УДК 517.983

В. Ф. Журавлев (Житомир. нац. агроэкол. ун-т)

УСЛОВИЯ БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We obtain bifurcation conditions for the solutions of weakly perturbed boundary-value problems for operator equations in Banach spaces from the point $\varepsilon = 0.$ A convergent iterative procedure is proposed for the construction of solutions as parts of series in powers of ε with pole at the point $\varepsilon = 0.$

Отримано умови біфуркації розв'язків слабкозбурених крайових задач для операторних рівнянь у банахових просторах з точки $\varepsilon = 0.$ Запропоновано збіжну ітераційну поцедуру побудови розв'язків у вигляді частини ряду за степенями ε з полюсом у точці $\varepsilon = 0.$

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой были рассмотрены условия бифуркации слабовозмущенных операторных уравнений в банаховых пространствах, когда линейное порождающее операторное уравнение не везде разрешимо [2], а линейный оператор обобщенно обратим [3].

Исследование слабовозмущенных краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах опирается на метод Вишика – Люстерника [4], который использовался для анализа слабовозмущенных краевых задач (с нетеровой линейной частью) для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений [5 – 7], слабовозмущенных вырожденных нетеровых краевых задач [8] в евклидовых пространствах.

Слабовозмущенные краевые задачи в случае, когда дифференциальный оператор действует в банаховом пространстве, исследовали А. А. Бойчук и Е. В. Панасенко [9]. Для этих задач характерным является то, что уравнение $Lz = f$ линейной порождающей краевой задачи является везде разрешимым.

Поэтому актуальной является проблема исследования краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах в случае, когда операторное уравнение порождающей краевой задачи не везде разрешимо, а линейный оператор — обобщенно обратим.

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $z(t),$ определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1,\ z(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ с равномерной нормой $|||z(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1},$ а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $f(t),$ определенных на том же промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_2,\ f(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2$ с равномерной нормой $|||f(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$ [10].

Рассмотрим слабовозмущенную краевую задачу

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon(Az)(t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon\ell_1 z(\cdot), \tag{2}$$

где L — линейный ограниченный обобщенно-обратимый [3] и A — линейный ограниченный операторы, которые действуют из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2),\ f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2),\ \ell$ и ℓ_1 — линейные непрерывные операторы, которые действуют из пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{B}$, α — элемент пространства $\mathbf{B}: \alpha \in \mathbf{B}$, $\varepsilon << 1$ — малый параметр.

Обобщенная обратимость оператора L означает, что ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ оператора L дополняемы [11] в банаховых пространствах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ соответственно. С каждой парой взаимно дополняемых подпространств связаны ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{R(L)}: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to R(L)$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ в прямые топологические суммы

$$\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) = N(L) \oplus X_L, \qquad \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) = Y_L \oplus R(L).$$

Дополнительные ограниченные проекторы на подпространства X_L и Y_L будем обозначать соответственно $\mathcal{P}_{X_L} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_{Y_L} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{R(L)}$.

В дальнейшем класс линейных ограниченных обобщенно-обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, будем обозначать $\mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$. Очевидно, что оператор из $\mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ является нормально разрешимым.

Предположим, что порождающая краевая задача

$$(Lz)(t) = f(t), \tag{3}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

которая получается из (1), (2) при $\varepsilon = 0$, не имеет решений при произвольных неоднородностях $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$.

Возникает вопрос: можно ли с помощью малых линейных возмущений сделать краевую задачу (1), (2) разрешимой, и каким условиям должны удовлетворять операторы A и ℓ_1, чтобы это стало возможным?

В настоящей работе, применяя теорию обобщенного обращения операторов в банаховых пространствах [6, 7], а также теоремы о разрешимости операторных уравнений с обобщенно-обратимыми операторами L [12] и краевых задач для таких уравнений [13], рассмотрим задачу об условиях существования и способах построения решений слабовозмущенных краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах с обобщенно-обратимым оператором в линейной части.

