УДК 517. 5

К. В. Швай (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ БІЛІНІЙНИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ (ψ,β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Order estimates are obtained for the best bilinear approximations of $2d$-variable functions $f(x-y),\ x,y\in\pi_d,\ \pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, formed by d-variable functions $f(x)\in L^{\psi}_{\beta,p}$ by the shifts of their argument $x\in\pi_d$ by all possible values of $y\in\pi_d$ in the space $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$. The results include various relations between the parameters $p,\ q_1$, and q_2.

Получены порядковые оценки наилучших билинейных приближений функций $2d$ переменных вида $f(x-y)$, $x,y\in\pi_d,\ \pi_d=\prod_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, образованных из функций d переменных $f(x)\in L^{\psi}_{\beta,p}$ сдвигом их аргумента $x\in\pi_d$ на всевозможные $y\in\pi_d$, в пространстве $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ при некоторых соотношениях между параметрами $p,\ q_1$ и q_2.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{R}^m,\ m\geq 1,$ — m-вимірний евклідів простір і для $x=(x_1,\ldots,x_m),\ y=(y_1,\ldots,y_m)$ з $\mathbb{R}^m$ $(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_my_m$. Через $L_q(\pi_m),\ \pi_m=\prod_{j=1}^{m}[-\pi,\pi],\ 1\leq q\leq\infty$, будемо позначати простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_m)}=\|f\|_q=\left((2\pi)^{-m}\int\limits_{\pi_m}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\qquad 1\leq q<\infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_m)}=\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_m}|f(x)|.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f\in L_1(\pi_m)$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx_j=0,\qquad j=\overline{1,m}.$$

Нехай для функції $f\in L_1(\pi_m)$ її ряд Фур'є має вигляд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k)=(2\pi)^{-m}\int_{\pi_m}f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Далі, нехай $\psi_j\neq 0$ — довільні функції натурального аргумента, $\beta_j\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,m},\ \mathring{\mathbb{Z}}^m=(\mathbb{Z}\setminus\{0\})^m$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k\in\mathring{\mathbb{Z}}^m}\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn}k_j}}{\psi_j(|k_j|)}\widehat{f}(k)e^{i(k,x)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції f^{ψ}_{β}. Тоді, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, т. I, с. 132]), назвемо її (ψ,β)-похідною функції f. Множину функцій f, для яких існують f^{ψ}_{β}, позначимо через L^{ψ}_{β}.

Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$, і, крім того, $f^{\psi}_{\beta} \subset \mathfrak{N}$, то пишуть $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. У даній роботі в якості $\mathfrak{N}$ ми будемо розглядати множину одиничних куль простору $L_p\left(\pi_m\right)$, тобто

$$f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N} = U_p = \Big\{\varphi\colon\ \varphi \in L_p\left(\pi_m\right),\ \|\varphi\|_p \le 1\Big\},\ 1 \le p \le \infty.$$

Відповідні класи $L^{\psi}_{\beta}U_p$ будемо позначати через $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Зауважимо, що класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ є узагальненням відомих класів Вейля – Надя $W^{r}_{\beta,p}$ (див., наприклад, [3, с. 31]), які отримуються із даних, якщо покласти $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,m}$. Зазначимо також, що деякі апроксимативні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ досліджувалися в роботі [4].

Тепер дамо означення апроксимативної характеристики, яка вивчається у даній роботі.

Нехай $L_{q_1,q_2}\left(\pi_{2d}\right)$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, — множина функцій $f(x,y)$, $x,y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})} = \|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\Big\|_{q_2},$$

яка обчислюється послідовно, спочатку за змінною x у просторі $L_{q_1}\left(\pi_d\right)$, а потім від результату за змінною y у просторі $L_{q_2}\left(\pi_d\right)$.

Тоді величина

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\|f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$, називається найкращим білінійним наближенням порядку M функції $f \in L_{q_1,q_2}\left(\pi_{2d}\right)$.

