УДК 517. 927.6 +517.984.52

Я. О. Баранецький, П. І. Каленюк, Л. І. Коляса (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ НЕЛОКАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

We study spectral properties of an essentially nonself-adjoint problem generated by nonlocal multipoint conditions for the operator of differentiation of order $2n$ and analyze the cases of regular and irregular Birkhoff boundary conditions. A system of root functions of the problem and elements of biorthogonal systems are constructed. We also establish sufficient conditions under which these systems are complete and form a Riesz basis under certain additional assumptions.

Исследованы спектральные свойства существенно несамосопряженной задачи, порожденной нелокальными многоточечными условиями, для оператора дифференцирования четного порядка. Изучены случаи регулярных и нерегулярных по Биркгофу двухточечных краевых условий. Построена система корневых функций исследуемой задачи и элементы биортогональной системы. Получены достаточные условия, при которых эти системы являются полными, и условия, при которых они образуют базис Рисса.

1. Вступ. Властивості повноти та базисності (умовної, безумовної, за Ріссом) системи кореневих функцій крайової задачі є важливими при побудові розв'язків багатьох нестаціонарних задач методом Фур'є або його аналогами.

Для звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі базисність за Ріссом для крайових задач, породжених регулярними за Біркгофом крайовими умовами, встановлено в [1, 2]. У випадку, коли крайові умови регулярні, але не посилено регулярні, у статті [3] було доведено, що система кореневих підпросторів, які відповідають кратним власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса у просторі $L_2(0,1)$ із підпросторів. У роботах [4, 5] було запропоновано поняття зведеної системи кореневих функцій задачі, яка утворює базис Рісса у просторі $L_2(0,1)$, а також поняття суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченне число приєднаних) і вивчено властивості таких операторів. Задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами досліджувались у статтях [6, 8]. У роботі [9] вивчались спектральні властивості задач з умовами періодичності. Задачі з інтегральними та інтегро-диференціальними крайовими умовами розглядались у [10, 11]. Узагальнення та уточнення поняття регулярних за Біркгофом крайових умов досліджувались у [12, 13]. Залежність розв'язків крайових задач від параметра аналізувалась у роботах [14, 15]. Властивості суттєво несамоспряжених операторів, визначених в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі, вивчались у роботі [16]. Опишемо коротко структуру статті. У пункті 2 наведено основні позначення та постановку багатоточкової задачі. Пункт 3 присвячено дослідженню періодичної задачі, яка отримується при певних припущеннях на параметри як частковий випадок багатоточкової задачі. У пункті 4 вивчаються спектральні властивості оператора нелокальної задачі, крайові умови якої є збуренням спеціального вигляду умов періодичності. У пункті 5 розглядається множина ізоспектральних операторів, система кореневих функцій яких визначається послідовністю дійсних чисел. Вивчено властивості операторів, які відображають системи кореневих функцій одного елемента цієї множини в інший. Пункт 6 присвячено дослідженню властивостей оператора, породженого нелокальною задачею, крайові умови якої є двоточковими збуреннями однієї з умов періодичності. В пункті 7 сформульовано та встановлено основні результати роботи. У пункті 8 наведено висновки щодо отриманих результатів.

2. Основні позначення та постановка задачі. Нехай $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ — оператор інволюції, $Iy(x) \equiv y(1-x),\ H_j \equiv \big\{y \in L_2(0,1) : Iy = (-1)^j y\big\},\ j = 0,1,\ B(L_2(0,1))$ — множина лінійних неперервних операторів, $L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ W_2^{2n}(0,1) \equiv \big\{y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in \in AC[0,1], y^{(2n)} \in L_2(0,1), m = 1,2,\ldots,2n{-}1\big\},\ \big(y,u; W_2^{2n}(0,1)\big) \equiv \sum_{k=0}^{2n} \big(y^{(k)}, u^{(k)}; L_2(0,1)\big)$, $\big\|y; W_2^{2n}(0,1)\big\|^2 \equiv (y,y; W_2^{2n}(0,1)),\ W^*(0,1)$ — простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1),\ W_j^*(0,1) = \big\{l \in W^*(0,1) : ly = 0, y \in H_{1-j} \cap W_2^{2n}(0,1)\big\},\ j = 0,1.$

