УДК 517.564/565

О. О. Кільчинський (Військ. ін-т телекомунікацій та інформатизації, Київ),
Є. В. Массалітіна (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

МЕТОД ПОМ’ЯКШЕННЯ НЕВ’ЯЗОК ДЛЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ПІД ДІЄЮ МАСОВИХ СИЛ

We develop a refined approximate method for the analytic investigation of the stress-strain states of orthotropic plates. The efficiency of the method is confirmed by comparing the exact and approximate solutions of the problem of bending of a circular plate.

Развит уточненный приближенный метод аналитического исследования напряженно-деформированного состояния ортотропных пластин. Эффективность метода подтверждена при сравнении точного и приближенного решений задачи об изгибе круглой пластины.

1. Вступ. Аналітичні розв’язки задач про пружну рівновагу пластин та оболонок знаходяться, як правило, наближеними методами, що виходять з можливості зведення початкової тривимірної задачі (задачі з трьома незалежними змінними) до звичайно простішої — двовимірної. Коректність такого зведення при побудові уточненої теорії тонких пластин була і залишається предметом прискіпливих досліджень [1 – 3] механіки твердого деформованого тіла. Можливі способи такого зведення наведено в роботах [4 – 8]. У 1992 – 1997 рр. на сторінках журналу „Известия АН. Механика твердого тела” тривала дискусія з питань подальшого розвинення так званої класичної теорії пластин, що склалася в минулому столітті. Підсумки дискусії й один із можливих варіантів побудови сучасної теорії пластин опубліковано в роботі [4]. В основу цієї теорії покладено дві гіпотези:

1. Елемент нормалі до серединної площини після згину пластини не змінює своєї довжини і залишається прямолінійним.

2. Нормальними напруженнями на площинках, паралельних до серединної площини пластини, можна нехтувати порівняно з нормальними напруженнями на площинках з нормалями у тангенціальних напрямках.

Як один із можливих варіантів зведення тривимірної задачі до двовимірної ми пропонуємо метод *пом’якшення нев’язок*. Метод узгоджує прогнозовані закони апроксимації переміщень по товщині пластини із процедурою *пом’якшення нев’язок* — мінімізації можливих неузгодженостей оптимальним підбором параметрів деформування. Замість відомих гіпотез [4, 5, 8] про геометрію деформування елемента нормалі до серединної поверхні, можливість нехтування окремими складовими тензора напружень тощо вводяться доказово обґрунтовані *кінцеві співвідношення* для визначення параметрів деформування. Дієвість методу підтверджено в роботах [9 – 11] при розрахунках пружної рівноваги прямокутної та круглої пластин під дією поверхневих навантажень. Нижче цей метод апробовано при розв’язуванні задачі про прогини пластини під дією власної ваги.

2. Формулювання задачі. Розглянемо задачу про деформований та напружений стан пружної ортотропної пластини сталої товщини h під дією об’ємних та поверхневих сил. Виберемо у просторі ортогональну систему координат (α, β, z) так, щоб координатна поверхня (α, β) збігалися з серединною площиною пластини, координата z змінювалася по нормалі до серединної площини $(-0{,}5h \leq z \leq 0{,}5h)$, а головні напрямки пружності збігалися з координатними лініями. Коефіцієнти Ламе для цих ліній позначимо через H_1, H_2, H_3. У вибраній системі координат коефіцієнти Ламе змінюються за законом

$$H_1 = H_1(\alpha, \beta), \qquad H_2 = H_2(\alpha, \beta), \qquad H_3 = 1. \tag{1}$$

Проекції вектора переміщень для точок (α, β, z) пластини позначимо через $u_\alpha,\ u_\beta,\ u_z$. Через $e_\alpha,\ e_\beta,\ e_z,\ e_{\alpha\beta},\ e_{\alpha z},\ e_{\beta z}$ та $\sigma_\alpha,\ \sigma_\beta,\ \sigma_z,\ \tau_{\alpha\beta},\ \tau_{\alpha z},\ \tau_{\beta z}$ позначимо компоненти тензорів деформацій та напружень. Інтегральні характеристики напруженого стану – зусилля $T_1,\ T_2,\ T_{12},\ N_1,\ N_2$ та моменти $M_1,\ M_2,\ M_{12}$ — визначимо за формулами

$$T_1 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} \sigma_\alpha dz, \qquad T_2 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} \sigma_\beta dz, \qquad T_{12} = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} \tau_{\alpha\beta} dz,$$

$$N_1 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} \tau_{\alpha z} dz, \qquad N_2 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} \tau_{\beta z} dz, \tag{2}$$

$$M_1 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} z\sigma_\alpha dz, \qquad M_2 = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} z\sigma_\beta dz, \qquad M_{12} = \int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} z\tau_{\alpha\beta} dz.$$

Відповідно до впливу зовнішніх факторів на граничних поверхнях пластини переміщення (напруження) повинні задовольняти певну систему граничних умов, що однозначно визначають її деформований та напружений стан. Поставлена задача належить до крайових задач теорії пружності, з якою пов'язано чотири відомі [5] групи рівнянь:

1-група (співвідношення між деформаціями та переміщеннями):

$$\begin{gathered} e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta, \qquad e_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha, \qquad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{u_\alpha}{H_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{u_\beta}{H_2}, \qquad e_{\alpha z} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}, \qquad e_{\beta z} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_z}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial z}. \end{gathered} \tag{3}$$

2-група (диференціальні рівняння рівноваги у напруженнях):

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2\sigma_\alpha) - \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial z}(H_1 H_2 \tau_{\alpha z}) + K_1 H_1 H_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(H_1\sigma_\beta) - \sigma_\alpha \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2^2 \tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial z}(H_1 H_2 \tau_{\beta z}) + K_2 H_1 H_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2\tau_{\alpha z}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_1\tau_{\beta z}) + \frac{\partial}{\partial z}(H_1 H_2 \sigma_z) + K_3 H_1 H_2 = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

де $K_1,\ K_2,\ K_3$ – проекції вектора об'ємних сил на дотичні до координатних ліній $\alpha,\ \beta,\ z$.

