R. P. Agarwal, P. Balasubramaniam, V. Lakshmikantham, S. Muralisankar, D. O'Regan и др.), импульсные (Н. В. Скрипник, M. Benchohra, J. J. Nieto, A. Ouahab, R. Rodriguez-Lopez и др.), управляемые нечеткие уравнения (А. В. Плотников, N. D. Phu, T. T. Tung и др.), нечеткие уравнения с запаздыванием (О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник и др.) (см. [16, 37, 48] и приведенную в них библиографию).

1.1. Усреднение нечетких дифференциальных уравнений. В работах [16, 17, 57] обоснована возможность применения схемы полного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с малым параметром вида

$$x' = \varepsilon f(t,x), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x \in G \subset \mathbb{E}^n$ — фазовая переменная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f\colon \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение, x_0 — начальное состояние.

Системе (1) поставим в соответствие усредненную систему

$$\bar x' = \varepsilon \overline{f}(\bar x), \tag{2}$$

где
$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt, \overline{f}(x)\right) = 0. \tag{3}$$

Теорема 2 [16, 17, 57]. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{R}_+, x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены следующие условия*:

1) *отображение $f(t,x)$ непрерывно по t, равномерно ограничено постоянной M и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ*;

2) *равномерно относительно $x \in G$ существует предел* (3);

3) *решение $\bar{x}(\cdot)$ системы* (2) *с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0 \in G' \subset G$ определено для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области G.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ выполняется неравенство
$$D(x(t), \bar{x}(t)) < \eta,$$
где $x(\cdot)$ и $\bar{x}(\cdot)$ — решения уравнений (1) *и* (3) *соответственно*, *удовлетворяющие условию $x(0) = \bar{x}(0) \in G'$.*

В работах [46, 47] получено обобщение данного результата: условие равномерной ограниченности заменено условием интегральной ограниченности
$$D\big(f(t,x), \hat{0}\big) = m(t), \qquad \int_{t_1}^{t_2} m(t)de \le M(t_2 - t_1) \quad \text{для любых} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \quad t_1 \le t_2,$$
а условие Липшица — интегральным условием Липшица
$$D\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s,u(s))\,ds, \int_{t_1}^{t_2} f(s,v(s))\,ds\right) \le \lambda \int_{t_1}^{t_2} D\big(u(s), v(s)\big)\,ds$$
для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, t_1 \le t_2$, и любых непрерывных отображений $u, v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{E}^n$.

В [35] интегральное условие Липшица для исходной системы заменено интегральным условием Липшица для усредненной.

В работе [28] доказано следующее обобщение теоремы М. А. Красносельского, С. Г. Крейна [10] на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Теорема 3 [28]. *Пусть для нечеткого дифференциального уравнения*
$$x' = f(t,x,\lambda), \tag{4}$$
где отображение $f(t,x,\lambda)$, принимающее значения в $\mathbb{E}^n$, определено при $t \in [0,T]$, $x \in G$, G — ограниченная область в $\mathbb{E}^n$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, *выполнены следующие условия*:

а) *отображение $f(t,x,\lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по x равномерно относительно t и λ*;

б) *отображение* $f(t,x,\lambda)$ *интегрально непрерывно по* λ *в точке* λ_0, *т. е. для любых* $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$, *и любого* $x \in G$ *выполняется условие*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} D\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} f(s,x,\lambda)\,ds, \int\limits_{t_1}^{t_2} f(s,x,\lambda_0)\,ds\right) = 0;$$

в) *решения* $x(t,\lambda_0)$ *уравнения*

$$x' = f(t,x,\lambda_0), \tag{5}$$

удовлетворяющие начальному условию $x(0,\lambda_0) = x_0 \in G^1 \subset G$, *определены при* $t \in [0,T]$ *и лежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью в области* G.

Тогда каждому $\eta > 0$ *соответствует такая окрестность* $U(\lambda_0)$ *точки* λ_0, *что при* $\lambda \in U(\lambda_0)$ *для любого решения* $x(t,\lambda)$ *уравнения* (4), *определенного при* $t \in [0,T]$ *и удовлетворяющего начальному условию* $x(0,\lambda) = x_0$, *существует такое решение* $x(t,\lambda_0)$ *уравнения* (5), *что выполняется неравенство*

$$D(x(t,\lambda), x(t,\lambda_0)) < \eta, \quad t \in [0,T].$$

Замечания. **1.** Если $x(t,\lambda_0)$ — некоторое решение нечеткого дифференциального уравнения (5), то может не существовать последовательность решений (4), сходящаяся к $x(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

2. Если уравнение (5) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $x(t,\lambda)$ уравнения (4) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

3. Из теоремы 3 непосредственно следует теорема о методе полного усреднения для нечеткого дифференциального уравнения. Действительно, в уравнении (1) выполним замену $\varepsilon t = t_1$, $\varepsilon = \lambda$. Тогда вместо (1) получим уравнение

$$x' = F(t_1,x,\lambda), \tag{6}$$

где принято обозначение $F(t_1,x,\lambda) = f\left(\dfrac{t_1}{\lambda}, x\right)$.