Якщо F — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{1}$$

Класичний результат щодо найкращих білінійних наближень функцій двох змінних у просторі $L_{2,2}$ отримав Е. Шмідт [5]. Згодом дослідження апроксимативної характеристики (1) для різних функціональних класів набуло розвитку у роботах В. М. Темлякова [3, 6 – 9], М.-Б. А. Бабаєва [10], А. С. Романюка [11 – 14], А. С. Романюка та В. С. Романюка [15], К. В. Соліч [16], В. В. Шкапи [17] та ін.

Метою даної роботи є отримання порядкових оцінок величин $\tau_M(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2}$ при умові, що ці величини розглядаються для функцій $2d$ змінних вигляду $f(x-y)$, $x,y \in \pi_d$, утворених із функцій d змінних $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувом їх аргумента $x \in \pi_d$ на всеможливі $y \in \pi_d$ при деяких співвідношеннях між параметрами p, q_1 та q_2. Іншими словами, будемо досліджувати величини

$$\tau_M(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \tau_M(f(x-y))_{q_1,q_2} =$$

$$= \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| f(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,q_2}. \tag{2}$$

Варто зазначити, що для класів F функцій f, інваріантних відносно зсуву аргумента, оцінки їх найкращих білінійних наближень, крім самостійного інтересу, знаходять застосування для оцінок знизу колмогоровських поперечників[1] $d_M(F, L_{q_1})$. Відомо (див., наприклад, [3, с. 85]), що для множини F_f функцій $f(x-y)$, $x, y \in \pi_d$, утвореної із функції $f(x) \in F$, справедливим є співвідношення

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}).$$

Такий підхід до встановлення оцінок знизу колмогоровських поперечників класів Соболєва W^r_p періодичних функцій однієї змінної використовувався у роботі [19], а згодом для класів Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$ і Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних — у роботах [20, 21].

2. Допоміжні твердження. Перед тим як сформулювати твердження, які будуть використовуватися при доведенні одержаних результатів, введемо ще деякі позначення.

Отже, через D будемо позначати множину функцій ψ натурального аргумента, які задовольняють такі умови:

1) ψ є додатними та незростаючими;

2) існує $M > 0$ таке, що $\dfrac{\psi(l)}{\psi(2l)} \le M \ \forall l \in \mathbb{N}$.

До вказаної множини належать, зокрема, функції $\psi(|k|) = \dfrac{1}{|k|^r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$; $\psi(|k|) = \dfrac{\ln^{\alpha}(|k|+1)}{|k|^r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, та інші.

Для встановлення оцінок зверху найкращих білінійних наближень нам знадобляться оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень, які для функціональних класів $F \subset L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, означаються таким чином:

$$e_M(F)_q = \sup_{f\in F} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(k^j,\cdot\right)} \right\|_q, \tag{3}$$

де $\left\{k^j\right\}_{j=1}^M$ — система векторів $k^j = \left(k^j_1, \ldots, k^j_d\right)$ із цілочисловими координатами, а c_j, $j = \overline{1, M}$, — довільні комплексні числа.

З історією дослідження величини (3) для деяких класів функцій багатьох змінних можна ознайомитися у роботах [22 – 24].

Далі, кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) : \ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d}\right\}$$

[1] Колмогоровським поперечником [18] центрально-симетричної множини W в нормованому просторі X називається величина

$$d_M(W, X) = \inf_{L_M} \sup_{x\in X} \inf_{y\in L_M} \|x-y\|_X,$$

де L_M — підпростори простору X розмірності, що не перевищує M.

і для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Одержані результати сформульовано в термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_1 > 0$ така, що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які далі будуть міститися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій проводиться наближення, а також від розмірності простору $\mathbb{R}^m$.

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{N}|$ будемо позначати кількість елементів цієї множини.

Отже, справджуються такі твердження.