Предварительные сведения. Пусть L принадлежит $\mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$. Тогда неоднородное операторное уравнение (3) разрешимо для тех и только тех $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, для которых выполняется условие [12]

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$z(t) = \big(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}\big)(t) + (L^- f)(t), \tag{5}$$

где $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ — ограниченные проекторы, $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор [6, 7, 12] к оператору L.

Для того чтобы решение (5) неоднородного операторного уравнения (1) было решением краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы элемент $\hat{z}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ удовлетворял операторному уравнению

$$\ell\big(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}\big)(\cdot) + \ell(L^{-}f)(\cdot) = \alpha,$$

полученному после подстановки решения (5) в краевое условие (2).

Обозначим через $\mathcal{L}* = \ell\mathcal{P}_{N(L)}*$ линейный оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Оператор $\mathcal{L}$ является ограниченным как суперпозиция ограниченных функционала ℓ и проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$.

Пусть оператор $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B}\big)$. Тогда $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(\mathcal{L})$ и $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} : \mathbf{B} \to Y_{\mathcal{L}}$ — ограниченные проекторы, $\mathcal{L}^{-}$ — линейный ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору $\mathcal{L}$.

Для порождающей краевой задачи (3), (4) справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *и* $\mathcal{L} \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B}\big)$.

Тогда соответствующая (3), (4) *однородная краевая задача* $\big(f(t) = 0,\ \alpha = 0\big)$ *имеет семейство решений*

$$z(t) = \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}\big)(t),$$

где $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ *— разрешающий оператор,* $\hat{z}(t)$ *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднородная краевая задача (3), (4) *разрешима для тех и только тех* $f(t) \in \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\big\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\big\} = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

и при этом имеет семейство решений

$$z(t) = \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}\big)(t) + (Gf)(t) + \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\alpha\big)(t),$$

где

$$(Gf)(t) = (L^{-}f)(t) - \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\ell(L^{-}f)(\cdot)\big)(t)$$

— обобщенный оператор Грина полуоднородной $(\alpha = 0)$ *краевой задачи* (3), (4).

Промежуточный результат. Для решения поставленной задачи нам необходимо решить задачу об условиях разрешимости и представлении решений операторных уравнений с линейным оператором вида

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $B_1 : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ и $B_2 : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ — обобщенно-обратимые, а следовательно, нормально разрешимые операторы.

Это значит, что имеют место разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) &= N(B_1) \oplus X_{B_1}, \qquad & \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) &= Y_{B_1} \oplus R(B_1), \\ \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) &= N(B_2) \oplus X_{B_2}, \qquad & \mathbf{B} &= Y_{B_2} \oplus R(B_2) \end{aligned}$$

и существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(B_1)} : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(B_1)$ и $\mathcal{P}_{N(B_2)} : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(B_2)$ на нуль-пространства операторов B_1 и B_2, а также ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{Y_{B_1}} : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_{B_1}$ и $\mathcal{P}_{Y_{B_2}} : \mathbf{B} \to Y_{B_2}$ на подпространства Y_{B_1} и Y_{B_2} соответственно [3, 11].

Рассмотрим систему операторных уравнений

$$B_0 z = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $b_1 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1),\ b_2 \in \mathbf{B}$, а оператор $B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ действует из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в прямое произведение банаховых пространств $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$.

Вследствие нормальной разрешимости оператора B_1 уравнение $B_1 z = b_1$ системы (8) имеет решение тогда и только тогда, когда [12]

$$\mathcal{P}_{Y_{B_1}} b_1 = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$z = \mathcal{P}_{N(B_1)} \hat{z} + B_1^- b_1 = \bar{z} + B_1^- b_1, \tag{9}$$

где $\hat{z} \in \mathbf{B}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1),\ \bar{z} = \mathcal{P}_{N(B_1)} \hat{z}$ — произвольный элемент нуль-пространства $N(B_1),\ B_1^-$ — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору B_1.