У роботі вивчається багатоточкова задача

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$l_p y \equiv y^{(2p-1)}(0) - y^{(2p-1)}(1) = 0, \quad p = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

$$l_{n+p} y \equiv y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q,s} \Big(y^{(2q-2)}(x_s) + y^{(2q-2)}(1-x_s)\Big) = 0, \tag{3}$$

$$b_{p,q,s} \in \mathbb{R}, \quad q = 0,1,\ldots,k_p, \quad k_p \leq n, \quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_r < 1, \quad p = 1,2,\ldots,n.$$

3. Допоміжна самоспряжена задача з періодичними умовами. Розглянемо частинний випадок задачі (1)–(3), коли $b_{p,q,s} = 0,\ q = 0,1,\ldots,k_p,\ p = 1,2,\ldots,n,\ s = 0,1,\ldots,r$:

$$(-1)^{2n} y^{(2n)} = \lambda y, \qquad x \in (0,1), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

$$l_{0,p} y \equiv y^{(2p-1)}(0) - y^{(2p-1)}(1) = 0, \quad p = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

$$l_{0,n+p} y \equiv y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1) = 0, \quad p = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Умови періодичності (5), (6) занумеровано так, що справджуються включення $l_{0,p} \in W_0^*(0,1)$, $l_{0,n+p} \in W_1^*(0,1),\ p = 1,2,\ldots,n$.

Нехай A_0 — оператор задачі (4)–(6), $A_0 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x),\ y \in D(A_0) \subset W_2^{2n}(0,1)$, $D(A_0) \equiv \big\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{0,p} y = 0,\ p = 1,2,\ldots,2n\big\}$.

Власні числа та власні функції самоспряженого оператора A_0 визначимо співвідношеннями

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_m \equiv 4\pi^{2n} m^{2n}, \qquad v_0(x) = 1, \qquad v_{2m}(x) \equiv \sqrt{2}\cos 2\pi m x,$$
$$v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2}\sin 2\pi m x, \quad m = 1,2,\ldots.$$

***Зауваження* 1.** Системи функцій $V_0(A_0) \equiv \big\{v_{2m}(x) : m = 0,1,\ldots\big\} \subset H_0,\ V_1(A_0) \equiv \equiv \big\{v_{2m-1}(x) : m = 1,2,\ldots\big\} \subset H_1$ утворюють ортонормовані базиси просторів H_0 та H_1 відповідно.

Нехай ω_s — розв'язки рівняння $\omega^{2n} = (-1)^n$ — занумеровано так, що $\omega_1 = i,\ \omega_j = = \omega_1 e^{i\frac{1}{n}\pi(j-1)},\ j = 1,\ldots,n$.

Розглянемо функції

$$y_{1,1}(x,\rho_m) \equiv \frac{1}{2}(1-2x)\cos\rho_m x,\ y_{1,q}(x,\rho_m) \equiv \frac{1}{2}(1-e^{w_q\rho_m})^{-1}y_q(x,\rho_m),$$
$$m=1,2,\ldots,\quad q=2,3,\ldots,n, \tag{7}$$

та визначимо рядки квадратної матриці $\mathrm{B}_0(x,\rho_m)$ порядку n так: p-й рядок визначається елементами системи (7): $\beta^0_{p,q}(x,\rho_m) \equiv y_{1,q}(x,\rho_m)$, інші рядки визначаються рівностями $\beta^0_{j,q}(x,\rho_m) \equiv (\omega_q)^{2j-2}$ при $j=1,2,\ldots,n,\ j\neq p,\ q=1,2,\ldots,n$.