Теорема А (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [25, с. 52 – 56]). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують такі додатні сталі* $C_2(q)$ *та* $C_3(q)$, *що для кожної функції* $f \in L_q(\pi_d)$ *має місце оцінка*

$$C_2(q)\|f\|_q \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C_3(q)\|f\|_q.$$

Лема А [3, с. 98]. *Нехай задано число* M, *а число* $n \in \mathbb{N}$ *таке, що для кількості елементів множини* $\bar{Q}_n^1 = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ *виконуються умови* $\left|\bar{Q}_n^1\right| > 4M$, $\left|\bar{Q}_n^1\right| \asymp M$. *Тоді для будь-якої функції* g *вигляду*

$$g(x) = \sum_{k\in\bar{Q}_n^1} \hat{g}(k) e^{i(k,x)}, \qquad |\hat{g}(k)| = 1,$$

справедливою є оцінка

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Наступні допоміжні твердження, а також результати роботи будуть містити такі характеристики:

$$\Phi(n) = \min_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right), \qquad \Psi(n) = \max_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right).$$

Теорема Б [26]. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для довільного полінома* t *з „номерами" гармонік із множини* $\bar{Q}_n^1 = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ *має місце співвідношення*

$$\left\| t_\beta^\psi \right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \|t\|_p .$$

Теорема В [27]. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що* *задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_q \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Теорема Г [27]. *Нехай* $2 \le p < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *виконується співвідношення*

$$\Phi(n) \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_q \ll \Psi(n).$$

Теорема Д [28]. *Нехай* $1 < q \le p < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_q \ll \Psi(n).$$

3. Основні результати. Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \le 2 < q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *виконується співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \ll \tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{4}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Покажемо, що вона випливає із відповідної оцінки для найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій із класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Дійсно, згідно з теоремою В, для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ знайдеться такий набір θ_M із $M \asymp 2^n n^{d-1}$ різних векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ і такі $c_k \in \mathbb{C}$, що

$$\left\| f(x) - \sum_{k \in \theta_M} c_k e^{i(k,x)} \right\|_{q_1} \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Крім цього, для лівої частини (5) можемо записати

$$\left\| f(x) - \sum_{k \in \theta_M} c_k e^{i(k,x)} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{k \in \theta_M} c_k e^{i(k,x-y)} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{k \in \theta_M} c_k e^{i(k,x)} e^{-i(k,y)} \right\|_{q_1,\infty}. \tag{6}$$

Співставивши (5) та (6), одержимо

$$\left\| f(x-y) - \sum_{k\in\theta_M} c_k e^{i(k,x)e^{-i(k,y)}} \right\|_{q_1,\infty} \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Далі, поклавши в (7) $u_k(x) = c_k e^{i(k,x)}$, $v_k(y) = e^{-i(k,y)}$, згідно з (2), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $\tau_M \left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$.

Тепер встановимо в (4) оцінку знизу.

За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для кількості елементів множини $\bar{Q}^1_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ виконувалися співвідношення $\left|\bar{Q}^1_n\right| > 4M$, $\left|\bar{Q}^1_n\right| \asymp M$. Зауважимо, що $\left|\bar{Q}^1_n\right| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_4 \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \bar{D}^1_n(x),$$

де $\bar{D}^1_n(x) = \sum_{k\in\bar{Q}^1_n} e^{i(k,x)}$.

Покажемо, що f_1 належить $L^{\psi}_{\beta,p}$ при певному виборі сталої $C_4 > 0$.