Подставив найденное z из (9) во второе уравнение $B_2 z = b_2$ системы (8), получим

$$B_2 \big[\bar{z} + B_1^- b_1\big] = b_2,$$

или

$$B_2 \bar{z} = b_2 - B_2 B_1^- b_1. \tag{10}$$

Уравнение (10) разрешимо относительно $\bar{z}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{Y_{B_2}} \big[b_2 - B_2 B_1^- b_1\big] = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$\bar{z} = \mathcal{P}_{N(B_2)} \tilde{z} + B_2^- \big[b_2 - B_2 B_1^- b_1\big], \tag{11}$$

где $\tilde{z} = \mathcal{P}_{N(B_1)} \hat{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент нуль-пространства $N(B_1),\ B_2^-$ — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору B_2.

Подставив (11) в (9), получим

$$z = \mathcal{P}_{N(B_2)} \tilde{z} + B_2^- \big[b_2 - B_2 B_1^- b_1\big] + B_1^- b_1 =$$

$$= \mathcal{P}_{N(B_2)} \mathcal{P}_{N(B_1)} \hat{z} + \mathcal{P}_{N(B_2)} B_1^- b_1 + B_2^- b_2 = \mathcal{P}_{N(B_2)} \mathcal{P}_{N(B_1)} \hat{z} + \big[\mathcal{P}_{N(B_2)} B_1^- \quad B_2^-\big] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

так как $I_{\mathbf{B}} - B_2^- B_2 = \mathcal{P}_{N(B_2)}$ [6, 7].

Теорема 2. *Пусть* $B_1 \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\big)$ *и* $B_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{B})$. *Тогда операторное уравнение* (8) *разрешимо для тех и только тех* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, *для которых выполняется условие*

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{12}$$

и при это имеет семейство решений вида

$$z = \mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z} + B_0^- \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ *— ограниченный проектор на подпространство* Y_{B_0}, $\mathcal{P}_{N(B_0)} = \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}$ *— ограниченный проектор на нуль-пространство оператора* B_0, $\hat{z}$ *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$,

$$B_0^- = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- \end{bmatrix} \tag{14}$$

— ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору $B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$.

Сначала покажем, что оператор (14) является ограниченным обобщенно-обратным к оператору B_0. Для этого необходимо и достаточно показать, что B_0^- удовлетворяет условиям [3, 6, 7]

$$B_0^- B_0 B_0^- = B_0^-, \qquad B_0 B_0^- B_0 = B_0. \tag{15}$$

Для проверки первого из условий (15) сначала определим

$$\begin{aligned} B_0^- B_0 &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- B_1 + B_2^- B_2 = \\ &= \mathcal{P}_{N(B_2)}\big[I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_1)}\big] + \big[I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_2)}\big] = \\ &= I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_0)}, \end{aligned} \tag{16}$$

поскольку [6, 7] $B_1^- B_1 = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_1)}$, а $B_2^- B_2 = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_2)}$, где $I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}$ — тождественный оператор в банаховом пространстве $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$.

Из (16) следует, что

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} B_0^- B_0 B_0^- &= \big(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}\big)\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- - \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- - \mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}B_2^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- \end{bmatrix} = B_0^-, \end{aligned}$$

так как $\mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- = 0$, $\mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)}B_2^- = 0$.

Для проверки второго из условий (15) находим

$$B_0B_0^- = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_1B_2^- \\ B_2\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2B_2^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_1B_2^- \\ 0 & I_{\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\times\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_{B_0}},$$

поскольку $B_2\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- = 0$.

Таким образом, из соотношения $B_0B_0^- = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\times\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ получаем

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\times\mathbf{B}} - B_0B_0^- = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & -B_1B_2^- \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Покажем, что $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ является проектором, т. е.

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}^2 = \mathcal{P}_{Y_{B_0}},$$

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}^2 = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & -B_1B_2^- \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} (I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-)^2 & -(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-)B_1B_2^- \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & -B_1B_2^- \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_{B_0}},$$

так как

$$\big(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-\big)^2 = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - 2B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- +$$

$$+ B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}\big(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{N(B_1)}\big)\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-,$$

$$\big(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-\big)B_1B_2^- = B_1B_2^- - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-B_1B_2^- = B_1B_2^-,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{B_2}}^2 = \mathcal{P}_{Y_{B_2}}.$$