Визначник матриці $\mathrm{B}_0(x,\rho_m)$ позначимо через $\Delta_p(x,\rho_m)$.

Підстановкою в умови (5), (6) можна переконатися, що

$$l_{0,r}\Delta_p=0,\quad r\neq n+p,\quad l_{0,n+p}\Delta_p=W_n(\rho_m)^{2p-2},\qquad r=1,2,\ldots,2n,\quad p=1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

де W_n — визначник Вандермонда, побудований за числами $-1,(\omega_2)^2,\ldots,(\omega_n)^2$.

Визначимо функції

$$y_{2,p}(x,\rho_m) \equiv W_n^{-1}\Delta_p(x,\rho_m),\qquad p=1,2,\ldots,n,\quad m=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Враховуючи співвідношення (8), отримуємо

$$l_{0,r}y_{2,p}=0,\quad r\neq n+p,\qquad l_{0,n+p}y_{2,p}=(\rho_m)^{2p-2},\qquad r=1,2,\ldots,2n,\quad p=1,2,\ldots,n.$$

Аналогічно, розглянемо функції

$$y_{1,n+1}(x,\rho_m) \equiv \frac{1}{2}(1-2x)\sin\rho_m x,\qquad y_{1,n+q}(x,\rho_m) \equiv \frac{1}{2}\left(1+e^{w_q\rho_m}\right)^{-1}y_{n+q}(x,\rho_m), \tag{10}$$
$$q=2,3,\ldots,n,$$

та визначимо квадратну матрицю $\mathrm{B}_1(x,\rho_m)$ порядку n, рядки якої задано так: k-й рядок визначається елементами системи (10): $\beta^1_{k,q}(x,\rho_m) \equiv y_{1,n+q}(x,\rho_m)$, інші рядки визначаються при $j\neq k,\ j=1,2,\ldots,n$, рівностями $\beta^1_{j,q}(x,\rho_m) \equiv (\omega_q)^{2j-1},\ q=1,2,\ldots,n$.

Визначник матриці $\mathrm{B}_1(x,\rho_m)$ позначимо через $\Delta_{n+k}(x,\rho_m)$.

Підстановкою в умови (5), (6) можна переконатися, що

$$l_{0,r}\Delta_{n+k}(x,\rho_m)=0,\quad r\neq n+k,\qquad l_{0,k}\Delta_{n+k}(x,\rho_m)=h(i)W_n(\rho_m)^{2k-1},$$
$$h(i)=(-i)^{n-1}i,\quad r=1,2,\ldots,2n,\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

Визначимо функції

$$y_{2,n+k}(x,\rho_m) \equiv \Delta_{n+k}(x,\rho_m)h^{-1}(i)W_n^{-1}(\rho_m).$$

Враховуючи співвідношення (11), отримуємо

$$l_{0,r}y_{2,n+k}=0,\quad r\neq k,\qquad l_{0,k}y_{2,n+k}=(\rho_m)^{2k-1},$$
$$r=1,2,\ldots,2n,\quad k=1,2,\ldots,n,\quad m=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Зауваження 2. Із формул (7), (9), (11), (12) та означення функцій $\Delta_k(x,\rho_m)$ маємо нерівності $\left\|y_{2,k}(x,\rho_m);L_2(0,1)\right\| \le K_1<\infty,\ k=1,2,\ldots,2n,\ m=1,2,\ldots.$

Нехай W_{n-1} — визначник Вандермонда, побудований за числами $(\omega_2)^2, (\omega_3)^2, \ldots, (\omega_n)^2$.

