УДК 517.9

Д. С. Джумабаев (Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан,
Междунар. ун-т информ. технологий, Алматы),
С. М. Темешева (Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан,
Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби, Алматы)

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

A nonlinear two-point boundary-value problem for an ordinary differential equation is studied by the method of parametrization. We construct systems of nonlinear algebraic equations that enable us to find the initial approximation to the solution to the posed problem. In terms of the properties of constructed systems,we establish necessary and sufficient conditions for the existence of an isolated solution to the boundary-value problem under consideration.

Методом параметризації досліджується нелінійна двоточкова крайова задача для звичайного диференціального рівняння. Побудовано системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, що дають змогу знайти початкове наближення розв'язку розглядуваної задачі. В термінах властивостей побудованих систем знайдено необхідні та достатні умови існування ізольованого розв'язку досліджуваної крайової задачі.

1. Введение. Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$g\big(x(0), x(T)\big) = 0, \tag{1.2}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывные функции, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Через $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Решением задачи (1.1), (1.2) является непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $x^*(t) \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.1) и краевому условию (1.2).

Вопросы разрешимости краевой задачи (1.1), (1.2) и нахождения ее решения различными методами исследованы в работах многих авторов [1 – 14]. Одним из эффективных методов исследования и решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является численно-аналитический метод, предложенный А. М. Самойленко [15, 16]. Дальнейшее развитие этого метода и подробный анализ основных групп методов исследования и решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений приведен в [17].

Для нелинейных задач характерно существование нескольких решений. В связи с этим важное значение для приложений имеет изолированность решений нелинейных задач. Как показано в [13, с. 4], изолированное решение, рассматриваемое как изолированный элемент множества решений краевых задач, не имеет свойства непрерывной зависимости от правой части дифференциального уравнения и краевых условий. Поэтому во многих работах рассматривается изолированное в более сильном смысле решение краевой задачи (1.1), (1.2).

Следующее определение „изолированного” решения краевых задач с непрерывно дифференцируемыми данными является модификацией определения изолированности из [14].

Определение 1.1. *Решение* $x^*(t)$ *задачи* (1.1), (1.2) *называется „изолированным", если существует число* $\rho_0 > 0$ *такое, что функции* $f(t,x)$ *и* $g(v,w)$ *соответственно в* $G_1^*(\rho_0) = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$ *и* $G_2^*(\rho_0,\rho_0) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{2n} : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$ *непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные* $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ *и линеаризованная однородная двухточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \quad t \in (0,T), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

$$g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) = 0 \tag{1.4}$$

имеет только тривиальное решение.

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий существования изолированного в смысле определения 1.1 решения задачи (1.1), (1.2). Для этого используется метод параметризации [18, 19].

2. Схема метода параметризации и достаточные условия существования изолированного решения. Выберем $h > 0 : Nh = T,\ N \in \mathbb{N}$, и разобьем интервал $[0,T)$ точками $t_r = rh$, $r = \overline{0,N}$, т. е. $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N}[t_{r-1}, t_r)$.

Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1}, t_r)$ обозначим через $x_r(t) : x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$. Через $C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\big)$, где $x_r : [t_{r-1}, t_r) \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет конечный левосторонний предел $\lim_{t\to t_r-0} x_r(t)$ при всех $r = \overline{1,N}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|$. Пространство $C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN})$ является полным.

Введем дополнительный параметр $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ и на интервале $[t_{r-1}, t_r)$ выполним замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,N}$. Через λ_{N+1} обозначим $x(t_N)$. Получим многоточечную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \tag{2.1}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{2.2}$$

$$g\big(\lambda_1, \lambda_{N+1}\big) = 0, \tag{2.3}$$

$$\lambda_r + \lim_{t\to t_r-0} u_r(t) - \lambda_{r+1} = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{2.4}$$

где (2.4) — условия склеивания решения в точках разбиения отрезка $[0,T]$.

Решением задачи (2.1) – (2.4) является пара $\big(\lambda^*, u^*[t]\big)$ с элементами

$$\lambda^* = \big(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*, \lambda_{N+1}^*\big) \in \mathbb{R}^{n(N+1)},$$

$$u^*[t] = \big(u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t)\big) \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}),$$

где непрерывно дифференцируемая на $[t_{r-1}, t_r)$ функция $u_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) при $\lambda_r = \lambda_r^*$ и начальному условию (2.2) для всех $r = \overline{1,N}$ а также выполняются дополнительные условия (2.3), (2.4).