Далее проверим выполнение второго из условий (15):

$$B_0B_0^-B_0 = \big[I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\times\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\big]B_0 = B_0 - \mathcal{P}_{Y_{B_0}}B_0 =$$

$$= B_0 - \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & -B_1B_2^- \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= B_0 - \begin{bmatrix} \big[I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-\big]B_1 - B_1B_2^-B_2 \\ \mathcal{P}_{Y_{B_2}}B_2 \end{bmatrix} = B_0, \tag{18}$$

поскольку

$$\left[I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-\right]B_1 - B_1B_2^-B_2 =$$

$$= B_1 - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}\left[I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(B_1)}\right] - B_1\left[I_{\mathbf{B_1}} - \mathcal{P}_{N(B_2)}\right] = 0,$$

$$B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}\mathcal{P}_{N(B_1)} = 0, \qquad \mathcal{P}_{Y_{B_2}}B_2 = 0.$$

Таким образом, оператор $B_0^- = \left[\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- \quad B_2^-\right]$ является обобщенно-обратным к оператору B_0. Ограниченность оператора B_0 следует из ограниченности операторов, которые его составляют.

Из (17) и (18) следует, что (13) является решением операторного уравнения (8) тогда и только тогда, когда выполняется условие (12).

***Замечание* 1.** Известно [3], что обобщенно-обратный оператор и проекторы не определяются однозначно. В рассматриваемой задаче обобщенно-обратным оператором B_0^- к оператору B_0 будет также оператор

$$B_0^- = \left[B_1^- \quad \mathcal{P}_{N(B_1)}B_2^-\right].$$

В этом случае $\mathcal{P}_{N(B_0)} = \mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_2)}$,

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_1}} & 0 \\ -B_2B_1^- & I_{\mathbf{B}} - B_2\mathcal{P}_{N(B_1)}B_2^- \end{bmatrix}.$$

Основной результат. Пусть порождающая краевая задача (3), (4) не имеет решений при произвольных неоднородностях $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$. По теореме 1 это означает, что хотя бы одно из условий разрешимости (6) не выполняется.

Для решения поставленной задачи используем метод Вишика – Люстерника [4]. Решение уравнения (1) будем искать в виде части ряда по степеням малого параметра ε с полюсом в точке $\varepsilon = 0$:

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{19}$$

Подставим ряд (19) в краевую задачу (1), (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^{-1} приходим к однородной краевой задаче

$$(Lz_{-1})(t) = 0, \tag{20}$$

$$\ell z_{-1}(\cdot) = 0 \tag{21}$$

для определения $z_{-1}(t)$.

По теореме 1 однородная краевая задача (20), (21) имеет семейство решений

$$z_{-1}(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}_{-1}\right)(t), \tag{22}$$

где $\hat{z}_{-1}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен ниже.

Приравнивая коэффициенты при ε^0, получаем краевую задачу

$$\begin{gathered}(Lz_0)(t) = f_{-1}(t), \\ \ell z_0(\cdot) = \alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot)\end{gathered} \tag{23}$$

для определения коэффициента $z_0(t)$, где

$$f_{-1}(t) = f(t) + (Az_{-1})(t).$$

По теореме 1 критерий разрешимости линейной неоднородной краевой задачи (23) имеет вид

$$\Big(\mathcal{P}_{Y_L}\big[f(\cdot) + (Az_{-1})(\cdot)\big]\Big)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\Big\{\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot) - \ell\big(L^{-}[f + (Az_{-1})]\big)(\cdot)\Big\} = 0.$$

Подставив $z_{-1}(t)$ из (22), получим систему операторных уравнений

$$\Big(\mathcal{P}_{Y_L}\big[f(\cdot) + (A\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}_{-1})(\cdot)\big]\Big)(t) = 0,$$
$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\Big\{\alpha + \ell_1\big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}_{-1}\big)(\cdot) - \ell\big(L^{-}\big[f + \big(A\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\big)\hat{z}_{-1})\big]\big(\cdot\big)\Big\} = 0 \tag{24}$$

относительно элемента $\hat{z}_{-1} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

После преобразований из (24) получим операторное уравнение

$$(B_0\hat{z}_{-1})(t) = \left(\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\hat{z}_{-1}\right)(t) = -\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}f \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\} \end{bmatrix}(t), \tag{25}$$

где

$$B_1 = \mathcal{P}_{Y_L}A\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}, \qquad B_1 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2),$$
$$B_2 = \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\big\{\ell_1 + \ell(L^{-}A)\big\}\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}, \qquad B_2 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}. \tag{26}$$

Оператор B_0 действует из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в прямое произведение банаховых пространств $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ и $\mathbf{B}$.