Враховуючи, що $\left\| y_{2,k}(x,\rho_m) - W_{n-1} y_{1,n+1}(x,\rho_m); L_2(0{,}1) \right\| \to 0$ при $m \to \infty$, одержуємо $\left\| y_{2,k}(x,\rho_m); L_2(0{,}1) \right\| \geq K_2$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогічну оцінку знизу отримуємо для функцій $y_{2,n+k}(x,\rho_m),\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Отже,

$$K_2 \leq \left\| y_{2,k}(x,\rho_m); L_2(0{,}1) \right\| \leq K_1 < \infty, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

4. Несамоспряжені крайові задачі. Розглянемо при будь-яких $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{R}$ для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$l_{1,j} y \equiv y^{(2j-1)}(0) - y^{(2j-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$l_{1,n+j} y \equiv y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad j \neq p, \tag{15}$$

$$l_{1,n+p} y \equiv y^{(2p-1)}(0) - y^{(2p-1)}(1) + l^1_{p,b} y = 0, \tag{16}$$

де

$$l^1_{p,b} y \equiv b \left(y^{(2p-2)}(0) + y^{(2p-2)}(1) \right), \quad b \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Нехай $A_1 \equiv A_{p,b}$ — оператор задачі (1), (14)–(17), $A_1 y(x) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x),\ y \in D(A_1)$, $D(A_1) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0{,}1) \colon l_{1,j} y = 0,\ j = 1, 2, \ldots, 2n \right\}$, $V(A_1)$ — система кореневих функцій оператора A_1.

Теорема 1. *Для будь-яких фіксованих $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{R}$ спектри операторів A_0, A_1 збігаються між собою та система функцій $V(A_1)$ утворює базис Рісса простору $L_2(0{,}1)$.*

Доведення. Покажемо, що власні значення операторів A_0 та A_1 збігаються.

Визначимо фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) за допомогою співвідношень $y_j(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} + e^{\omega_j \rho (1-x)} \in H_0,\ y_{n+j}(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} - e^{\omega_j \rho (1-x)} \in H_1,\ |\arg\rho| \leq \dfrac{\pi}{2n},\ \lambda = (-1)^n \rho^{2n}$.

Враховуючи, що $l_{0,p} y_{0,n+j}(x,\rho) = 0$, отримуємо рівняння для визначення власних значень операторів A_1, A_0 відповідно:

$$\det \begin{pmatrix} l_{1,1} y_1(x,\rho) & \ldots & l_{1,1} y_{2n}(x,\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1,2n} y_1(x,\rho) & \ldots & l_{1,2n} y_{2n}(x,\rho) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} l_{0,1} y_1(x,\rho) & \ldots & l_{0,1} y_{2n}(x,\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{0,2n} y_1(x,\rho) & \ldots & l_{0,2n} y_{2n}(x,\rho) \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, власні значення операторів A_0, A_1 збігаються.

Визначимо елементи системи $V(A_1)$.

Можна переконатися, що $v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2} \sin 2\pi m x,\ v_{2m-1}(x) \in D(A_1),\ A_1 v_{2m-1}(x) = \lambda_m v_{2m-1}(x),\ m = 1, 2, \ldots$. Тому

$$v_{2m-1}(x, A_1) \equiv v_{2m-1}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi m x, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$v_0(x, A_1) \equiv \begin{cases} 1 + b\,(2x - 1) & \text{для} \quad p = 1, \\ 1 & \text{для} \quad p > 1, \end{cases} \tag{19}$$

де $p = 1, 2, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R}$.

Кореневі функції оператора A_1 визначимо у вигляді суми

$$v_{2m}(x, A_1) \equiv v_{2m}(x) - b\sqrt{2}y_{2,p}(x, \rho_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Отже, оператор A_1 має систему $V(A_{p,b})$ функцій (18)–(20), кореневих у сенсі рівностей

$$A_1 v_{2m}(x, A_1) = \lambda_m v_{2m}(x, A_1) + \xi_{1,m} v_{2m-1}(x, A_1),$$
$$\xi_{1,m} = 2\sqrt{2}b(-1)^n n(\rho_m)^{2n-1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$A_1 v_{2m-1}(x, A_1) = \lambda_m v_{2m-1}(x, A_1), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Розглянемо задачу, яка є спряженою до крайової задачі (1), (14)–(17):