3-група (диференціальні рівняння рівноваги у зусиллях та моментах):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2 T_1) - T_2\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1^2 T_{12}) = -H_1 H_2 \left(\int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h} K_1 dz + X_2 \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1T_2)-T_1\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2T_{12})=-H_1H_2\left(\int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h}K_2dz+Y_2\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2N_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1N_2)=-H_1H_2\left(\int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h}K_3dz+Z_2\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2M_1)-M_2\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2M_{12})=H_1H_2\left(N_1-hX_1-\int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h}zK_1dz\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1M_2)-M_1\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2M_{12})=H_1H_2\left(N_2-hY_1-\int\limits_{-0{,}5h}^{0{,}5h}zK_2dz\right).$$

У рівняннях системи (5) праві частини визначаються через проекції вектора об'ємних сил, а задані напруження на площинах $z=\mp 0{,}5h$ задано формулами

$$X_1=0{,}5(X^+-X^-),\qquad Y_1=0{,}5(Y^+-Y^-),\qquad Z_1=0{,}5(Z^+-Z^-),$$
$$X_2=X^++X^-,\qquad Y_2=Y^++Y^-,\qquad Z_2=Z^++Z^-, \tag{6}$$
$$X^-=-\tau_{\alpha z}\big|_{z=-0{,}5h},\qquad Y^-=-\tau_{\beta z}\big|_{z=-0{,}5h},\qquad Z^-=-\sigma_z\big|_{z=-0{,}5h},$$
$$X^+=\tau_{\alpha z}\big|_{z=0{,}5h},\qquad Y^+=\tau_{\beta z}\big|_{z=0{,}5h},\qquad Z^+=\sigma_z\big|_{z=0{,}5h}.$$

Систему (5) і рівності (6) можна отримати, якщо кожне з рівнянь (4) домножити на степені z^0, z^1 та зінтегрувати по z від $z=-0{,}5h$ до $z=0{,}5h$, врахувавши співвідношення (2).

4-група (співвідношення закону Гука для ортотропного тіла):

$$e_\alpha=a_{11}\sigma_\alpha+a_{12}\sigma_\beta+a_{13}\sigma_z,\qquad e_{\beta z}=a_{44}\tau_{\beta z},$$
$$e_\beta=a_{12}\sigma_\alpha+a_{22}\sigma_\beta+a_{23}\sigma_z,\qquad e_{\alpha z}=a_{55}\tau_{\alpha z}, \tag{7}$$
$$e_z=a_{13}\sigma_\alpha+a_{23}\sigma_\beta+a_{33}\sigma_z,\qquad e_{\alpha\beta}=a_{66}\tau_{\alpha\beta}.$$

Тут через a_{ij} позначено коефіцієнти пружності матеріалу пластини:

$$a_{11}=\frac{1}{E_1},\qquad a_{12}=-\frac{\nu_{12}}{E_2}=-\frac{\nu_{21}}{E_1},\qquad a_{13}=-\frac{\nu_{13}}{E_3}=-\frac{\nu_{31}}{E_1},$$
$$a_{22}=\frac{1}{E_2},\qquad a_{23}=-\frac{\nu_{23}}{E_3}=-\frac{\nu_{32}}{E_2},\qquad a_{33}=\frac{1}{E_3}, \tag{8}$$
$$a_{44}=\frac{1}{G_{23}},\qquad a_{55}=\frac{1}{G_{13}},\qquad a_{66}=\frac{1}{G_{12}}.$$

Сталі E_1, E_2, E_3 є модулями Юнга на розтягнення-стискання у напрямках α, β, z; G_{23}, G_{13}, G_{12} — модулями зсуву у поверхнях $\alpha=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$, $z=\mathrm{const}$; ν_{12}, ν_{21}, ν_{13}, ν_{31}, ν_{23}, ν_{32} — коефіцієнтами Пуассона (перший індекс позначає напрям поперечного стискання, другий — відповідний напрям сили розтягнення). Формулам (7) можна надати вигляду

$$\begin{aligned} &\sigma_\alpha = b_{11}e_\alpha + b_{12}e_\beta + b_{13}e_z, \qquad \tau_{\beta z} = b_{44}e_{\beta z}\,, \\ &\sigma_\beta = b_{12}e_\alpha + b_{22}e_\beta + b_{23}e_z, \qquad \tau_{\alpha z} = b_{55}e_{\alpha z}\,, \\ &\sigma_z = b_{13}e_\alpha + b_{23}e_\beta + b_{33}e_z, \qquad \tau_{\alpha\beta} = b_{66}e_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{9}$$

Мають місце співвідношення

$$\begin{gathered} b_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1, \qquad b_{12} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1, \qquad b_{13} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1, \\ b_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\tilde{\nu}^2}E_2, \qquad b_{23} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{1-\tilde{\nu}^2}E_2, \qquad b_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\tilde{\nu}^2}E_3, \\ b_{44} = G_{23}, \qquad b_{55} = G_{13}, \qquad b_{66} = G_{12}, \qquad \tilde{\nu}^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{13} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}. \end{gathered} \tag{10}$$

Рівняння (1)–(10) складають основу для подальшого наближеного методу, в якому, як і в усіх теоріях, що визначають напружений стан пластини лише по зусиллях та моментах, на торцевих поверхнях $\alpha = \mathrm{const}, \beta = \mathrm{const}$ умови по напруженнях також задовольняються інтегрально, але замість відомих [4, 5, 8] гіпотез теорії пластин та оболонок пропонується застосовувати спеціальні кінцеві співвідношення, знайдені за процедурою пом'якшення нев'язок.