Пусть $B_1 \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ и $B_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$. Тогда по теореме 2 уравнение (25) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию

$$\left(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}f \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t) = 0. \tag{27}$$

Обозначив в (17)

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_{B_1}} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - B_1\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^{-}, \qquad B_{12} = -B_1B_2^{-},$$

получим, что условие (27) будет выполняться, если выполнено условие

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_{B_1}} & B_{12} \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \end{bmatrix} = 0. \tag{28}$$

При этом операторное уравнение (24) будет иметь хотя бы одно решение

$$\hat{z}_{-1}(t) = -\left(B_0^{-}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}f \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t),$$

которое с учетом (14) примет вид

$$\hat{z}_{-1}(t) = -\left(\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^- & B_2^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_L}f \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\{\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)\}\end{bmatrix}\right)(t) =$$

$$= (\widetilde{B}_1^- f)(t) - \big(\widetilde{B}_2^-\{\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)\}\big)(t),$$

где

$$\widetilde{B}_1^- = -\mathcal{P}_{N(B_2)}B_1^-\mathcal{P}_{Y_L}, \qquad \widetilde{B}_2^- = -B_2^-\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}. \tag{29}$$

Подставляя $\hat{z}_{-1}(t)$ в (22), получаем решение однородной краевой задачи (20), (21)

$$z_{-1}(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\widetilde{B}_1^- f - \widetilde{B}_2^-\{\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)\}\right]\right)(t).$$

При этом краевая задача (23) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_0)(t) + \bar{z}_0(t), \tag{30}$$

где

$$\bar{z}_0(t) = \big(G\big[f + (Az_{-1})\big]\big)(t) + \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\big[\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot)\big]\big)(t),$$

$\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса, G — обобщенный оператор Грина, который действует на функцию $f(t) + (Az_{-1})$ по правилу

$$(Gf)(t) := \big(L^-\big[f + (Az_{-1})\big]\big)(t) - \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell\big(L^-\big[f + (Az_{-1})\big]\big)(\cdot)\big)(t).$$

При ε^1 для определения коэффициента $z_1(t)$ приходим к краевой задаче

$$(Lz_1)(t) = f_0(t), \tag{31}$$

$$\ell z_1(\cdot) = \ell_1 z_0(\cdot), \tag{32}$$

где

$$f_0(t) = \left(A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_0)(\cdot) + \bar{z}_0(\cdot)\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен из критерия разрешимости краевой задачи (31), (32).

По теореме 1 краевая задача (31), (32) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$(\mathcal{P}_{Y_L}Az_0)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\big\{\ell_1 z_0(\cdot) - \ell(L^-Az_0)(\cdot)\big\} = 0.$$

Подставляя $z_0(t)$ из (30), имеем

$$\big(\mathcal{P}_{Y_L}A[\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_0 + \bar{z}_0]\big)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\Big\{\ell_1\big([\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_0 + \bar{z}_0]\big)(\cdot) - \ell\Big(L^-A\big[\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_0 + \bar{z}_0\big]\Big)(\cdot)\Big\} = 0.$$

Из последнего соотношения с учетом (25) и (26) получаем операторное уравнение

$$(B_0\hat{z}_0)(t) = \left(\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \hat{z}_0\right)(t) = -\left(\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}_0 \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_0)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t) \tag{33}$$

относительно элемента $\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

По предположению операторы B_1 и B_2 нормально разрешимы. Поэтому по теореме 2 операторное уравнение (33) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие [12]

$$\left(\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}_0 \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_0)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_{B_1}} & B_{12} \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}_0 \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_0)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t) = 0,$$

которое будет выполнено, если выполняется условие (28).