Если $\big(\lambda^*, u^*[t]\big)$ — решение задачи (2.1) – (2.4), то функция

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda_r^* + u_r^*(t) & \text{при} \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \\ \lambda_{N+1}^* & \text{при} \quad t = T \end{cases}$$

будет решением задачи (1.1), (1.2). Наоборот, если $\widetilde{x}(t)$ — решение задачи (1.1), (1.2), то пара $\big(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t]\big)$ с элементами $\widetilde{\lambda} = \big(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N, \widetilde{\lambda}_{N+1}\big) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\widetilde{u}[t] = \big(\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_N(t)\big)$, где $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{x}(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N+1}$, $\widetilde{u}_r(t) = \widetilde{x}(t) - \widetilde{x}(t_{r-1})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (2.1)–(2.4).

При фиксированном значении λ_r задача Коши (2.1), (2.2) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \tag{2.5}$$

Подставив вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть (2.5) и повторив этот процесс ν раз, для $u_r(t)$ получим представление

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f\left(\tau_1, \lambda_r + \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} f\left(\tau_2, \lambda_r + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f\big(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu)\big) d\tau_\nu \ldots\right) d\tau_2\right) d\tau_1, \tag{2.6}$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Из (2.6), определив $\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и подставив их в (2.3), (2.4), предварительно умножив (2.3) на $h > 0$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$:

$$hg\Big(\lambda_1, \lambda_{N+1}\Big) = 0,$$

$$\lambda_r + \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} f\left(\tau_1, \lambda_r + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f\big(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu)\big) d\tau_\nu \ldots\right) d\tau_1 - \lambda_{r+1} = 0, \quad r = \overline{1, N},$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \lambda_{N+1}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}.$$

Условие А. *Существуют числа $h > 0 : Nh = T$, $N \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$ такие, что система нелинейных уравнений $Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0$ имеет решение $\lambda^{(0)} = \big(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}, \lambda_{N+1}^{(0)}\big) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, задача Коши*

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(0)}), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

имеет решение $u_r^{(0)}(t)$ при всех $r = \overline{1, N}$ и система функций $u^{(0)}[t] = \big(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)\big)$ принадлежит пространству $C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN})$.

По паре $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ определим кусочно-непрерывную на $[0, T]$ функцию

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t) & \text{при} \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)} & \text{при} \quad t = T. \end{cases}$$

Возьмем числа $\rho_\lambda > 0,\ \rho_u > 0,\ \rho_x > 0$ и определим множества

$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N+1}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \colon \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=\overline{1,N+1}} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < < \rho_\lambda\}$,

$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \{u[t] \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}) \colon \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_1 < \rho_u\}$,

$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \{x(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n) \colon \|x - x^{(0)}\|_0 < \rho_x\}$,

$G_1^0(\rho_x) = \{(t, x) \colon t \in [0,T],\ \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho_x\}$,

$G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{2n} \colon \|v - x^{(0)}(0)\| < \rho_\lambda,\ \|w - x^{(0)}(T)\| < \rho_x\}$.

Условие B. *Функции $f(t,x),\ g(v,w)$ соответственно в $G_1^0(\rho_x),\ G_2^0(\rho_\lambda, \rho_\lambda)$ непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x),\ g'_v(v,w),\ g'_w(v,w)$ и выполняются неравенства*

$$\|f'_x(t,x)\| \le L(t), \qquad \|g'_v(v,w)\| \le L_1, \qquad \|g'_w(v,w)\| \le L_2,$$

где $L(t) \in C([0,T], \mathbb{R}),\ L_1,\ L_2$ — постоянные.

Предполагая, что имеет место условие A, решение многоточечной краевой задачи с параметрами (2.1) – (2.4) находим по следующему алгоритму.

***Шаг* 1.** Решая уравнение $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$, получаем $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)}, \lambda_{N+1}^{(1)}) \in \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$. Решая задачу Коши (2.1), (2.2) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)},\ r = \overline{1,N}$, находим компоненты системы функций $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \ldots, u_N^{(1)}(t))$.