Существование среднего (3) эквивалентно интегральной непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$ правой части уравнения (6).

В работах [7, 16, 25] обоснована возможность применения к нечеткому дифференциальному уравнению (1) схемы частичного усреднения. Такой вариант метода усреднения оказывается полезным, когда для некоторых отображений не существует среднее или же наличие их в системе не усложняет ее исследования.

Уравнению (1) поставим в соответствие частично усредненное нечеткое дифференциальное уравнение

$$\overline{x}' = \varepsilon\overline{f}(t,\overline{x}), \qquad \overline{x}(0) = x_0, \tag{7}$$

где

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int\limits_0^T f(t,x)dt, \int\limits_0^T \overline{f}(t,x)dt\right) = 0. \tag{8}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (1) и (7) на конечном промежутке.

Теорема 4 [16, 25]**.** *Пусть в области* $Q = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *отображение* $f(t,x)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* x *и равномерно непрерывно по* x *равномерно относительно* t;

2) *отображение* $\overline{f}(t,x)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* x *и существуют суммируемая функция* $\lambda(t)$ *и постоянная* λ *такие, что*

$$\lambda(t) \le \lambda, \qquad D\big(\overline{f}(t,x'), \overline{f}(t,x'')\big) \le \lambda(t) D(x', x'');$$

3) *существуют суммируемая функция* $N(t)$ *и постоянная* N_0 *такие, что*

$$D(f(t,x), \hat{0}) \le N(t), \qquad D(\overline{f}(t,x), \hat{0}) \le N(t), \qquad \int\limits_{t_1}^{t_2} N(t)dt \le N_0(t_2 - t_1)$$

для любого конечного отрезка $[t_1, t_2]$;

4) *равномерно относительно* $x \in G$ *существует предел* (8);

5) *решение* $\overline{x}(\cdot)$ *уравнения* (7) *с начальным условием* $\overline{x}(0) = x_0 \in G' \subset G$ *определено при* $t \in \mathbb{R}_+$ *для всех* $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *и лежит с некоторой* ρ*-окрестностью в области* G.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *для всех* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D(x(t), \overline{x}(t)) < \eta, \tag{9}$$

где $x(\cdot)$ *и* $\overline{x}(\cdot)$ *— решения уравнений* (1) *и* (7) *соответственно с начальными условиями* $x(0) = \overline{x}(0) \in G'$.

***Замечание* 4** [56]**.** В случае, когда в теоремах 2, 4 отображения $f(t,x)$ $[$и $\overline{f}(t,x)]$ ω-периодичны по t, оценку (9) можно уточнить: для любого $L > 0$ можно указать $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ такие, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D\big(x(t), \overline{x}(t)\big) < C\varepsilon.$$

В дальнейшем полученные результаты были распространены на случаи:

а) линейных нечетких дифференциальных уравнений [44, 51, 66];

б) нечетких дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием [5]:

$$x'(t,\varepsilon) = \varepsilon f\big(t, x(t,\varepsilon), x(t-\tau,\varepsilon)\big), \tag{10}$$

$$x(s,\varepsilon) = \varphi(s,\varepsilon), \quad -\tau \le s \le 0;$$

в) нечетких дифференциальных уравнений с постоянным и асимптотически большим запаздыванием [5]:

$$x'(t,\varepsilon) = \varepsilon f\left(t, x(t,\varepsilon), x(t-\tau_1,\varepsilon), x\left(t - \frac{\tau_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right), \tag{11}$$

$$x(s,\varepsilon) = \varphi(s,\varepsilon), \quad -\frac{\tau_2}{\varepsilon} \le s \le 0;$$

г) нечетких дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием [6]:

$$x'(t) = \varepsilon f\big(t, x(t), x(\alpha(t))\big), \quad x(0) = x_0; \tag{12}$$

д) линейных нечетких дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием [22, 23];

е) нечетких дифференциальных уравнений с максимумом [41, 42]:

$$x'(t) = \varepsilon f\left(t, x(t), \max_{\tau\in[\gamma(t),g(t)]} |x(\tau)|\right), \quad x(0) = x_0. \tag{13}$$

1.2. Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с импульсами. В [27] рассмотрено обоснование схем полного и частичного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с импульсами в фиксированные моменты времени

$$x' = \varepsilon f(t, x), \qquad t \neq \tau_i, \quad x(0) = x_0, \tag{14}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = \varepsilon I_i(x), \tag{15}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{E}^n$ — фазовая переменная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, нечеткие отображения $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $I_i\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, начальное значение x_0 принадлежит $\mathbb{E}^n$, моменты импульсов $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ занумерованы в возрастающем порядке.