З цією метою розглянемо східчасто-гіперболічне ядро Діріхле $D_n(x) = \sum_{k\in Q_n} e^{i(k,x)}$, де $Q_n = \bigcup_{(s,1)\le n} \rho(s)$. Відомо [30], що

$$\|D_n\|_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{p}},\ 1 < p < \infty. \tag{8}$$

Тому, взявши до уваги, що $\bar{D}^1_n(x) = D_n(x) - D_{n-1}(x)$, та скориставшись теоремою Б і співвідношенням (8), будемо мати

$$\begin{gathered}\left\|(f_1)^{\psi}_{\beta}\right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \left\|\bar{D}^1_n\right\|_p \le \\ \le 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\|D_n\|_p + \|D_{n-1}\|_p\right) \ll \\ \ll 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{p}} + 2^{(n-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)} (n-1)^{\frac{d-1}{p}}\right) \ll 1.\end{gathered}$$

Звідси випливає, що при відповідному виборі сталої $C_4 > 0$ функція f_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Таким чином, врахувавши обмеження на параметри p, q_1 та q_2, можемо записати

$$\begin{gathered}\tau_M \left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ge \tau_M \left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{2,1} \ge \tau_M \left(f_1(x-y)\right)_{2,1} \asymp \\ \asymp \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \tau_M \left(\bar{D}^1_n(x-y)\right)_{2,1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Далі, оскільки функція $\bar{D}^1_n(x)$ задовольняє умови леми А, то справедливою є оцінка

$$\tau_M \left(\bar{D}^1_n(x-y)\right)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Тому, співставивши (9) та (10), знайдемо

$$\tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \gg \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} M^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} = \Phi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \asymp$$

$$\asymp \Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (\log M)^{-2(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Оцінку знизу, а отже, і теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** В одновимірному випадку відповідний теоремі 1 результат встановила В. В. Шкапа [17], при цьому

$$\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad 1 < p \le 2 < q_1 < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

***Зауваження* 2.** Якщо у теоремі 1 покласти $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r}$, $r > \dfrac{1}{p}$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, то отримаємо точну за порядком оцінку для класів Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$:

$$\tau_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\log^{d-1} M\right)^{r-2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)},$$

$$1 < p \le 2 < q_1 < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

У випадку $r > \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{2}$ відповідну оцінку встановив В. М. Темляков [3, с. 96]. У випадку ж $\dfrac{1}{p} < r \le \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{2}$ оцінку знизу величини $\tau_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$ також встановив В. М. Темляков [3, с. 96], а оцінка зверху є наслідком оцінки величини $e_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1}$, яка була одержана Е. С. Белінським [31].

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p < q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) \ll \tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n). \tag{11}$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху будемо проводити міркування, аналогічні тим, які були використані при доведенні відповідної оцінки у теоремі 1. У цьому випадку із теореми Г для найкращих M-членних тригонометричних наближень при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ безпосередньо отримуємо

$$\tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n), \qquad 2 \le p < q_1 < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty. \tag{12}$$

Перейдемо до встановлення в (11) оцінки знизу. За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для кількості елементів множини $\bar{Q}^1_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ виконувались умови $\left|\bar{Q}^1_n\right| > 4M$, $\left|\bar{Q}^1_n\right| \asymp M$. Як вже було зазначено, $\left|\bar{Q}^1_n\right| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_5 \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

де $R_{s_j}(x_j) = \sum_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}$, $\varepsilon_l = \pm 1$, $j = \overline{1,d}$, — поліноми Рудіна – Шапіро, $C_5 > 0$.

Зазначимо, що для вказаних поліномів справедливою є порядкова оцінка (див., наприклад, [29, с. 155])

$$\left\| R_{s_j} \right\|_\infty \ll 2^{\frac{s_j}{2}}. \tag{13}$$

Переконаємося в тому, що f_2 належить $L^\psi_{\beta,p}$ з відповідною сталою $C_5 > 0$. Скориставшись послідовно теоремами Б, А та нерівністю Мінковського, одержимо

$$\left\| (f_2)^\psi_\beta \right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} t \left\| \left(\sum_{(s,1)=n} \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\left\| \sum_{(s,1)=n} \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right\|_{p/2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=n} \left\| \left| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right|^2 \right\|_{p/2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=n} \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j} \right\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \left\| R_{s_j} \right\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Тепер, врахувавши (13), із (14) будемо мати

$$\left\| (f_2)^\psi_\beta \right\|_p \ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,1)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \left(2^n n^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Звідси випливає, що при певному виборі сталої $C_5 > 0$ f_2 належить $L^\psi_{\beta,p}$.