***Шаг* 2.** Решая уравнение $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$, получаем $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_N^{(2)}, \lambda_{N+1}^{(2)}) \in \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$. Решая задачу Коши (2.1), (2.2) при $\lambda_r = \lambda_r^{(2)},\ r = \overline{1,N}$, находим компоненты системы функций $u^{(2)}[t] = (u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t), \ldots, u_N^{(2)}(t))$. И так далее.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть при некоторых числах $h > 0 \colon Nh = T,\ N \in \mathbb{N},\ \nu \in \mathbb{N},\ \rho_\lambda > 0,\ \rho_u > 0,\ \rho_x > 0$ выполняются условия* A, B, *матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \colon \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ *обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и имеют место неравенства*

$$\left\| \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(h),$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max_{r=\overline{1,N}} \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt \right) - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!} \left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt \right)^j \right) < 1,$$

$$\frac{\gamma_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_\lambda,$$

$$\frac{\gamma_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \max_{r=\overline{1,N}} \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt \right) - 1 \right) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_u,$$

$$\rho_\lambda + \rho_u \le \rho_x.$$

Тогда определяемая по алгоритму последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k \in \mathbb{N}$, *принадлежит* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, *сходится к* $(\lambda^*, u^*[t])$ — *изолированному решению задачи* (2.1) – (2.4) *в* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ *и справедливы оценки*

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \le \frac{(q_\nu(h))^k}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$$

$$\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \le \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\lambda_r^* - \lambda_r^{(k)}\|, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству теоремы 2 из [19].

В силу эквивалентности двухточечной краевой задачи (1.1), (1.2) и многоточечной краевой задачи с параметрами (2.1) – (2.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда нелинейная двухточечная краевая задача* (1.1), (1.2) *в* $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ *имеет изолированное решение.*

3. Необходимые и достаточные условия существования „изолированного” решения. На отрезке $[0, T]$ рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B и C — $(n \times n)$-матрицы.

Вновь с шагом $h > 0 : Nh = T$, $N \in \mathbb{N}$, разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_r = rh$, $r = \overline{0, N}$. По данным задачи (3.1), (3.2) составим $(n(N+1) \times n(N+1))$-матрицу

$$Q_\nu(h) = \begin{pmatrix} hB & 0 & \ldots & 0 & 0 & hC \\ I + D_{\nu,1}(h) & -I & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I + D_{\nu,N-1}(h) & -I & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I + D_{\nu,N}(h) & -I \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(h) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) d\tau_1 + \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1, N}.$$

Аналогично теоремам 1 и 4 из [18] устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть существуют числа* $h > 0 \colon Nh = T,\ N \in \mathbb{N}$, *и* $\nu \in \mathbb{N}$, *при которых матрица* $Q_\nu(h) \colon \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ *обратима и выполняются неравенства*

$$\|(Q_\nu(h))^{-1}\| \leq \gamma_\nu(h),$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max_{r=\overline{1,N}} \left(e^{\alpha h} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^i}{i!} \right) < 1,$$

где $\alpha = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$. *Тогда краевая задача* (3.1), (3.2) *однозначно разрешима.*

Теорема 3.2. *Краевая задача* (3.1), (3.2) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *существует* $h_0 = h_0(\nu) > 0$ *такое, что при всех* $h \in (0, h_0] \colon Nh = T$ *матрица* $Q_\nu(h) \colon \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ *обратима и выполняется оценка*

$$\|(Q_\nu(h))^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{h}, \tag{3.3}$$

где γ — *постоянная, не зависящая от* h.

Теорема 3.3. *При выполнении условий теоремы* 2.1 *задача* (1.1), (1.2) *в* $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ *имеет „изолированное" решение.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует существование изолированного решения $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), \rho_x)$. Покажем, что это решение является изолированным в смысле определения. Рассмотрим линейную однородную краевую задачу (1.3), (1.4). По матрицам $A^*(t) = f'_x(t, x^*(t)),\ B^* = g'_v(x^*(0), x^*(T)),\ C^* = g'_w(x^*(0), x^*(T))$, шагу $h > 0 \colon Nh = T,\ N \in \mathbb{N}$, и числу $\nu \in \mathbb{N}$ составим $(n(N+1) \times n(N+1))$-матрицу специальной структуры

$$Q^*_\nu(h) = \begin{pmatrix} hB^* & 0 & \ldots & 0 & 0 & hC^* \\ I + D^*_{\nu,1}(h) & -I & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I + D^*_{\nu,N-1}(h) & -I & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I + D^*_{\nu,N}(h) & -I \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D^*_{\nu,r}(h) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} A^*(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A^*(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A^*(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A^*(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A^*(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1,N}.$$