$$L_0 z \equiv (-1)^n z^{(2n)} = f, \quad x \in (0,1), \tag{21}$$

$$l_j^2 z \equiv z^{(2j-1)}(0) - z^{(2j-1)}(1) = 0, \qquad j \neq n - p + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

$$l_{n-p+1}^2 z \equiv \Big(z^{(2n-2p+1)}(0) - z^{(2n-2p+1)}(1)\Big) + b\Big(z^{(2n-2p+1)}(0) + z^{(2n-2p+1)}(1)\Big) = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

$$l_{n+j}^2 z \equiv z^{(2j-2)}(0) - z^{(2j-2)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Нехай A_1^* — спряжений оператор до A_1, породжений задачею (21)–(24):

$$A_1^* z(x) \equiv (-1)^n z^{(2n)}(x), \quad y \in D(A_1^*), \quad D(A_1^*) \equiv \big\{z \in W_2^{2n}(0,1) : l_j^2 z = 0, j = 1, 2, \ldots, 2n\big\},$$

$W(A_1^*)$ — система кореневих функцій оператора A_1^*. Оператор A_1^* має функції

$$w_0(x, A_1^*) \equiv v_0(x),$$
$$w_{2m}(x, A_1^*) \equiv v_{2m}(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$w_{2m-1}(x, A_1^*) \equiv v_{2m-1}(x) + (-1)^{p+1}\sqrt{2}b y_{2,n-p+1}(x, \rho_m),$$
$$m = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

які є кореневими в сенсі рівностей

$$A_1^* w_{2m-1}(x, A_1^*) = \lambda_m w_{2m-1}(x, A_1^*) + \xi_m w_{2m}(x, A_1^*), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$A_1^* w_{2m}(x, A_1^*) = \lambda_m w_{2m}(x, A_1^*), \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Крайові умови (14)–(17) є регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом [18]. За теоремою О. О. Шкалікова [3] система $V_m(A_1)$ кореневих підпросторів оператора A_1 є базисом Рісса із підпросторів [17] у просторі $L_2(0,1)$. Покажемо, що $V(A_1)$ та $W(A_1^*)$ — системи Бесселя, тобто для будь-якої функції $h \in L_2(0,1)$ справджуються нерівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(h, \nu_k(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \leq K_3 \big\|h; L_2(0,1)\big\|^2, \quad 0 < K_3 < \infty, \tag{25}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(h, w_k(x, A_1^*); L_2(0,1)\big)^2 \leq K_4 \big\|h; L_2(0,1)\big\|^2, \quad 0 < K_4 < \infty. \tag{26}$$

Розглянемо систему функцій $V^1(A_1)$:

$$\nu_0^1(x, A_1) \equiv \nu_0(x, A_1), \qquad \nu_{2m-1}^1(x, A_1) \equiv \sqrt{2}\sin 2\pi m x, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\nu_{2m}^1(x, A_1) \equiv \nu_{2m}(x, A_1) - \big(\nu_{2m}(x, A_1), \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)\nu_{2m-1}^1(x, A_1), \tag{27}$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

Система функцій, утворена нормуванням системи $V^1(A_1)$, є об'єднанням сукупності ортонормованих базисів кореневих підпросторів $V_m(A_1)$ оператора A_1, $m = 1, 2, \ldots$. Тому вона є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$ [17, с. 414, 415].