3. Метод пом'якшення. Основна система рівнянь для пружної ортотропної пластини. ***3.1. Апроксимація переміщень та деформовано-напруженого стану.*** При визначенні переміщень, деформацій та напружень пластини далі розрізнятимемо *вхідні характеристики*, отримані безвідносно до рівнянь рівноваги (4) (ці характеристики позначатимемо додатковим верхнім індексом (1)), та *вихідні характеристики*, отримані з урахуванням рівнянь (4) (вихідні характеристики позначатимемо додатковим верхнім індексом (2)). Переміщення довільної точки (α, β, z) пластини апроксимуватимемо по змінній z (по товщині пластини) за законом

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} = u + z\phi, \qquad u_\beta = u_\beta^{(1)} = v + z\psi, \qquad u_z = u_z^{(1)} = w + z\varepsilon + 0{,}5z^2\chi, \tag{11}$$

де $u,\ v,\ w, \phi,\ \psi,\ \varepsilon,\ \chi$ — параметри деформування, функції від $\alpha,\ \beta$. Звідси за формулами (3) виводимо функціональні залежності, що визначають закон зміни деформацій. Тангенціальні деформації $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}$ та поперечна деформація e_z змінюються по z за лінійним законом

$$\begin{gathered} e_\alpha = e_\alpha^{(1)} = \varepsilon_\alpha + z\kappa_\alpha, \qquad e_\beta = e_\beta^{(1)} = \varepsilon_\beta + z\kappa_\beta, \\ e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha\beta} + z\kappa_{\beta\alpha}, \qquad e_z = e_z^{(1)} = \varepsilon + z\chi, \end{gathered} \tag{12}$$

де

$$\begin{gathered} \varepsilon_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}v, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}u, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{u}{H_1} + \frac{H_2}{H1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{v}{H_2}, \\ \kappa_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}\psi, \qquad \kappa_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}\phi, \\ \kappa_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\phi}{H_1} + \frac{H_2}{H1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\psi}{H_2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Деформації поперечних зсувів $e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ змінюються по товщині за квадратичним законом

$$e_{\alpha z} = e_{\alpha z}^{(1)} = \gamma_1 + z\delta_1 + z^2\eta_1, \qquad e_{\beta z} = e_{\beta z}^{(1)} = \gamma_2 + z\delta_2 + z^2\eta_2, \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \phi + \frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \qquad \delta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{2H_1}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \\ \gamma_2 &= \psi + \frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial \beta}, \qquad \delta_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{2H_2}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}. \end{aligned} \tag{15}$$

Закони зміни вхідних (неврівноважених) напружень виводимо за формулами (2), (7), (9), (12). Тангенціальні напруження отримаємо у вигляді

$$\sigma_\alpha^{(1)} = \frac{1}{h}T_1 + \frac{12z}{h^3}M_1, \qquad \sigma_\beta^{(1)} = \frac{1}{h}T_2 + \frac{12z}{h^3}M_2, \qquad \tau_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{h}T_{12} + \frac{12z}{h^3}M_{12}, \tag{16}$$

де

$$\begin{gathered} T_1 = h(b_{11}\varepsilon_\alpha + b_{12}\varepsilon_\beta + b_{13}\varepsilon), \qquad T_2 = h(b_{12}\varepsilon_\alpha + b_{22}\varepsilon_\beta + b_{23}\varepsilon), \\ M_1 = \frac{h^3}{12}(b_{11}\kappa_\alpha + b_{12}\kappa_\beta + b_{13}\chi), \qquad M_2 = \frac{h^3}{12}(b_{12}\kappa_\alpha + b_{22}\kappa_\beta + b_{23}\chi), \\ T_{12} = hb_{66}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad M_{12} = \frac{h^3}{12}b_{66}\kappa_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{17}$$

У формулах (16), (17) і далі для довільної інтегровної функції $f(\alpha,\beta,z)$ позначено

$$\langle f \rangle = \int\limits_{-0,5h}^{0.5h} f(\alpha,\beta,z)dz, \qquad \overset{\circ}{f} = f - \frac{1}{h}\langle f \rangle - \frac{12z}{h^3}\langle zf \rangle. \tag{18}$$

Для напружень у площинах $z = \text{const}$ будемо мати

$$\begin{gathered} \tau_{\alpha z}^{(1)} = \frac{\gamma_1 + z\delta_1 + z^2\eta_1}{a_{55}}, \qquad \tau_{\beta z}^{(1)} = \frac{\gamma_2 + z\delta_2 + z^2\eta_2}{a_{44}}, \\ \sigma_z^{(1)} = b_{13}(\varepsilon_\alpha + z\kappa_\alpha) + b_{23}(\varepsilon_\beta + z_\beta) + b_{33}(\varepsilon_\alpha + z\chi). \end{gathered} \tag{19}$$

Для вихідних тангенціальних напружень покладемо

$$\sigma_\alpha^{(2)} = \sigma_\alpha^{(1)}, \qquad \sigma_\beta^{(2)} = \sigma_\beta^{(1)}, \qquad \tau_{\alpha\beta}^{(2)} = \tau_{\alpha\beta}^{(1)}. \tag{20}$$

Вихідні напруження у площинах $z = \text{const}$ знайдемо за рівностями (16) і (20), виходячи з рівнянь (2), (4), (5):

$$\tau_{\alpha z}^{(2)} = X_1 + \frac{z}{h}X_2 + \frac{3}{2}\frac{h^2 - 4z^2}{h^3}(N_1 - hX_1),$$

$$\tau_{\beta z}^{(2)} = Y_1 + \frac{z}{h}Y_2 + \frac{3}{2}\frac{h^2 - 4z^2}{h^3}(N_2 - hY_1),$$

$$\sigma_z^{(2)} = Z_1 + \frac{z}{h} Z_2 + \frac{h^2 - 4z^2}{2h^2} \left(z \operatorname{div} \overrightarrow{g_1} + \frac{h}{4} \operatorname{div} \overrightarrow{g_2} + \frac{z}{h} Z_2 \right) +$$

$$+ \frac{(h-z)(h+2z)^2}{2h^3} \langle K_3 \rangle - \int\limits_{-0,5h}^{z} K_3 dz + \int\limits_{-0,5h}^{z} dz \int\limits_{-0,5h}^{z} \operatorname{div} \overset{\circ}{\vec{K}} dz, \qquad (21)$$

$$\operatorname{div} \vec{g}_i = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 X_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_1 Y_i}{\partial \beta} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$\overset{\circ}{\vec{K}} = (\overset{\circ}{K}_1, \overset{\circ}{K}_2), \qquad \operatorname{div} \overset{\circ}{\vec{K}} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 \overset{\circ}{K}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_1 \overset{\circ}{K}_2}{\partial \beta} \right).$$

Формули (16) та (19) задають компоненти тензора $\tilde{T}^{(1)}$ — тензора вхідних (неврівноважених) напружень, що не підпорядковані рівнянням рівноваги (4). Компоненти тензора $\tilde{T}^{(2)}$ — тензора вихідних (врівноважених) напружень — даються формулами (16), (20), (21). За компонентами тензора $\tilde{T}^{(2)}$ можна скласти вирази для вихідних деформацій $e_\alpha^{(2)}$, $e_\beta^{(2)}$, $e_z^{(2)}$, $e_{\alpha\beta}^{(2)}$, $e_{\alpha z}^{(2)}$, $e_{\beta z}^{(2)}$ та переміщень $u_\alpha^{(2)}$, $u_\beta^{(2)}$, $u_z^{(2)}$.