Системе (14), (15) поставим в соответствие частично усредненную систему

$$y' = \varepsilon \overline{f}(t, y), \qquad t \neq \sigma_j, \quad y(0) = x_0, \tag{16}$$

$$\Delta y|_{t=\sigma_j} = \varepsilon \overline{I}_j(y), \tag{17}$$

в которой нечеткие отображения $\overline{f}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $\overline{I}_j\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ таковы, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int\limits_0^T f(t,x)dt + \sum_{0\le\tau_i<T} I_i(x), \int\limits_0^T \overline{f}(t,x)dt + \sum_{0\le\sigma_j<T} \overline{I}_j(x) \right) = 0, \tag{18}$$

моменты импульсов $\sigma_j \in \mathbb{R}_+$ занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке.

Справедлива следующая теорема, устанавливающая близость решений задач (14), (15) и (16), (17) на конечном промежутке.

Теорема 5 [27]. *Пусть в области* $Q = \big\{(t,x)\colon t \in \mathbb{R}_+, x \in G \subset \mathbb{E}^n\big\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *отображение* $f(t,x)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* x *и существуют функция* $k(t) \ge 0$, *постоянная* $k_0 \ge 0$ *и неубывающая функция* $\psi(u) \ge 0$, $\lim_{u\downarrow 0} \psi(u) = 0$, *такие, что* $D\big(f(t,x_1), f(t,x_2)\big) \le k(t)\psi(D(x_1,x_2))$ *и* $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} k(t)dt \le k_0(t_2 - t_1)$ *на любом конечном промежутке* $[t_1, t_2]$;

2) *отображения* $I_i(x)$ *таковы, что* $D\big(I_i(x_1), I_i(x_2)\big) \le k_0 \psi\big(D(x_1,x_2)\big)$;

3) *отображение* $\overline{f}(t,x)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* x *и удовлетворяет по* x *условию Липшица с ограниченной суммируемой функцией* $\lambda(t) \ge 0$, *т. е.*

$$D\big(\overline{f}(t,x_1), \overline{f}(t,x_2)\big) \le \lambda(t) D(x_1,x_2), \quad \lambda(t) \le \lambda;$$

4) *отображения* $\overline{I}_j(x)$ *удовлетворяют условию Липшица с постоянной* λ:

$$D\big(\overline{I}_j(x_1), \overline{I}_j(x_2)\big) \leq \lambda D(x_1, x_2);$$

5) *отображения* $f(t,x)$, $\overline{f}(t,x)$ *интегрально ограничены, отображения* $I_i(x)$, $\overline{I}_j(x)$ *равномерно ограничены, т. е. существуют суммируемая функция* $M(t) \geq 0$ *и постоянная* $M_0 \geq 0$ *такие, что*

$$|f(t,x)| \leq M(t), \qquad |\overline{f}(t,x)| \leq M(t), \qquad |I_i(x)| \leq M_0, \qquad |\overline{I}_j(x)| \leq M_0$$

и $\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leq M_0(t_2 - t_1)$ *на любом конечном промежутке* $[t_1, t_2]$;

6) *равномерно относительно* x *в области* G *существуют предел* (18) *и постоянная* $0 \leq \leq d < \infty$ *такая, что*

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d, \qquad \frac{1}{T} j(t, t+T) \leq d,$$

где $i(t,t+T)$ *и* $j(t,t+T)$ — *количество точек последовательностей* $\{\tau_i\}$ *и* $\{\sigma_j\}$ *соответственно на промежутке* $[t, t+T]$;

7) *решение* $y(\cdot)$, $y(0) = x_0 \in G' \subset G$ *системы* (16), (17) *при* $t \in \mathbb{R}_+$ *для всех* $\varepsilon \in (0,\theta]$ *принадлежит области* G *вместе с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0,\theta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D\big(x(t), y(t)\big) < \eta, \tag{19}$$

где $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ — *решения систем* (14), (15) *и* (16), (17) *соответственно.*

***Замечание* 5.** Пусть

$$\overline{f}(t,x) \equiv f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t,x)dt + \sum_{0 \leq \tau_i < T} I_i(x) \right), \quad \overline{I}_i(x) \equiv \hat{0}.$$

Тогда соотношение (18) выполнено и теорема 5 обосновывает схему полного усреднения.

1.3. Усреднение нечетких интегральных уравнений. В [70, 73] приведено обоснование метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения с малым параметром

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t f\big(t, s, x(s)\big)\, ds, \tag{20}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x\colon \mathbb{R}_+ \to G, G \subset \mathbb{E}^n$, ε — малый параметр.

Уравнению (20) поставим в соответствие усредненное нечеткое интегральное уравнение

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s))\, ds, \tag{21}$$

где

$$\bar{f}(t,x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t,s,x)\, ds. \tag{22}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (20) и (21) на конечном промежутке.