Обозначив через λ^*_r значение функции $x^*(t)$ при $t = t_{r-1},\ r = \overline{1, N+1}$, и на интервалах $[t_{r-1}, t_r)$ введя функции $u^*_r(t) = x^*(t) - \lambda^*_r,\ r = \overline{1,N}$, нетрудно установить, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ совпадает с $Q^*_\nu(h)$. Тогда из условий теоремы 2.1 следует, что матрица $Q^*_\nu(h)$ обратима и выполняются неравенства

$$\|A^*(t)\| = \|f'_x(t, x^*(t))\| \le L(t), \qquad \|C^*\| = \|g'_w(x^*(0), x^*(T))\| \le L_2,$$

$$\|(Q^*_\nu(h))^{-1}\| \le \gamma_\nu(h),$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max_{r=\overline{1,N}} \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt \right) - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt \right)^i \right) < 1.$$

При этих условиях существование только тривиального решения однородной задачи (1.3), (1.4) следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.3 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 2.1 являются и необходимыми для существования „изолированного” решения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), (1.2).

Теорема 3.4. *Краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет „изолированное” решение тогда и только тогда, когда для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *существуют числа* $h > 0\colon Nh = T,\ \rho_\lambda > 0,\ \rho_u > 0,\ \rho_x > 0,$ *при которых выполняются условия* A, B, *матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}\colon \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ *обратима для всех* $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ *и имеют место неравенства теоремы* 2.1.

Необходимость. Предположим, что задача (1.1), (1.2) имеет „изолированное” решение $x^*(t)$. Тогда из определения 1.1 следует, что существуют числа $\rho_0 > 0,\ M > 0,\ L_0 > 0$ и $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такие, что неравенства $\|f(t,x)\| \le M$, $\|f'_x(t,x)\| \le L_0$ и $\|g'_v(v,w)\| \le L_1$, $\|g'_w(v,w)\| \le$ $\le L_2$ выполняются для всех $(t,x) \in G^*_1(\rho_0)$ и $(v,w) \in G^*_2(\rho_0, \rho_0)$ соответственно. При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon \in (0, \rho_0] > 0$ такое, что для всех $(t, x'),\ (t, x'') \in G^*_1(\rho_0)\colon$ $\|x' - x''\| < \dfrac{\delta_\varepsilon}{b_\nu}$ и $(v', w'),\ (v'', w'') \in G^*_2(\rho_0, \rho_0)\colon \|v' - v''\| < \delta_\varepsilon, \|w' - w''\| < \delta_\varepsilon$ имеют место неравенства

$$\|f'_x(t, x') - f'_x(t, x'')\| < \frac{\varepsilon}{a_\nu},$$

$$\|g'_v(v', w') - g'_v(v'', w'')\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|g'_w(v', w') - g'_w(v'', w'')\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $a_\nu = \sum_{p=1}^{\nu} \dfrac{p(L_0 T)^{p-1}}{(p-1)!}$, $b_\nu = \sum_{p=0}^{\nu-1} \dfrac{(L_0 T)^p}{p!}$.

Поскольку линеаризованная однородная краевая задача (1.3), (1.4) имеет только тривиальное решение, то по теореме 3.2 для любого заданного $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0]\colon Nh = T$ матрица $Q^*_\nu(h)\colon \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ обратима и выполняется оценка (3.3) с постоянной γ, не зависящей от h.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon\gamma \le \dfrac{1}{4}$. Покажем существование чисел $h \in (0, h_0]\colon Nh = T$, $\rho_\lambda > 0,\ \rho_u > 0$ и $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия теоремы.

В силу выбора $\delta_\varepsilon > 0$ и структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right\| \le \varepsilon h$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$, где $\rho_\lambda^* = \dfrac{\delta_\varepsilon}{2b_\nu}$, $\rho_u^* = \dfrac{\delta_\varepsilon}{2b_\nu}$.