3.2. Оптимальні кінцеві співвідношення та основна система рівнянь. Враховуючи зв'язки між компонентами тензорів $\tilde{T}^{(1)}$, $\tilde{T}^{(2)}$ та співвідношення (7), знаходимо

$$e_z^{(2)} = e_z^{(1)} + a_{33}(\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}), \qquad e_{\alpha z}^{(2)} = a_{55} \tau_{\alpha z}^{(2)}, \qquad e_{\beta z}^{(2)} = a_{44} \tau_{\beta z}^{(2)}. \qquad (22)$$

З третього, п'ятого та шостого співвідношень (3) на основі рівностей (22) матимемо

$$\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} + a_{33}\big(\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}\big), \qquad \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial z} = a_{55} \tau_{\alpha z}^{(2)} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial u_\beta^{(2)}}{\partial z} = a_{44} \tau_{\beta z}^{(2)} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial \beta}. \qquad (23)$$

Звідси інтегруванням по змінній z отримаємо

$$u_z^{(2)} = u_{z0}^{(2)} + u_z^{(1)} - w + a_{33} \int\limits_0^z (\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}) \, dz,$$

$$u_\alpha^{(2)} = u_{\alpha 0}^{(2)} + a_{55} \int\limits_0^z \tau_{\alpha z}^{(2)} dz - \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_0^z u_z^{(2)} dz, \qquad (24)$$

$$u_\beta^{(2)} = u_{\beta 0}^{(2)} + a_{44} \int\limits_0^z \tau_{\beta z}^{(2)} dz - \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \int\limits_0^z u_z^{(2)} dz,$$

де $u_{z0}^{(2)}$, $u_{\alpha 0}^{(2)}$, $u_{\beta 0}^{(2)}$ — додаткові параметри, що визначають деформований стан пластини і мають сенс вихідних переміщень у серединній площині. У загальному випадку через можливі відмінності вхідних та вихідних характеристик $\big(\tilde{T}^{(1)}$, $u_z^{(1)}$, $u_\alpha^{(1)}$, $u_\beta^{(1)}$, з одного боку, та $\tilde{T}^{(1)}$,

$u_z^{(2)}, u_\alpha^{(2)}, u_\beta^{(2)}$ — з іншого$)$ матимемо дві групи нев’язок $\{\Delta_{j1}; \Delta_{j2}; \Delta_{j3}\}$ $($$j$ — номер групи, $j = 1, 2)$. Для нев’язок 1- та 2-ї груп (нев’язок по напруженнях та нев’язок по переміщеннях) покладемо

$$\Delta_{11} = \left|\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}\right|, \qquad \Delta_{12} = \left|\tau_{\alpha z}^{(2)} - \tau_{\alpha z}^{(1)}\right|, \qquad \Delta_{13} = \left|\tau_{\beta z}^{(2)} - \tau_{\beta z}^{(1)}\right|, \tag{25}$$

$$\Delta_{21} = \left|u_z^{(2)} - u_z^{(1)}\right|, \qquad \Delta_{22} = \left|u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\right|, \qquad \Delta_{23} = \left|u_\beta^{(2)} - u_\beta^{(1)}\right|. \tag{26}$$

Нев’язки розглядатимемо як прояв відхилень між точним та наближеним розв’язками. Тому їх будемо пом’якшувати (мінімізувати). Пом’якшення нев’язок (окремо для кожної групи) здійснюватимемо за методом середнього квадратичного — оптимальним підбором параметрів ε, χ, ϕ, ψ та $u_{z0}^{(2)}$, $u_{\alpha0}^{(2)}$, $u_{\beta0}^{(2)}$ для мінімізації функціоналів I_{jk}:

$$I_{jk} = \int\limits_{-0,5h}^{0,5h} \Delta_{jk}^2 dz, \qquad j = \overline{1,2}, \quad k = \overline{1,3}. \tag{27}$$

Вирази функціоналів складемо за формулами (11), (16), (19) та (21), (24). Кожній групі нев’язок, (25) чи (26), відповідає своя група оптимальних кінцевих співвідношень, які встановлюють лінійну залежність величин ε, χ, ϕ, ψ, від інших параметрів деформування та перерізуючих зусиль. Результати мінімізації функціоналів I_{j1}, I_{j2}, I_{j3}, $j = 1, 2$, запишемо у вигляді

$$\begin{gathered}
\varepsilon = \frac{1}{b_{33}}\left(-b_{13}\varepsilon_\alpha - b_{23}\varepsilon_\beta + f_1^{(j)}\right), \qquad \chi = \frac{1}{b_{33}}\left(-b_{13}\kappa_\alpha - b_{23}\kappa_\beta + \frac{1}{h}f_2^{(j)}\right), \\
\phi = a_{55}\left(1 + \frac{\delta_{j2}}{5}\right)\frac{N_1}{h} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(w + h^2\frac{5 - 2\delta_{j2}}{120}\chi\right) - a_{55}\frac{\delta_{j2}}{5}X_1, \\
\psi = a_{44}\left(1 + \frac{\delta_{j2}}{5}\right)\frac{N_2}{h} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(w + h^2\frac{5 - 2\delta_{j2}}{120}\chi\right) - a_{44}\frac{\delta_{j2}}{5}Y_1, \\
u_{z0}^{(2)} = w - \frac{3h}{1120}a_{33}(Z_2 + \langle K_3\rangle + h\operatorname{div}\vec{g}_1), \\
u_{\alpha0}^{(2)} = u + \frac{h^2}{24}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} - \frac{h}{24}a_{55}X_2 + \frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle + h\operatorname{div}\vec{g}_2\right), \\
u_{\beta0}^{(2)} = u + \frac{h^2}{24}\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta} - \frac{h}{24}a_{44}Y_2 + \frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle + h\operatorname{div}\vec{g}_2\right),
\end{gathered} \tag{28}$$