Теорема 6 [70, 73]. *Пусть в области* $Q = \big\{(t,s,x) : t,s \in \mathbb{R}_+,\ x \in G \subset \mathbb{E}^n\big\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *нечеткое отображение* $f(t,s,x)$ *непрерывно и удовлетворяет по* x *условию Липшица с постоянной* λ;

2) *нечеткое отображение* $\displaystyle\int_0^t f(t,s,x(s))\,ds$ *равномерно непрерывно на* $\mathbb{R}_+$ *равномерно относительно нечеткого непрерывного отображения* $x : \mathbb{R}_+ \to G$;

3) *равномерно относительно* $t, \tau \in \mathbb{R}_+, x \in G$ *существует предел* (22);

4) *решение* $\bar{x}(\cdot)$ *уравнения* (21) *при* $x_0 \in G' \subset G$ *определено при* $t \in \mathbb{R}_+$ *для всех* $\varepsilon \in (0,\sigma]$ *и лежит с некоторой* ρ*-окрестностью в области* G.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0,\sigma]$, *что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *для всех* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D\big(x(t), \bar{x}(t)\big) < \eta,$$

где $x(\cdot)$ *и* $\bar{x}(\cdot)$ *— решения уравнений* (20) *и* (21) *соответственно.*

Данный результат обобщает результаты [16, 17, 57] по обоснованию метода усреднения для нечетких дифференциальных уравнений, так как переходя от нечеткого дифференциального уравнения к эквивалентному ему интегральному уравнению, убеждаемся, что условия 1, 3, 4 теоремы 6 выполнены вследствие соответствующих условий на правые части исходного дифференциального уравнения, а условие 2 выполнено, так как нечеткое отображение $\displaystyle\int_0^t f\big(s, x(s)\big)\,ds$, где $f(s,x)$ — правая часть дифференциального уравнения с производной Хукухары, является липшицевым по времени t.

В [32] рассмотрены нечеткие интегральные уравнения с постоянным запаздыванием и обоснована возможность применения схемы усреднения на конечном промежутке.

В [45, 58] приведено обоснование различных схем метода усреднения для нечетких интегро-дифференциальных уравнений, а в [9, 55, 56] — для нечетких управляемых систем.

2. Нечеткие дифференциальные включения. ***2.1. Усреднение дифференциальных включений с нечеткой правой частью.*** В 1989 г. В. А. Байдосов [1, 2] и J.-P. Aubin [36] ввели понятие дифференциального включения с нечеткой правой частью

$$\dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{23}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}-$ время, $x : I \to \mathbb{R}^n-$ фазовая переменная, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ — производная вектор-функции $x(\cdot)$, $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение.

Определение 6 [39]. α*-Решением включения* (23) *назовем абсолютно непрерывную функцию* $x : I \to \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющую включению*

$$\dot{x}(t) \in \big[F(t, x(t))\big]^{\alpha}, \qquad x(t_0) = x_0$$

почти всюду на I.

Множество всех α*-решений включения* (23) *в момент времени* t *обозначим через* $X_\alpha(t)$. *В случае, когда семейство* $\big\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\big\}$ *определяет нечеткое множество* $X(t)$, $X(t)$ *называется множеством решений включения* (23) *в момент времени* t.

Вопросы существования множества $X(t)$, его свойства рассматривались в работах А. В. Плотникова, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, P. Balasubramaniam, Y. Chalco-Cano, E. Hullermeier, V. Lakshmikantham, O. Lopez-Pouso, K. K. Majumdar, R. N. Mohapatra, J. J. Nieto, J. Y. Park, D. O'Regan, H. Roman-Flores, A. A. Tolstonogov и др. В работах А. В. Плотникова, В. С. Васильковской, И. В. Молчанюк были введены управляемые дифференциальные включения с нечеткой правой частью, которые в дальнейшем рассматривались в работах А. В. Плотникова, Т. А. Комлевой, И. В. Молчанюк, T. Pzezuchowski, J. Wasowski и др.

В [52] доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр:

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x), \qquad x(0) = x_0. \tag{24}$$

Если для любых $t \in \mathbb{R}_+, x \in G$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt, \int\limits_t^{t+T} \bar{F}(t,x)dt \right), \tag{25}$$

то включению (24) поставим в соответствие частично усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(t,y), \qquad y(0) = x_0. \tag{26}$$

Определение 7. *Говорят, что отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ вогнутозначно по x, если*

$$\beta\big[F(t,x)\big]^\alpha + (1-\beta)\big[F(t,y)\big]^\alpha \subset \big[F(t, \beta x + (1-\beta)y)\big]^\alpha$$

для любых $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$.