Применяя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [20, с. 142], получаем, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ ограниченно обратима и $\left\| \left(\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \dfrac{4\gamma}{3h}$ для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$.

Выберем число $h_1 \in (0, h_0] : N_0 h_1 = T,\ N_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющим неравенствам

$$Mh_1 \leq \frac{\rho_u^*}{2}, \tag{3.4}$$

$$\frac{4\gamma}{3} M \frac{(h_1 L_0)^\nu}{\nu!} < \frac{\rho_\lambda^*}{2}, \tag{3.5}$$

$$\frac{4\gamma}{3} M \frac{(h_1 L_0)^\nu}{\nu!} \left(e^{h_1 L_0} - 1 \right) < \frac{\rho_u^*}{2}. \tag{3.6}$$

Поскольку $x^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1), то справедлива оценка

$$\|u_r^*(t)\| = \|x^*(t) - x^*(t_{r-1})\| \leq \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|\dot{x}^*(t)\| h_1 \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, x^*(t))\| h_1 \leq M h_1, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N_0}. \tag{3.7}$$

Покажем, что $S(0, \rho_u^*/2) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$. Действительно, если $u[t] \in S(0, \rho_u^*/2)$, то в силу (3.4), (3.7)

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_1 \leq \|u[\cdot]\|_1 + \|u^*[\cdot]\|_1 < \frac{\rho_u^*}{2} + \frac{\rho_u^*}{2} = \rho_u^*,$$

т. е. $u[t] \in S(u^*[t], \rho_u^*)$.

При $h \in (0, h_1] : N_1 h = T,\ N_1 \in \mathbb{N}$, рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n(N_1+1)}. \tag{3.8}$$

Матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda}$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, оценка $\left\| \left(\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq$ $\leq \dfrac{4\gamma}{3h}$ справедлива для всех $\lambda \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$. Здесь $h > 0 : N_1 h = T$. В силу (3.5), (3.7) и равенства $Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*) = 0$ имеем

$$\frac{4\gamma}{3h} \|Q_{\nu,h}(\lambda^*, 0)\| = \frac{4\gamma}{3h} \|Q_{\nu,h}(\lambda^*, 0) - Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)\| \leq \frac{4\gamma}{3h} \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} Mh < \frac{\rho_\lambda^*}{2}.$$

Поэтому согласно теореме 1 из [19, с. 39] система уравнений (3.8) имеет решение $\lambda^{(0)} \in$ $\in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ и

$$\|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| \leq \frac{4\gamma}{3h} \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} Mh < \frac{\rho_\lambda^*}{2}. \tag{3.9}$$

При сделанных предположениях задача Коши (2.1), (2.2) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ имеет единственное решение $u_r^{(0)}(t)$ и для него выполняется неравенство

$$\|u_r^{(0)}(t) - u_r^*(t)\| \le \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_0\big(\|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\| + \|u_r^{(0)}(\tau) - u_r^*(\tau)\|\big)d\tau.$$

Используя лемму Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\big\|u_r^{(0)}(t) - u_r^*(t)\big\| \le (\exp(L_0(t - t_{r-1})) - 1)\|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

откуда следует, что

$$\big\|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\big\|_1 \le \frac{4\gamma}{3} M \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}(e^{hL_0} - 1) < \frac{\rho_u^*}{2}. \tag{3.10}$$

Таким образом, имеет место условие A и оценки (3.9), (3.10).

Теперь возьмем

$$\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2, \qquad \rho_u = \rho_u^*/2, \qquad \rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$$

и выберем число $h_2 \in (0, h_1] : N_2 h_2 = T,\ N_2 \in \mathbb{N}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{4\gamma}{3h_2}\left(e^{h_2 L_0} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(h_2 L_0)^i}{i!}\right) \le \frac{1}{3}, \tag{3.11}$$

$$2\gamma M \frac{(h_2 L_0)^\nu}{\nu!}\left(\frac{4\gamma}{3h_2}\frac{(h_2 L_0)^\nu}{\nu!}(e^{h_2 L_0} - 1) + 1\right) < \rho_\lambda, \tag{3.12}$$

$$2\gamma M \frac{(h_2 L_0)^\nu}{\nu!}\left(\frac{4\gamma}{3h_2}\frac{(h_2 L_0)^\nu}{\nu!}(e^{h_2 L_0} - 1) + 1\right)(e^{h_2 L_0} - 1) < \rho_u. \tag{3.13}$$