де

$$\begin{gathered}
f_1^{(j)} = Z_1 + \frac{5 + \delta_{j2}}{60}\left(h\operatorname{div}\vec{g}_2 + \frac{12}{h}\langle zK_3\rangle\right), \\
f_2^{(j)} = Z_2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{35}\delta_{j2}\right)(Z_2 + \langle K_3\rangle + h\operatorname{div}\vec{g}_1),
\end{gathered} \tag{29}$$

δ_{j2} — символ Кронекера: $\delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ 1, & j = 2. \end{cases}$

Поклавши $j = 1$, за формулами (28) отримаємо кінцеві співвідношення, що мінімізують нев'язки по напруженнях; їх доцільно застосовувати при визначенні напруженого стану, зусиль, моментів, деформацій та змін кривини пластини. При $j = 2$ за цими ж формулами знайдемо співвідношення, корисні при визначенні переміщень. Отримані кінцеві співвідношення дозволяють вилучити параметри ε, χ у формулах (17) і встановити (без звичних припущень [4, 5, 8] теорії пластин і оболонок) безпосередні зв'язки між зусиллями, моментами та деформаціями ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, κ_α, κ_β, $\kappa_{\alpha\beta}$ серединної поверхні. З допомогою співвідношень (28), (29) та (10) з формул (17) виводимо

$$\begin{gathered} T_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\varepsilon_\alpha + \nu_{12}\varepsilon_\beta + \frac{\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}}{E_3} f_1^{(1)} \right), \\ T_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\varepsilon_\beta + \nu_{21}\varepsilon_\alpha + \frac{\nu_{13}\nu_{21} + \nu_{23}}{E_3} f_1^{(1)} \right), \\ T_{12} = hG_{12}\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ M_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left[\kappa_\alpha + \nu_{12}\kappa_\alpha + \frac{\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}}{E_3 h} f_2^{(1)} \right], \\ M_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left[\kappa_\beta + \nu_{21}\kappa_\alpha + \frac{\nu_{13}\nu_{21} + \nu_{23}}{E_3 h} f_2^{(1)} \right], \\ M_{12} = \frac{h^3}{12} G_{12}\kappa_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{30}$$

Підставивши вирази зусиль і моментів (30) у рівняння (5) і замінивши параметри ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, κ_α, κ_β, $\kappa_{\alpha\beta}$ їх виразами за формулами (13), отримаємо замкнену систему п'яти диференціальних рівнянь з п'ятьма невідомими u, v, w та ϕ, ψ. Розв'язки цієї системи потрібно підпорядкувати граничним умовам (6) та умовам на торцевих поверхнях $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$. Формули (2), (5), (6), (8), (10) – (13), (16) – (18), (20), (21) та (28) – (30) складають основну систему рівнянь, що визначають деформований та напружений стан пластини за методом пом'якшення нев'язок. Судячи з характеру функціоналів (27) і базового закону (11), можна сподіватись, що за цим методом у формі (11) можна отримати середні квадратичні наближення (по змінній z) до точних розв'язків задач теорії пружних пластин. Очікувані похибки наближених розв'язків складатимуть величини порядку h^2/l^2 порівняно з одиницею, де h — товщина, а l — характерний розмір у серединній площині пластини.

4. Метод пом'якшення: осесиметричне навантаження круглої пластини. Розглянемо круглу пластину радіуса a і товщини h. Віднесемо її до циліндричної системи координат (r, θ, z) з початком у геометричному центрі O пластини і віссю Oz, що проходить по нормалі до її серединної площини. Нехай пластина є однорідною трансверсально ізотропною, у кожній точці площина ізотропії проходить паралельно площині $z = 0$. У вибраній системі координат співвідношення (1) – (30) зберігають силу, якщо покласти

$$\alpha = r, \qquad \beta = \vartheta, \qquad H_1 = 1, \qquad H_2 = r. \tag{31}$$

Відповідно до властивостей трансверсально ізотропного матеріалу для пружних характеристик пластини у формулах (7) – (10), (21), та (28), (30) маємо

$$
\begin{gathered}
E_1 = E_2 = E, \qquad E_3 = E', \qquad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \qquad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu', \qquad \nu_{31} = \nu_{32} = \nu' \frac{E}{E'}, \\
a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \qquad a_{33} = \frac{1}{E'}, \qquad a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}, \\
a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \qquad a_{12} = \frac{-\nu}{E}, \qquad a_{13} = a_{23} = \frac{-\nu'}{E'}, \qquad (32) \\
b_{11} = b_{22} = \left[1 - (\nu')^2 \frac{E}{E'}\right] \frac{E}{1-\tilde{\nu}^2}, \qquad 1 - \tilde{\nu}^2 = (1+\nu)\left[1 - \nu - 2(\nu')^2 \frac{E}{E'}\right], \\
b_{12} = \left[\nu + (\nu')^2 \frac{E}{E'}\right] \frac{E}{1-\tilde{\nu}^2}, \qquad b_{13} = b_{23} = E\nu' \frac{1+\nu}{1-\tilde{\nu}^2}, \qquad b_{33} = E' \frac{1-\nu^2}{1-\tilde{\nu}^2}.
\end{gathered}
$$

Нехай пластина знаходиться в умовах осесиметричного навантаження, тобто під дією поверхневих і масових сил, що розподілені симетрично відносно осі Oz (не залежать від координати θ). Будемо вважати, що така ж симетрія дотримується і в крайових умовах на поверхнях $z = \pm 0{,}5\,h$ та $r = a$. Відповідно у формулах (4)–(6) та (21), (28) покладемо $K_2 = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$.