Отже, для будь-якої функції $h \in L_2(0,1)$ справджується нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(h, \nu_k^1(x, A_1); L_2(0,1)\big) \leq K_5 \big\|h; L_2(0,1)\big\|^2, \quad 0 < K_5 < \infty.$$

Із формули (27) маємо

$$\nu_{2m}(x, A_1) \equiv \nu_{2m}^1(x, A_1) + \big(\nu_{2m}(x, A_1), \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)\nu_{2m-1}^1(x, A_1). \tag{28}$$

Враховуючи нерівність Коші та рівність (28), отримуємо оцінки

$$\big(h, \nu_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \leq 2\big(h, \nu_{2m}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 +$$

$$+2\big(\nu_{2m}(x, A_1), \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \big(h, \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2,$$

$$\big(h, \nu_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \leq 2\big(h, \nu_{2m}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 +$$

$$+2\big\|\nu_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\big\|^2 \big(h, \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2.$$

Із співвідношень (13), (20) одержуємо нерівність

$$\big\|\nu_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\big\|^2 \leq K_6 |b|^2, \quad 0 < K_6 < \infty.$$

Тому

$$\big(h, \nu_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \leq 2\big(h, \nu_{2m}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 +$$

$$+K_6 |b|^2 \big(h, \nu_{2m-1}^1(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2.$$

Підсумовуючи отримані нерівності при $m = 1, 2, \ldots$ та враховуючи рівності (27), маємо оцінку (25) при

$$K_3 = 1 + 2K_2\big(K_6|b|^2\big).$$

При цьому враховуємо, що система функцій $W^1\,(A_1^*)$, елементи якої отримуються аналогічною ортогоналізацією елементів $W\,(A_1^*)$, є базисом Рісса в $L_2(0,1)$. Тому з теореми Н. К. Барі [17] отримуємо твердження теореми.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 3.** Системи $V(A_1)$ та $W(A_1^*)$ є біортогональними в сенсі рівностей

$$\big(w_{2m-\alpha}(x, A_1^*), v_{2k-\beta}(x, A_1); L_2(0,1)\big) = \delta_{m,k}\delta_{\alpha,\beta}, \qquad m, k = 0, 1, \ldots, \quad \alpha, \beta = 0, 1.$$

5. Оператори перетворення. Розглянемо для довільного $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ оператор $B_{0,p}$, власні значення якого збігаються з власними значеннями оператора A_0, а кореневі функції визначаються співвідношеннями

$$v_{2m-1}(x, B_{0,p}) \equiv v_{2m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$v_{2m}(x, B_{0,p}) \equiv v_{2m}(x) + y_{2,p}(x, \rho_{2m}), \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

***Зауваження* 4.** Оператор $B_{0,p}$ є частковим випадком оператора A_1 при $b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тому, згідно з теоремою 1, система $V(B_{0,p})$ кореневих функцій цього оператора є базисом Рісса у просторі $L_2(0,1)$.

Розглянемо для довільного $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ оператор $B_p \colon L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, власні значення якого збігаються з власними значеннями оператора A_0, а кореневі функції визначаються співвідношеннями

$$\begin{gathered} v_{2m-1}(x, B_p) \equiv v_{2m-1}(x), \\ v_{2m}(x, B_p) \equiv v_{2m}(x) + v^0_{2m}(x, B_p), \\ v_{0,2m}(x, B_p) \equiv c_m(B_p) y_{2,p}(x, \rho_{2m}), \qquad c_m(B_p) \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{29}$$

Оператор, який відображає $V(A_0)$ у систему $V(B_p)$ кореневих функцій оператора B_p, позначимо через $R(B_p)$.

***Зауваження* 5.** Система функцій $V(B_p)$ є повною у просторі $L_2(0,1)$.

Тому оператор $R(B_p)$ має щільну в просторі $L_2(0,1)$ область визначення.

Нехай $G(B_{0,p})$ — множина операторів $R(B_p)$, для яких елементи системи $V(B_p)$ визначаються формулами (29), $G_c(B_{0,p}) \equiv O(A_p) \cap B\big(L_2(0,1)\big)$.

Аналогічно, за допомогою кореневих функцій оператора A^*_p визначається множина $G^*(B_{0,p}) \equiv \big\{R^*(B_p) = E - S^*(B_p), R(B_p) \in G(B_{0,p})\big\}$.