Теорема 7 [52]**.** *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие отображения $F,\ \bar{F} : Q \to \mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ и вогнутозначны по x*;

2) *равномерно относительно $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in G$ существует предел* (25);

3) *для любых $x_0 \in G' \subset G$ и $t \in \mathbb{R}_+$ α-решения включения* (26) *вместе с ρ-окрестностью принадлежат области G для всех $\alpha \in [0,1]$.*

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D\big(X(t), Y(t)\big) < \eta, \tag{27}$$

где $X(t)$ — множество решений включения (24), *$Y(t)$ — множество решений включения* (26).

***Замечания.* 6.** В случае, когда $\bar{F}(t,x) \equiv \bar{F}(x)$, теорема обосновывает схему полного усреднения.

7. Требование вогнутозначности правых частей исходного включения является достаточно сильным и необходимо для обеспечения выпуклости множеств α-решений исходного и усредненного включений для любого $\alpha \in [0,1]$. Если решение рассматривать в пространстве Σ^n отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям 1, 3 и 4 из определения пространства

$\mathbb{E}^n$, то требование вогнутозначности можно опустить, при этом утверждения теорем останутся в силе.

В статье [8] отдельно рассматривается периодический случай и обосновывается схема полного усреднения.

В [19, 60] доказана возможность применения схем частичного и полного усреднения для дифференциального включения (24), при этом введено понятие R-решения дифференциального включения с нечеткой правой частью и при доказательстве не осуществлялся переход к отдельным α-решениям. В [61] с помощью данного подхода исследован линейный случай.

В [53] идеи метода усреднения распространены на случай, когда предел (25) не существует, но найдутся нечеткие многозначные отображения $F^-,\ F^+ : G \to \mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$ такие, что

$$\lim_{T\to\infty} \beta\left(F^-(x), \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,x)dt\right) = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} \beta\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,x)dt, F^+(x)\right) = 0,$$

где $\beta(F,G) = \sup_{f\in F}\inf_{g\in G} D(f,g)$.

2.2. Усреднение импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью. В [30] приведено обоснование возможности применения метода полного усреднения на конечном промежутке для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр:

$$\begin{gathered} \dot{x} \in \varepsilon F(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \quad x(0) = x_0, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x). \end{gathered} \tag{28}$$

Если для любых $t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G$ существует предел

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(x)\right), \tag{29}$$

то включению (28) поставим в соответствие усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{y} \in \varepsilon\bar{F}(y), \qquad y(0) = x_0. \tag{30}$$

Теорема 8 [30]. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие отображения $F : Q \to \mathbb{E}^n,\ I_i : G \to \mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ и вогнутозначны по x*;

2) *равномерно относительно $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in G$ существует предел* (29) *и*

$$\frac{1}{T}\, i(t,t+T) \le \nu, \qquad \nu < \infty,$$

где $i(t,t+T)$ — количество точек последовательности $\{\tau_i\}$ на промежутке $(t,t+T]$;

3) *для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$ α*-решения включения* (30) *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежат области* G *для всех* $\alpha \in [0,1]$.

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D\big(X(t), Y(t)\big) < \eta, \tag{31}$$

где $X(t)$ *— множество решений включения* (28), $Y(t)$ *— множество решений включения* (30).

***Замечания*. 8.** Если нечеткие отображения $F(t,x)$ и $I_i(x)$ периодичны по t, можно получить более точные оценки [30].

9. Для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью (28) можно применять метод частичного усреднения [31] (как частный случай схемы ступенчатого усреднения [71]), а также в случае отсутствия среднего получать внешнюю и внутреннюю аппроксимации множества решений [72].

2.3. Усреднение нечетких дифференциальных включений. Введем в рассмотрение пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ $\big(\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)\big)$, состоящее из всех подмножеств F пространства $\mathbb{E}^n$ таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ множество, составленное из α-срезок элементов множества F, является непустым (и выпуклым) компактом в пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ (т. е. элементом пространства $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)\big(\mathrm{cocc}(\mathbb{R}^n)\big)$ [21]).

Определение 8. *Метрикой, или расстоянием, между двумя множествами* $F, G \in \mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ *назовем величину*

$$d(F,G) = \max\Big\{\max_{f\in F}\min_{g\in G} D(f,g), \max_{g\in G}\min_{f\in F} D(f,g)\Big\}.$$

В работах [26, 29, 50] введено понятие нечеткого дифференциального включения

$$x' \in F(t,x), \qquad x(0) = x_0,$$

рассмотрены различные понятия решения (классическое, обычное, обобщенное и квазирешение) и изучена связь между множествами таких решений, доказаны теоремы существования и непрерывной зависимости. Данный вид дифференциальных включений обобщает нечеткие дифференциальные уравнения (в случае, когда $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$) и дифференциальные включения с нечеткой правой частью (если $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$).

Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение с малым параметром

$$x' \in \varepsilon F(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{32}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x \in G \in \mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)$ — фазовая переменная, x' — производная нечеткого отображения $x(\cdot)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $F: \mathbb{R}_+ \times G \to \mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$ — нечеткое многозначное отображение.

Определение 9 [50]. *Абсолютно непрерывное отображение* $x: I \to \mathbb{E}^n$ *называется* (*обычным*) *решением дифференциального включения* (32), *если* $x'(t)$ *принадлежит* $\varepsilon F(t, x(t))$ *почти всюду на* I.

Включению (32) поставим в соответствие усредненное нечеткое дифференциальное включение

$$\xi' \in \varepsilon \bar{F}(\xi), \qquad \xi(0) = x_0, \tag{33}$$

где

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t,x)dt. \tag{34}$$

Теорема 9 [64]. *Пусть в области* $Q = \big\{t \in \mathbb{R}_+, x \in G \in \mathrm{comp}(\mathbb{E}^n)\big\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *нечеткое многозначное отображение* $F(t,x)$ *непрерывно, равномерно ограничено постоянной* M, *удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* λ, *т. е.*

$$\big|F(t,x)\big| = d\big(F(t,x),\{\hat{0}\}\big) \le M, \qquad d\big(F(t,x),F(t,y)\big) \le \lambda D(x,y);$$

2) *равномерно относительно* x *в области* G *существует предел* (34);

3) *для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$ *решения включения* (33) *принадлежат области* G *вместе с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого решения* $\xi(\cdot)$ *включения* (33) *существует решение* $x(\cdot)$ *включения* (32) *такое, что*

$$D\big(x(t),\xi(t)\big) < \eta; \tag{35}$$

2) *для любого решения* $x(\cdot)$ *включения* (32) *существует решение* $\xi(\cdot)$ *включения* (33) *такое, что справедлива оценка* (35).

В случае, когда нарушается равномерная сходимость в (34), справедлива следующая теорема.

Теорема 10 [64]. *Пусть в области* Q, *где* G *замкнуто, выполнены следующие условия*:

1) *нечеткое многозначное отображение* $F(t,x)$ *непрерывно, локально удовлетворяет условию Липшица по* x;

2) *в каждой точке* $x \in G$ *существует предел* (34);

3) *для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$ *решения включения* (33) *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежат области* G.

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L, x_0) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 9.

***Замечание* 10.** Если нечеткое многозначное отображение $F(t,x)$ периодично по t, можно получить более точную оценку.

В [67] показано, что для нечетких дифференциальных уравнений с малым параметром можно проводить не полное, а частичное усреднение. В работах [64, 67] отдельно рассмотрен случай, когда правая часть периодична по времени t. В [69] изучен случай, когда предел (34) не существует.

2.4. Усреднение нечетких импульсных дифференциальных включений. В [65] приведено обоснование схемы полного усреднения на конечном промежутке для нечеткого импульсного дифференциального включения

$$\begin{gathered} x' \in \varepsilon F(t,x), \qquad t \ne \tau_i, \quad x(0) = x_0, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x). \end{gathered} \tag{36}$$

Если для любых $t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G$ существует предел

$$\bar{F}(x)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T}F(t,x)dt+\frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T}I_i(x)\right), \tag{37}$$

то включению (36) поставим в соответствие усредненное включение

$$y'\in\varepsilon\bar{F}(y),\qquad y(0)=x_0. \tag{38}$$

Теорема 11 [65]. *Пусть в области* $Q=\{t\in\mathbb{R}_+,\ x\in G\subset\mathbb{E}^n\}$ *выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие многозначные отображения* $F\colon Q\to\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$, $I_i\colon G\to\mathrm{conv}(\mathbb{E}^n)$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* λ;

2) *равномерно относительно* $t\in\mathbb{R}_+$ *и* $x\in G$ *существует предел* (37) *и*

$$\frac{1}{T}\,i(t,t+T)\le\nu,\qquad \nu<\infty,$$

где $i(t,t+T)$ — *количество точек последовательности* $\{\tau_i\}$ *на промежутке* $(t,t+T]$;

3) *для любых* $x_0\in G'\subset G$ *и* $t\in\mathbb{R}_+$ *решения включения* (38) *вместе с некоторой* ρ-*окрестностью принадлежат области* G.

Тогда для любых $\eta\in(0,\rho]$ *и* $L>0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta,L)>0$ *такое, что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ *и* $t\in\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого решения* $y(\cdot)$ *включения* (38) *существует решение* $x(\cdot)$ *включения* (36) *такое, что*

$$D\big(x(t),y(t)\big)<\eta; \tag{39}$$

2) *для любого решения* $x(\cdot)$ *включения* (36) *существует решение* $y(\cdot)$ *включения* (38) *такое, что справедлива оценка* (39).