Враховуючи додатково пружні властивості матеріалу та геометрію пластини, зауважимо, що при осесиметричному навантаженні у кожній точці пластини всі переміщення, деформації, напруження, зусилля та моменти також не залежать від координати θ і мають місце рівності

$$u_\theta = 0, \quad e_{r\theta} = e_{\theta z} = 0, \qquad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0, \qquad T_{12} = 0, \qquad M_{12} = 0, \quad N_2 = 0. \qquad (33)$$

Система (5) при осесиметричному навантаженні складається з трьох рівнянь рівноваги:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}(rT_1) - T_2 = -r\big(\langle K_1\rangle + X_2\big), \\
&\frac{d}{dr}(rN_1) = -r\big(\langle K_3\rangle + Z_2\big), \qquad (34) \\
&\frac{d}{dr}\big(rM_1\big) - M_2 = r\big(N_1 - hX_1 - \langle zK_1\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Закон зміни переміщень (11) при осесиметричному навантаженні набирає вигляду

$$u_r = u + z\phi, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_z = w + z\varepsilon + 0{,}5z^2\chi, \qquad (35)$$

де u, ϕ та w, ε, χ — функції, що залежать тільки від змінної r. Згідно з формулами (12) тут деформації e_r, e_θ та e_z змінюються за законом

$$e_r = \varepsilon_r + z\kappa_r, \qquad e_\theta = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta, \qquad e_z = \varepsilon + z\chi. \qquad (36)$$

Параметри деформування серединної площини знайдемо за формулами (13):

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \qquad \kappa_r = \frac{d\phi}{dr}, \qquad \kappa_\theta = \frac{\phi}{r}. \qquad (37)$$

Використовуючи формули (32) і (37), кінцеві співвідношення (28) отримуємо у вигляді

$$\varepsilon = -\frac{E}{E'}\frac{\nu'}{1-\nu}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) + \frac{1}{E'}\left(1 - \frac{2}{1-\nu}(\nu')^2\frac{E}{E'}\right) f_1^{(j)},$$

$$\chi = -\frac{E}{E'}\frac{\nu'}{1-\nu}\left(\frac{d\phi}{dr}+\frac{\phi}{r}\right)+\frac{1}{E'}\left(1-\frac{2}{1-\nu}(\nu')^2\frac{E}{E'}\right)\frac{1}{h}f_2^{(j)}, \tag{38}$$
$$\phi = \frac{1}{G'h}\frac{5+\delta_{j2}}{5}N_1-\frac{d}{dr}\left(w+h^2\frac{5-2\delta_{j2}}{120}\chi\right).$$

За формулами (21), (29) тут маємо

$$\begin{aligned} f_1^{(j)} &= Z_1+\frac{5+\delta_{j2}}{60}\left(\frac{h}{r}\frac{drX_2}{dr}+\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle\right),\\ f_2^{(j)} &= Z_2+\frac{7+3\delta_{j2}}{35}\left(Z_2+\langle K_3\rangle+\frac{h}{r}\frac{drX_1}{dr}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

де δ_{j2} — символ Кронекера, $\delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j=1, \\ 1, & j=2. \end{cases}$ Відповідно до умов мінімізації нев'язок (25), (26) при визначенні деформацій, напружень, зусиль і моментів у формулах (38) слід покласти $j=1$ ($\delta_{j2}=0$) при визначенні переміщень — $j=2$ $(\delta_{j2}=1)$. Згідно з формулами (30), (32) і (38) зусилля та моменти подамо їх виразами через u і ϕ:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}+\frac{\nu'(1+\nu)}{E'}f_1^{(1)}\right),\\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\frac{\nu'(1+\nu)}{E'}f_1^{(1)}\right),\\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{d\phi}{dr}+\nu\frac{\phi}{r}+\frac{\nu'(1+\nu)}{E'h}f_2^{(1)}\right),\\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\phi}{r}+\nu\frac{d\phi}{dr}+\frac{\nu'(1+\nu)}{E'h}f_2^{(1)}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

Підставивши в рівняння (34) вирази зусиль та моментів за формулами (40), прийдемо до системи трьох диференціальних рівнянь відносно невідомих u, N_1 і ϕ:

$$\begin{aligned} &\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)u = F_1,\\ &\frac{d}{dr}\left(rN_1\right) = F_2,\\ &\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)\phi = F_3, \end{aligned} \tag{41}$$

де

$$\begin{aligned} &F_1 = -\frac{\nu'(1+\nu)}{E'}r^2\frac{d}{dr}f_1^{(1)}-\frac{1-\nu^2}{Eh}r^2\big(\langle K_1\rangle+X_2\big), \qquad F_2=-r\big(\langle K_3\rangle+Z_2\big),\\ &F_3 = -\frac{\nu'(1+\nu)}{E'}r^2\frac{d}{dr}\frac{f_2^{(1)}}{h}+\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}r^2\big(N_1-hX_1-\langle zK_1\rangle\big). \end{aligned} \tag{42}$$

Загальний розв'язок системи (41) знайдемо у вигляді

$$u = r^{-1} \int r dr \int r^{-2} F_1 \, dr, \qquad N_1 = r^{-1} \int F_2 \, dr, \qquad \phi = r^{-1} \int r \, dr \int r^{-2} F_3 \, dr. \tag{43}$$

Звідси за формулами (37), (38) і (40) можна визначити всі деформації, зусилля та моменти. Переміщення w знаходимо, інтегруючи при $j = 2$ ($\delta_{j2} = 1$) третє зі співвідношень (38). Отримуємо

$$w = \int \left(\frac{6}{5G'h} N_1 - \phi \right) dr - \frac{1}{40} h^2 \chi. \tag{44}$$

Довільні сталі, що з'являться після інтегрування у формулах (43), (44), знайдемо відповідно до граничних умов на поверхнях пластини.