Теорема 2. *Нехай* $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Система функцій* $V(B_p)$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$ *тоді і лише тоді, коли послідовність* $c_m(B_p)$ *є обмеженою*: $\big|c_m(B_p)\big| \le K < \infty$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$, тобто $R(B_p) \in B\big(L_2(0,1)\big)$, $S(B_p) = E - R(B_p) \in B(L_2(0,1))$. Із означення оператора B_p маємо $S(x, B_p) v_{2m}(x) = c_m(B_p) y_{2,p}(x, \rho_{2m})$, $m = 1, 2, \ldots$.

Тому, враховучи оцінку (13), отримуємо

$$\big|c_m(B_p)\big| \le \big\|S_p(x, B_p); B(L_2(0,1))\big\| \big\|y_{2,n+p}(x, \rho_{2m}); L_2(0,1)\big\|^{-1} \le K_7 < \infty, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Достатність. Повнота та мінімальність системи $V(B_p)$ у просторі $L_2(0,1)$ випливає із зауваження 5 та існування оператора $R^*(B_p) \in O^*(A_p)$.

Виберемо $f \in L_2(0,1)$, $f = f_0 + f_1$, $f_j \in H_j$, $j = 0, 1$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k v_k(x) \in L_2(0,1), \qquad \big\|f; L_2(0,1)\big\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k)^2 < \infty.$$

Нехай

$$h_p = S(B_p)f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k c_k(B_p) v_k(x, B_p) \in L_2(0{,}1),$$

$$h_p = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{2k-1} v_{2k-1}(x) + f_{2k} c_k(B_p)\big(v_{2k}(x, A_p) - v_{2k}(x)\big)\big) \in L_2(0{,}1),$$

$$\big\|S(B_p)f; L_2(0{,}1)\big\|^2 \le K_8 \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)^2, \qquad K_8 = 3\left(1 + K^2 + \ K^2 \big\|R(A_p); B(L_2(0{,}1))\big\|^2\right).$$

Отже, $\big\|S(B_p); B(L_2(0{,}1))\big\|^2 \le K_8$.

Враховуючи рівності $R(B_p) = E + S(B_p),\ R^{-1}(B_p) = E - S(B_p)$, маємо

$$\big\|R(B_p); B(L_2(0{,}1))\big\| \le 2 + 2K_8, \qquad \big\|R^{-1}(B_p); B(L_2(0{,}1))\big\| \le 2 + 2K_8.$$

Застосовуючи теорему Н. К. Барі [17], отримуємо для системи $V(A_p)$ твердження теореми 2.

***Наслідок* 1.** $O_c(A_p) = \big\{G \in O(A_p) \colon |c_m(G)| \le K_G < \infty,\ m = 0, 1, \ldots\big\}$.

Нехай U — множина систем функцій $(u_m)_{m=1}^{\infty}$, які є повними та мінімальними у просторі $L_2(0{,}1)$, $Q_0(I)$ — множина операторів $R = E + S \colon U \to U$ таких, що $S \colon H_0 \to H_1$, $S \colon H_1 \to 0$.

Через $Q_{0,c}(I)$ позначимо всі обмежені оператори з множини $Q_0(I)$. З властивості $S^2 = 0$ маємо $R = \exp S$.

На множині $Q_0(I)$ можна визначити операцію множення $R_1 R_2 \equiv (E + S_1)(E + S_2) = E + S_1 + S_2$. Для кожного оператора $R \in Q_0(I)$ існує єдиний обернений $R^{-1} = E - S$, $R = (E + S)(E - S) = E$.

Множина $Q_0(I)$ є абелевою групою, яка містить абелеву підгрупу $Q_{0,c}(I)$.