В этом случае операторная система (33) будет иметь хотя бы одно решение

$$\hat{z}_0(t) = -\left(B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}_0 \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_0)(\cdot)\} \end{bmatrix}\right)(t),$$

которое, использовав теорему 2 и обозначения (29), запишем в виде

$$\hat{z}_0(t) = (\widetilde{B}_1^-\bar{z}_0)(t) - \big(\widetilde{B}_2^-\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_0)\}\big)(t). \tag{34}$$

Подставив (34) в (30), получим решение краевой задачи (23)

$$z_0(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\left[\widetilde{B}_1^-\bar{z}_0 + \widetilde{B}_2^-\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot) - \ell(L^- A)\bar{z}_0)(\cdot)\}\right]\right)(t) + \bar{z}_0(t).$$

При выполнении условий (28) краевая задача (31), (32) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_1(t) = \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\hat{z}_1\big)(t) + \bar{z}_1(t),$$

где $\hat{z}_1(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса, $\bar{z}_1(t) = (GAz_0)(t) + \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell_1 z_0(\cdot)\big)(t)$.

Действуя по индукции, для определения коэффициентов $z_i(t)$ при ε^i ряда (19) приходим к краевым задачам

$$(Lz_i)(t) = f_{i-1}(t), \tag{35}$$

$$\ell z_i(\cdot) = \ell_1 z_{i-1}(\cdot), \tag{36}$$

где

$$f_{i-1}(t) = (Az_{i-1})(t) = \left(A\left[\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\hat{z}_{i-1} + \bar{z}_{i-1}\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_{i-1}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольные элементы, которые будут определяться из критериев разрешимости краевых задач (35), (36).

При выполнении условий (28) элементы $\hat{z}_i(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ находятся по формулам

$$\hat{z}_i(t) = \big(\widetilde{B}_1^-\bar{z}_i\big)(t) - \left(\widetilde{B}_2^-\{\ell_1\bar{z}_i(\cdot) - \ell L^- A\bar{z}_i(\cdot)\}\right)(t).$$

При этом каждая из краевых задач (35), (36) имеет семейство решений

$$z_i(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_i)(t) + \bar{z}_i(t) =$$

$$= (\widetilde{B}_1^- \bar{z}_i)(t) + \Big(\widetilde{B}_2^- \{\ell_1 \bar{z}_i(\cdot) - \ell(L^- A)\bar{z}_i(\cdot)\}\Big)(t) + \bar{z}_i(t),$$

где $\hat{z}_i(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1),\ \bar{z}_i(t) = (GAz_{i-1})(t) + \big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \ell_1 z_{i-1}(\cdot)\big)(t)$.

Таким образом, имеем итерационный алгоритм построения решения краевой задачи (1), (2):

$$z_i(t) = \left[\begin{array}{ll} (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_i)(t), & \text{если} \quad i = -1, \\ (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_i)(t) + \bar{z}_i(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{array}\right.$$

$$\hat{z}_i(t) = \left[\begin{array}{ll} (\widetilde{B}_1^- f)(t) - (\widetilde{B}_2^- \{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\})(t), & \text{если} \quad i = -1, \\ (\widetilde{B}_1^- \bar{z}_i)(t) - (\widetilde{B}_2^- \{\ell_1 \bar{z}_i(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_i)(\cdot)\})(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{array}\right. \tag{37}$$

$$\bar{z}_i(t) = \left[\begin{array}{ll} (G[f + (Az_{-1})])(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-[\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot)])(t), & \text{если} \quad i = 0, \\ (GAz_{i-1})(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \ell_1 z_{i-1}(\cdot))(t), & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}. \end{array}\right.$$