5. Задача про згин круглої пластини. Нижче, як приклад застосування наближеного методу для порівняння з точним розв'язком, розглянемо задачу про осесиметричне навантаження зазначеної пластини під дією власної ваги і при відсутності поверхневих сил на площинах $z = \pm\, 0{,}5h$. Для зовнішніх навантажень покладемо

$$\begin{gathered} X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = Z_1 = Z_2 = 0, \qquad K_1 = K_2 = 0, \qquad K_3 = -\frac{p}{h}, \\ \langle K_3 \rangle = -p, \qquad \langle z K_3 \rangle = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

де p — вага одиниці площі пластини. На зовнішній циліндричній поверхні пластини приймемо умови жорсткого закріплення:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{46}$$

Відповідно до навантажень (45) за формулами (39), (42) отримаємо

$$\begin{gathered} f_1^{(j)} = 0, \qquad f_2^{(j)} = \frac{7 + 3\delta_{j2}}{35} p \;\Rightarrow\; f_1^{(1)} = f_1^{(2)} = 0, \qquad f_2^{(1)} = \frac{1}{5} p, \qquad f_2^{(2)} = \frac{2}{7} p, \\ F_1 = 0, \qquad F_2 = p, \qquad F_3 = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} r N_1. \end{gathered} \tag{47}$$

Врахувавши значення (47), розв'язки (43) знайдемо у вигляді

$$\begin{gathered} u = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}, \qquad N_1 = p \left(\frac{r}{2} + \frac{C_3}{r} \right), \\ \phi = \frac{p}{D} \left[\frac{r^3}{16} + C_3 \frac{r}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C_4 \frac{r}{2} + \frac{C_5}{r} \right], \end{gathered} \tag{48}$$

де C_i, $i = \overline{1,5}$, — довільні сталі. Маючи розв'язки (48), за співвідношеннями (37), (40), (47) дістанемо

$$\begin{gathered} \varepsilon_r = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}, \qquad \kappa_r = \frac{p}{D} \left[\frac{3\, r^2}{16} + \frac{C_3}{2} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) + \frac{C_4}{2} - \frac{C_5}{r^2} \right], \\ \varepsilon_\theta = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}, \qquad \kappa_\theta = \frac{p}{D} \left[\frac{r^2}{16} + \frac{C_3}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \frac{C_4}{2} + \frac{C_5}{r^2} \right], \\ T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1+\nu}{2} C_1 - \frac{1-\nu}{r^2} C_2 \right), \qquad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1+\nu}{2} C_1 + \frac{1-\nu}{r^2} C_2 \right), \end{gathered} \tag{49}$$

$$M_1 = p\left[\frac{3+\nu}{16}r^2 + C_3\left(\frac{1+\nu}{2}\ln r + \frac{1-\nu}{4}\right) + C_4\frac{1+\nu}{2} - C_5\frac{1-\nu}{r^2} - \frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{h^2}{60}\right],$$

$$M_2 = p\left[\frac{1+3\nu}{16}r^2 + C_3\left(\frac{1+\nu}{2}\ln r - \frac{1-\nu}{4}\right) + C_4\frac{1+\nu}{2} + C_5\frac{1-\nu}{r^2} - \frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{h^2}{60}\right],$$

де

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{50}$$

Для визначення переміщення u_z знайдемо параметри w, ε, χ. Застосовуючи співвідношення (38) і рівності (47) при $j = 2$ ($\delta_{j2} = 1$), отримуємо

$$\varepsilon = -\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}C_1,$$
$$\chi = -\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{p}{D}\left(\frac{r^2}{4} + C_3\ln r + C_4\right) - \frac{2}{7}\frac{p}{E'h}\left(1 - \frac{2}{1-\nu}(\nu')^2\frac{E}{E'}\right). \tag{51}$$

З рівності (44), підставляючи вирази для N_1, ϕ і χ за формулами (48), (51) і інтегруючи, маємо

$$w = \frac{p}{D}\left[\frac{1}{5}\frac{h^2}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right)\left(\frac{r^2}{4} + C_3\ln r\right) - \frac{r^4}{64} - C_3\frac{r^2}{4}(\ln r - 1) - C_4\frac{r^2}{4} - C_5\ln r - C_6\right]. \tag{52}$$

Задовольняючи граничні умови (46) і вимагаючи, щоб при $r = 0$ значення u, N_1 і ϕ були обмеженими, знаходимо

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = 0, \qquad C_4 = \frac{1}{5}\frac{h^2}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right) - \frac{a^2}{8}, \qquad C_6 = \frac{a^4}{64}. \tag{53}$$

Звідси, спираючись на формули (33), (35) і (48)–(53), для переміщень та інтегральних характеристик напруженого стану пластини маємо

$$u_r = u + z\phi, \qquad u = 0, \qquad \phi = \frac{pr}{D}\left[\frac{r^2 - a^2}{16} + \frac{1}{10}\frac{h^2}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right)\right], \qquad u_\theta = 0,$$
$$u_z = w + z\varepsilon + \frac{z^2}{2}\chi, \qquad w = -\frac{p}{64D}(a^2 - r^2)^2, \qquad \varepsilon = 0,$$
$$\chi = -\frac{p}{D}\frac{E}{E'}\frac{1}{1-\nu}\left[\nu'\frac{2r^2 - a^2}{8} + \frac{h^2}{5}\frac{\nu'}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{42}\frac{1}{1+\nu}\left(1 - \frac{2}{1-\nu}(\nu')^2\frac{E}{E'}\right)\right],$$
$$T_1 = T_2 = N_2 = T_{12} = 0, \tag{54}$$
$$M_1 = p\left[\frac{3+\nu}{16}r^2 - \frac{1+\nu}{16}a^2 + \frac{h^2}{10}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right) - \frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{h^2}{60}\right],$$
$$M_2 = p\left[\frac{1+3\nu}{16}r^2 - \frac{1+\nu}{16}a^2 + + \frac{h^2}{10}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\nu'}{8}\frac{E}{E'} + \frac{G}{G'}\right) - \frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{h^2}{60}\right],$$

$$M_{12}=0, \qquad N_1=\frac{pr}{2}.$$

За матеріалами роботи [6] точний розв'язок цієї задачі (методами теорії товстих пластин) для пластини з ізотропного матеріалу можна знайти у вигляді

$$u_r=\frac{p}{D}zr\left[\frac{r^2-a^2}{16}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{1-\nu}+\frac{1}{12}\frac{2-\nu}{1-\nu}z^2\right], \qquad u_\theta=0,$$

$$u_z=w+\frac{p}{D}z^2\left[\frac{\nu}{16}\frac{a^2-2r^2}{1-\nu}-\frac{1+4\nu}{(1-\nu)^2}\frac{h^2}{48}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{z^2}{24}\right], \qquad w=-\frac{p}{D}\frac{\left(a^2-r^2\right)^2}{64},$$

$$T_1=T_2=N_2=T_{12}=0, \qquad N_1=\frac{pr}{2}, \tag{55}$$

$$M_1=p\left[\frac{(3+\nu)r^2-(1+\nu)a^2}{16}+\frac{h^2}{240}\frac{24+23\nu+3\nu^2}{1-\nu}\right],$$

$$M_2=p\left[\frac{(1+3\nu)r^2-(1+\nu)a^2}{16}+\frac{h^2}{240}\frac{24+23\nu+3\nu^2}{1-\nu}\right], \qquad M_{12}=0.$$