Если $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, то на основании (3.5), (3.6), (3.9), (3.10) получим

$$\|\lambda - \lambda^*\| \le \|\lambda - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| \le \rho_\lambda + \frac{4\gamma}{3h}\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} Mh < \rho_\lambda^*,$$

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_1 \le \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_1 + \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_1 \le \rho_u + \frac{4\gamma}{3} M \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}(e^{hL_0} - 1) < \rho_u^*,$$

т. е. $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \subset S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, $S(u^{(0)}[t], \rho_u) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$ при всех $h \in (0, h_2]$. Поэтому в $G_1^*(\rho_0)$, $G_2^*(\rho_0, \rho_0)$ выполняется условие B.

Первое неравенство теоремы 2.1 выполняется с постоянной $\gamma_\nu(h) \le \dfrac{4\gamma}{3h}$. Тогда

$$q_\nu(h) = \frac{4\gamma}{3h}\left(e^{hL_0} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(hL_0)^i}{i!}\right),$$

и в силу (3.11) $q_\nu(h) \le \dfrac{1}{3}$ при $h \in (0, h_2]$.

Принимая во внимание оценки

$$\big\|u^{(0)}[\cdot]\big\|_1 \le \big\|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\big\|_1 + \big\|u^*[\cdot]\big\|_1 \le Mh\left(\frac{4\gamma}{3h}\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}(e^{hL_0} - 1) + 1\right),$$

$$\left\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\right\| = \left\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},0)\right\| \leq \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\left\|u^{(0)}[\cdot]\right\|_1$$

и неравенства (3.12), (3.13), получаем

$$\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\| \leq 2\gamma M\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\left(\frac{4\gamma}{3h}\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}(e^{hL_0}-1)+1\right) < \rho_\lambda.$$

Таким образом, при выборе

$$\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2, \qquad \rho_u = \rho_u^*/2, \qquad \rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$$

все условия теоремы 2.1 выполняются для любого разбиения промежутка $[0,T)$ с шагом $h \in \in (0,h_2] : Nh = T,\ N \in \mathbb{N}$.

Достаточность условий теоремы для существования „изолированного” решения задачи (1.1), (1.2) следует из теоремы 3.3.

Теорема 3.4 доказана.

Литература

1. *Ascher U. M., Mattheij R. M., Russel R. D.* Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations // SIAM Classics Appl. Math. – 1995. – **13**.
2. *Babenko K. I.* Fundamentals of numerical analysis. – Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
3. *Bakhvalov N. S.* Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations. – Moscow: Fizmatgiz, 1973.
4. *Bellman R., Kalaba R.* Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. – New York: Amer. Elsevier, 1965.
5. *Butcher J. C.* The numerical analysis of ordinary differential equations. – New York: Wiley, 1987.
6. *Jiang W., Cui M.* Constructive proof for existence of nonlinear two-point boundary value problems // Appl. Math. and Comput. – 2009. – **215**. – P. 1937 – 1948.
7. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point boundary value problems. – New York: Dover, 1992.
8. *Lakshmikantham V., Vatsala A. S.* Generalized quasilinearization for nonlinear problems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
9. *Modern* numerical methods for ordinary differential equations / Eds G. Hall and J. M. Watt. – Oxford: Clarendon, 1976.
10. *Ntouyas S. K.* Nonlocal initial and boundary value problems: a survey // Handbook Different. Equat.: Ordinary Different. Equat. – 2005. – **2**. – P. 461 – 557.
11. *Roberts S. M., Shipman J. S.* Two-point boundary-value problems: shooting methods. – New York: Elsevier, 1972.
12. *Ronto A., Ronto M.* Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations // Handbook Different. Equat.: Ordinary Different. Equat. – 2008. – **4**. – P. 441 – 592.
13. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
14. *Keller H. B., White A.* Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – **12**. – P. 791 – 802.
15. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82 – 93.
16. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 9 – 18.
17. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – River Edge, NJ: World Sci., 2000.
18. *Dzhumabayev D. S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1989. – **29**, № 1. – P. 34 – 46.
19. *Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M.* A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. and Math. Phys. – 2007. – **47**, № 1. – P. 37 – 61.
20. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Получено 10.01.18