Докажем сходимость ряда (19) при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Пусть

$$\begin{gathered} \left|\left|\left|\widetilde{B}_1^-\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} = \tilde{b}_1 < \infty, \qquad \left|\left|\left|\widetilde{B}_2^-\right|\right|\right|_{\mathbf{B}} = \tilde{b}_2 < \infty, \qquad |||L^-|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} = l < \infty, \\ |||\mathcal{L}^-|||_{\mathbf{B}} = \tilde{l} < \infty, \qquad |||A|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = a < \infty, \qquad |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} = f < \infty, \\ |||G|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} = g < \infty, \qquad \left|\left|\left|\mathcal{P}_{N(L)}\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} = p_1 < \infty, \qquad |||\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}|||_{\mathbf{B}} = p_2 < \infty, \\ |||\ell|||_{\mathbf{B}} = l_0 < \infty, \qquad |||\ell_1|||_{\mathbf{B}} = l_1 < \infty. \end{gathered} \tag{38}$$

Запишем ряд (19) в виде

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) = \varepsilon^{-1} z_{-1}(t) + z_0(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{39}$$

Очевидно, что, в силу (38) первых два члена ряда (39) ограничены.

Докажем сходимость ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$. Для всех $i = \overline{1, \infty}$ имеем

$$|||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = \sup_{t \in \mathcal{I}} \left\|(GAz_{i-1})(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \ell_1 z_{i-1}(\cdot))(t)\right\| \leq$$

$$\leq (ga + p_1 \tilde{l} l_1)\, |||z_{i-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = \bar{k}\, |||z_{i-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

где $\bar{k} = (ga + p_1 \tilde{l} l_1)$,

$$|||\hat{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = \sup_{t\in\mathcal{I}} \left\|(\widetilde{B}_1^- \bar{z}_i)(t) + (\widetilde{B}_2^- \{\ell_1 \bar{z}_i(\cdot) - \ell(L^- A\bar{z}_i\})(t)\right\| \leq$$

$$\leq \left(\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2[l_1 + l_0 la]\right) |||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq \hat{k}\bar{k}\, |||z_{i-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

где $\hat{k} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2[l_1 + l_0 la]$.

Тогда для $z_i(t)$ получим оценку по норме

$$|||z_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = \sup_{t\in\mathcal{I}} \left\|(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\hat{z}_i)(t) + \bar{z}_i(t)\right\| \leq (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})\, |||z_{i-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Таким образом, имеем

$$|||z_1(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})\, |||z_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

$$|||z_2(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})\, |||z_1(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})^2\, |||z_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Продолжая этот процесс далее, по индукции получаем

$$|||z_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})^i\, |||z_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Из полученных оценок следует, что первых два члена ряда (19) ограничены, а ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ мажорируется рядом

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})^i\, |||z_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

который равномерно сходится для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < (p_1 p_2 \hat{k}\bar{k} + \bar{k})^{-1}$.

Таким образом, для слабовозмущенной краевой задачи (1), (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$, $\mathcal{L} \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ *и порождающая краевая задача* (3), (4) $(\varepsilon = 0)$ *при произвольных неоднородностях* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$ *не имеет решений.*

Тогда если $B_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), Y_L)$, $B_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), Y_L)$ *и выполняются условия*

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_{B_1}} & B_{12} \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0,$$

то слабовозмущенная краевая задача (1), (2) *при произвольных неоднородностях* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$ *имеет семейство решений в виде ряда*

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t),$$

абсолютно сходящегося при произвольных фиксированных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, *коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма* (37).

Замечание 2. Условие $\begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_{B_1}} & B_{12} \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{B_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0$ является достаточным условием существования решения уравнения (1). Если это условие не выполняется, то решение уравнения (1) в виде ряда (19) не существует. Но решение уравнения (1) может существовать в виде ряда (19), где $i = -2, -3, \ldots$.

Литература

1. *Журавлев В. Ф.* Слабовозмущенные операторные уравнения в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 6. – P. 751 – 764.
2. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3 – 80.
5. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
6. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 323 p.
8. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems // Different. Equat. – 2011. – **47**, № 4. – P. 453 – 461.
9. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, №. 3. – С. 291 – 304.
10. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
11. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.
12. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Pokutnyi A. A.* Normally solvable operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 179 – 192.
13. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Zhuravlev V. F.* Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space // Different. Equat. – 2014. – **50**, № 3. – P. 1 – 11.

Получено 09.10.17