Далі, оскільки поліном $v(x) = \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)$ задовольняє умови леми А, то справджується оцінка

$$\tau_M \left(v(x-y) \right)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Тому, скориставшись цією оцінкою, одержимо

$$\tau_M \left(L^\psi_{\beta,p} \right)_{q_1,q_2} \geq \tau_M \left(L^\psi_{\beta,p} \right)_{2,1} \geq \tau_M \left(f_2(x-y) \right)_{2,1} \asymp$$

$$\asymp C_5 \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} \tau_M \left(v(x-y) \right)_{2,1} \gg \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \Phi(n) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} = \Phi(n). \tag{15}$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 3.** В одновимірному випадку з теореми 2 випливає точна за порядком оцінка величини $\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$, яка була встановлена В. В. Шкапою [17], і при цьому

$$\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M), \qquad 2 \le p < q_1 < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

***Зауваження* 4.** У випадку $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r}$, $r > \dfrac{1}{2}$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, з теореми 2 випливає точна за порядком оцінка величини $\tau_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2}$, яка була встановлена В. М. Темляковим [3, с. 96], і при цьому

$$\tau_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r}\left(\log^{d-1} M\right)^r, \qquad 2 \le p < q_1 < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

Теорема 3. *Нехай* $2 \le q_1 < p < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справджується оцінка*

$$\Phi(n) \ll \tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n). \tag{16}$$

Доведення. Як і при встановленні оцінок зверху у теоремах 1 та 2, відповідну оцінку в (16) одержимо із теореми Д. Іншими словами, при $M \asymp 2^n n^{d-1}$

$$\tau_M\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \ll \Psi(n).$$

Для встановлення в (16) оцінки знизу достатньо розглянути функцію $f_2(x)$ та повторити міркування, які були використані при доведенні співвідношення (15).

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 5.** В одновимірному випадку із теореми 3 випливає оцінка

$$\tau_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp \psi_1(M), \qquad 2 \le q_1 < p < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

***Зауваження* 6.** Якщо у (16) покласти $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r}$, $r > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, то отримаємо точну за порядком оцінку найкращих білінійних наближень класів Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$, яка була встановлена А. С. Романюком [14]:

$$\tau_M\left(W^r_{\beta,p}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r}\left(\log^{d-1} M\right)^r, \qquad 2 \le q_1 < p < \infty, \qquad 1 \le q_2 \le \infty.$$

Література

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч. I. – 427 с. ; Ч. II. – 468 с.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 3 – 113.
4. *Романюк А. С.* О приближении классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 662 – 672.
5. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 433 – 476.
6. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.

7. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **134**, № 1. – С. 93 – 107.
8. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 250 – 267.
9. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 191 – 215.
10. *Бабаев М. -Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 6. – С. 10 – 21.
11. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
12. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411 – 1423.
13. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097 – 1111.
14. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
15. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
16. *Соліч К. В.* Оцінки білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1106 – 1120.
17. *Шкапа В. В.* Найкращі тригонометричні і білінійні наближення класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 3. – С. 386 – 399.
18. *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107 – 110.
19. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
20. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 986 – 1030.
21. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
22. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
23. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
24. *Dinh Dung, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation, arXiv: 1601. 03978v1 [math. NA] 15 Jan 2016.
25. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
26. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
27. *Консевич Н. М.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – **3**. – С. 204 – 219.
28. *Консевич Н. М.* Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 898 – 907.
29. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
30. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 159. – С. 32 – 43.
31. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.

Одержано 05.04.17,
після доопрацювання — 16.06.17