***Замечания*. 11.** Если нечеткие многозначные отображения $F(t,x)$ и $I_i(x)$ периодичны по t, можно получить более точную оценку [65].

12. В [68] рассмотрен вариант схемы частичного усреднения для включения (36).

В [18, 54, 59] идеи метода усреднения распространены на нечеткие интегро-дифференциальные включения, а также управляемые нечеткие интегро-дифференциальные включения.

3. Заключение. В данном обзоре приведены результаты по обоснованию метода усреднения для некоторых классов нечетких систем: нечетких дифференциальных уравнений, нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием, нечетких дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, нечетких интегральных уравнений, нечетких дифференциальных включений и дифференциальных включений с нечеткой правой частью при отсутствии и наличии импульсного воздействия.

Литература

1. *Байдосов В. А.* Дифференциальные включения с нечеткой правой частью // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 4. – С. 781 – 783.
2. *Байдосов В. А.* Нечеткие дифференциальные включения // Прикл. математика и механика. – 1990. – **54**, вып. 1. – С. 12 – 17.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

4. *Гребенников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
5. *Кічмаренко О. Д., Скрипник Н. В.* Нечіткі диференціальні рівняння із запізненням // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика, механика. – 2008. – Вип. 19. – С. 18 – 23.
6. *Кичмаренко О. Д., Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 3. – С. 316 – 328.
7. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2007. – Вып. 1 (27). – С. 185 – 190.
8. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И.* Усреднение дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2009. – Вып. 1(33) – 2(34). – С. 192 – 196.
9. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И., Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких управляемых систем // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 325 – 332.
10. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 3(65). – С. 147 – 152.
11. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
12. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
13. *Митропольский Ю. А., Хома Г. Л.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 216 с.
14. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
15. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
16. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.
17. *Плотников А. В., Комлева Т. А.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений на конечном промежутке // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 516 – 527.
18. *Плотников А. В.* Усреднение нечетких управляемых дифференциальных включений с терминальным критерием качества // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 105 – 110.
19. *Плотников А. В.* Схема полного усреднения для нечетких дифференциальных включений на конечном промежутке // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 366 – 374.
20. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 187 с.
21. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
22. *Плотникова Л. И., Скрипник Н. В.* Усреднение линейных нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2008. – Вып. 1 (29). – С. 224 – 230.
23. *Полетаева О. В., Скрипник Н. В.* Усереднення лінійних нечітких диференціальних рівнянь із запізненням // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механіка. – 2012. – **17**, вип. 3 (5). – С. 27 – 37.
24. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
25. *Сасонкина М. С., Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механіка. – 2010. – **15**, вип. 19. – С. 109 – 118.
26. *Скрипник Н. В.* Существование классических решений нечетких дифференциальных включений // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**. – С. 244 – 257.
27. *Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с импульсами // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 530 – 540.
28. *Скрипник Н. В.* Теорема Красносельского – Крейна для нечетких дифференциальных уравнений // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механіка. – 2009. – **14**, вип. 20. – С. 115 – 122.
29. *Скрипник Н. В.* Квазирешения нечетких дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 528 – 535.
30. *Скрипник Н. В.* Усреднение импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 11. – С. 1563 – 1577.
31. *Скрипник Н. В.* Схема частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью // Мат. студ. – 2015. – **43**, №2. – С. 129 – 139.