Поклавши у формулах (54) $\nu'=\nu,\ E'=E,\ G'=G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, отримаємо наближений розв'язок відповідної задачі для пластини з ізотропного матеріалу за методом пом'якшення нев'язок:

$$u_r=\frac{p}{D}zr\left[\frac{r^2-a^2}{16}+\frac{h^2}{80}\frac{8+\nu}{1-\nu}\right], \qquad u_\theta=0,$$

$$u_z=w+\frac{p}{D}z^2\left[\frac{\nu}{16}\frac{a^2-2r^2}{1-\nu}-\frac{h^2}{(1-\nu)^2}\frac{20+128\nu+21\nu^2}{1680}\right], \qquad w=-\frac{p}{D}\frac{\left(a^2-r^2\right)^2}{64},$$

$$T_1=T_2=N_2=T_{12}=0, \qquad N_1=\frac{pr}{2}, \tag{56}$$

$$M_1=p\left[\frac{(3+\nu)r^2-(1+\nu)a^2}{16}+\frac{h^2}{240}\frac{24+23\nu+3\nu^2}{1-\nu}\right],$$

$$M_2=p\left[\frac{(1+3\nu)r^2-(1+\nu)a^2}{16}+\frac{h^2}{240}\frac{24+23\nu+3\nu^2}{1-\nu}\right], \qquad M_{12}=0.$$

Для порівняння точного та наближеного розв'язків знайдемо середню квадратичну апроксимацію розв'язку (55) відповідно до закону (35). Середні квадратичні апроксимації переміщень u_r, u_z по змінній z на відрізку $[-0{,}5h; 0{,}5h]$ отримаємо у вигляді

$$\begin{gathered} u_r=\frac{p}{D}zr\left[\frac{r^2-a^2}{16}+\frac{h^2}{80}\frac{8+\nu}{1-\nu}\right], \\ u_z=-\frac{1}{64}\frac{p}{D}\left[\left(a^2-r^2\right)^2+\frac{h^4}{70}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right]+ \\ +\frac{p}{D}z^2\left[\frac{\nu}{16}\frac{a^2-2r^2}{1-\nu}-\frac{h^2}{(1-\nu)^2}\frac{20+140\nu+15\nu^2}{1680}\right]. \end{gathered} \tag{57}$$

Співставляючи розв'язки (55) та (56), переконуємось, що:

1) відповідні вирази зусиль і моментів у точному та наближеному розв'язках збігаються;

2) за формулою (57) середня квадратична апроксимація переміщення u_r у точному розв'язку збігається з його виразом у наближеному розв'язку, а середня квадратична апроксимація переміщення u_z у точному розв'язку з похибкою порядку порядку h^2/a^2 — з його виразом у наближеному розв'язку (56).

Порівнявши метод пом'якшення з іншими наближеними методами, як і в роботі [12], зауважимо, що при розрахунках за теорією тонких пластин у виразах для моментів M_1, M_2 на відміну від розв'язку (55) вдається врахувати лише перші доданки:

$$M_1 = p\frac{(3+\nu)r^2 - (1+\nu)a^2}{16}, \qquad M_2 = p\frac{(1+3\nu)r^2 - (1+\nu)a^2}{16}.$$

При розв'язуванні за уточненою теорією [1] можна отримати точніші значення:

$$M_1 = p\left[\frac{(3+\nu)r^2 - (1+\nu)a^2}{16} + \frac{h^2}{10}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right],$$

$$M_2 = p\left[\frac{(1+3\nu)r^2 - (1+\nu)a^2}{16} + \frac{h^2}{10}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right],$$

але на відміну від методу пом'якшення в основу цієї теорії, як і теорії тонких пластин, закладено припущення про те, що переміщення в напрямку нормалі до серединної площини пластини не залежать від координати z. З цієї причини при знаходженні переміщення u_z за цими теоріями у розв'язку (55) вдається врахувати лише перший доданок w.

6. Висновки. В роботі розробляється наближений аналітичний метод розрахунку деформовано-напруженого стану анізотропних пластин. Метод виходить лише з можливості апроксимації переміщень по товщині пластини, не потребує застосування традиційних гіпотез [1, 2] теорії тонких пластин. Нами прогнозується, що метод дозволяє знаходити середні квадратичні наближення точних розв'язків по товщині пластини з похибкою порядку h^2/R^2 порівняно з одиницею.

Література

1. *Timoshenko S. P.* History of strength of matherials. – New York: Dover, 1983. – 452 p.
2. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // Appl. Mech. Revs. – 1985. – **38**, № 11. – P. 1453 – 1464.
3. *Jemielita G.* On the winding paths of the theory of plates // Mech. Teor. i Stosow. – 1993. – **2**, № 31. – P. 317 – 327.
4. *Васильев В. В.* Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. АН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46 – 58.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
6. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – Т. 1– 354 с.
7. *Иванов Г. В.* Теория пластин и оболочек. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980. – 84 с.
8. *Палий О. М.* Вариант прикладной теории толстых оболочек // Изв. АН. Механика твердого тела. – 2014. – № 2. – С. 87 – 97.
9. *Кільчинський О. О., Скрипка В. І.* Про деформацію пластин, податливих на поперечні зсуви та стискання // Пр. міжнар. конф. „Питання оптимізації обчислень (ПОО XV)". – Київ, 2013. – С. 116 – 117.
10. *Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В.* Уточнений метод пом'якшення нев'язок для ортотропної пластини // Зб. наук. праць ДЕТУТ. Сер. Транспортні системи і технології. – 2014. – № 24. — С. 163 – 172.
11. *Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В.* Уточнений метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини, податливої на поперечні зсуви та стискання // Матер. XV міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014 р). – С. 142 – 145.
12. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.

Одержано 06.06.17