32. *Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких интегральных уравнений с постоянным запаздыванием // Дослідження в математиці і механіці. – 2016. – **21**, вип. 2(28). – С. 55 – 63.
33. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
34. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
35. *Allaoui A., Melliani S., Allaoui Y., Chadli L.S.* Averaging of intuitionistic fuzzy differential equations // Notes Intuit. Fuzzy Sets. – 2017. – **23**, № 2. – P. 44 – 54.
36. *Aubin J.-P.* Fuzzy differential inclusions // Probl. Control Inform. Theory. – 1990. – **19**, № 1. – P. 55 – 67.
37. *Chakraverty S., Tapaswini S., Behera D.* Fuzzy differential equations and applications for engineers and scientists. – CRC Press, 2017. – 224 p.
38. *Gama R., Smirnov G.* Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued and Var. Anal. – 2014. – **22**, № 2. – P. 349 – 374.
39. *Hullermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system // Internat. J. Uncertain., Fuzziness and Knouledge-Based Systems. – 1997. – № 7. – P. 117 – 137.
40. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
41. *Kichmarenko O. D., Skripnik N. V.* One scheme of averaging of fuzzy differential equations with maxima // J. Adv. Res. Appl. Math. – 2011. – **3**, № 1. – P. 94 – 103.
42. *Kichmarenko O. D., Skripnik N. V.* The partial averaging of fuzzy differential equations with maxima // Adv. Dyn. Syst. and Appl. – 2011. – **6**, № 2. – P. 199 – 207.
43. *Klimchuk S., Plotnikov A., Skripnik N.* Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions // Physica D. – 2012. – **241**, № 22. – P. 1932 – 1947.
44. *Komleva T. A.* The full averaging of linear fuzzy differential equations with 2π-periodic right-hand side // J. Adv. Res. Dyn. Control Systems. – 2011. – **3**, № 1. – P. 12 – 25.
45. *Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.* The averaging of fuzzy integrodifferential equations on a finite interval // J. Adv. Res. Appl. Math. – 2014. – **6**, № 3. – P. 47 – 59.
46. *Lakrib M., Guen R., Bourada A.* Averaging for fuzzy differential equations // Surv. Math. and Appl. – 2014. – № 9. – P. 93 – 104.
47. *Lakrib M., Guen R., Bourada A.* An averaging result for fuzzy differential equations with a small parameter // Ann. Rev. Chaos Theory, Bifurcations and Dyn. Systems. – 2015. – **5**. – P. 1 – 9.
48. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis Publ., 2003. – 178 p.
49. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // De Gruyter Stud. Math. – 2011. – **40**. – 307 p.
50. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* The generalized solutions of the fuzzy differential inclusions // Int. J. Pure and Appl. Math. – 2009. – **56**, № 2. – P. 165 – 172.
51. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The full averaging of linear fuzzy differential equations // J. Adv. Res. Different. Equat. – 2010. – **2**, № 3. – P. 21 – 34.
52. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side // J. Adv. Res. Dyn. Control Systems. – 2010. – **2**, № 2. – P. 26 – 34.
53. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent // Iran. J. Optim. – 2010. – **2**, № 3. – P. 506 – 517.
54. *Plotnikov A. V.* Averaging of fuzzy integrodifferential inclusions // Int. J. Control Sci. Eng. – 2011. – **1**, №. 1. – P. 8 – 14.
55. *Plotnikov A. V.* The averaging of control linear fuzzy differential equations // J. Adv. Res. Appl. Math. – 2011. – **3**, № 3. – P. 1 – 20.
56. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The averaging of control linear fuzzy 2 π-periodic differential equations // DCDIS. Ser. B. Appl. and Algorithms. – 2011. – **18**, № 6. – P. 833 – 847.
57. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Averaging of the fuzzy differential equations // J. Uncertain Systems. – 2012. – **6**, № 1. – P. 30 – 37.
58. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The full averaging of fuzzy integrodifferential equations // J. Adv. Res. Dyn. Control Systems. – 2012. – **4**, № 1. – P. 48 – 59.

59. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Full averaging of control fuzzy integrodifferential inclusions with terminal criterion of quality // Int. J. Control Sci. Eng. – 2013. – **3**, № 2. – P. 68 – 72.
60. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The partial averaging of fuzzy differential inclusions on finite interval // Int. J. Different. Equat. – 2014. – **2014**. – Article ID 307941. – 5 p.
61. *Plotnikov A. V.* The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval // DCDIS. Ser. B. Appl. and Algorithms. – 2016. – **23**, №1. – P. 1 – 9.
62. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1983. – **91**. – P. 552 – 558.
63. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
64. *Skripnik N. V.* The full averaging of fuzzy differential inclusions // Iran. J. Optim. – 2009. – **1**, № 3. – C. 302 – 317.
65. *Skripnik N. V.* The full averaging of fuzzy impulsive differential inclusions // Surv. Math. and Appl. – 2010. – **5**. – P. 247 – 263.
66. *Skripnik N. V.* Linear fuzzy differential equations // J. Uncertain Systems. – 2011. – **5**, № 4. – P. 305 – 313.
67. *Skripnik N. V.* The partial averaging of fuzzy differential inclusions // J. Adv. Res. Different. Equat. – 2011. – **3**, № 1. – P. 52 – 66.
68. *Skripnik N. V.* The partial averaging of fuzzy impulsive differential inclusions // Different. and Integral Equat. – 2011. – **24**, № 7-8. – P. 743 – 758.
69. *Skripnik N. V.* Averaging of fuzzy differential inclusions when the average of the right-hand side is absent // DCDIS. Ser. A. Math. Anal. – 2012. – **19**, № 2. – P. 187 – 198.
70. *Skripnik N. V.* Averaging of fuzzy integral equations // Appl. Math. and Phys. – 2013. – **1**, № 3. – P. 39 – 44.
71. *Skripnik N.* Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side // Contemp. Methods Math. Phys. and Gravitation. – 2015. – **1**, № 1. – P. 9 – 26.
72. *Skripnik N.* Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent // Asian-Eur. J. Math. – **8**, № 4. – 2015. – P.1550086-1 – 1550086-12.
73. *Skripnik N.* Averaging of fuzzy integral equations // Discrete and Contin. Dyn. Systems. Ser. B. – 2017. – **22**, № 5. – P.1999 – 2010.
74. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.

Получено 08.09.17