Тому для будь-яких операторів $R_j = E + S_j \in Q(A_0)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $d \in \mathbb{N}$, справджується рівність

$$\prod_{j=1}^{d} R_j \equiv \prod_{j=1}^{d} (E + S_j) = E + \sum_{j=1}^{d} S_j, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Із зауваження 5, означення оператора B_p та множини $G(B_{0,p})$ випливають включення

$$G(B_{0,p}) \subset Q_0(I), \qquad G_c(B_{0,p}) \subset Q_{0,c}(I).$$

Аналогічно можна визначити множину

$$Q_1(I) \equiv \big\{R \colon U \to U, R = E + S, S \colon H_1 \to H_0, S \colon H_0 \to 0\big\}.$$

При цьому правильними є співвідношення $O(A_p^*) \subset Q_1(I)$, $O_c(A_p^*) \subset Q_{1,c}(I)$.

6. Крайова задача. ***6.1.*** Для диференціального рівняння (1) при будь-яких $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{R}$ розглянемо крайову задачу з умовами

$$l_{2,j} y \equiv y^{(2j-1)}(0) - y^{(2j-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

$$l_{2,n+j} y \equiv y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad j \ne p, \tag{31}$$

$$l_{2,n+p} y \equiv y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1) y + l_p^2 y = 0, \tag{32}$$

де

$$l_p^2 y \equiv \sum_{q=1}^{k_p} b_{q,p} \left(y^{(2q-2)}(0) + y^{(2q-2)}(1) \right) = 0, \qquad b_{q,p} \in \mathbb{R}, \quad k_p \le n, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Нехай $A_2 \equiv A_{2,p,b}$ — оператор задачі (1), (30)–(32),

$$A_2 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(A_{p2}), \qquad D(A_2) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0{,}1) : l_{2,j} y = 0, \ j = 1, 2, \ldots, 2n \right\},$$

$V(A_2)$ — система кореневих функцій оператора A_2.

Теорема 3. *Нехай $b_{p,q} \in \mathbb{R}$, $0 \le q \le k_p \le n$, $1 \le p \le n$. Тоді спектри операторів A_0, A_2 збігаються між собою і система функцій $V(A_2)$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0{,}1)$.*

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що

$$v_{2m-1}(x) \in D(A_2), \qquad A_2 v_{2m-1}(x) = \lambda_m v_{2m-1}(x).$$

Отже,

$$v_{2m-1}(x, A_2) \equiv v_{2m-1}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi m x, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

$$v_0(x, A_2) \equiv \begin{cases} 1 + b_{p,1}(2x - 1) & \text{для} \quad p = 1, \\ 1 & \text{для} \quad p > 1. \end{cases} \tag{34}$$

Кореневі функції оператора A_2 визначимо сумою

$$v_{2m}(x, A_2) \equiv v_{2m}(x) + c_{2,m} y_{2,n+p}(x, \rho_m), \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{35}$$

Підставляючи вираз (35) в умови (31), (32), отримуємо

$$c_{2,m} = \sum_{q=1}^{k_p} (-1)^{q+1} 2\sqrt{2} b_{q,p} (\rho_m)^{2k_p - 2p}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{36}$$

$$v_{2m}(x, A_2) = v_{2m}(x) + \sum_{q=1}^{k_p} (-1)^{q+1} b_{q,p} (\rho_m)^{2q-2p} y_{2,n+p}(x, \rho_m), \tag{37}$$

$$p = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Отже, оператор A_2 має систему кореневих функцій (33)–(36) у сенсі рівностей

$$A_2 v_{2m}(x, A_2) = \lambda_m v_{2m}(x, a_2) + \xi_{2,m} v_{2m-1}(x, A_2), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\xi_{2,m} = 4(-1)^n n W(\omega_2^2, \ldots, \omega_n^2)(\rho_m)^{2n-1} c_{2,m}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$A_2 v_{2m-1}(x, A_2) = \lambda_m v_{2m-1}(x, A_2), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Введемо в розгляд оператор $R(A_2) : L_2(0{,}1) \to L_2(0{,}1)$, який відображає систему функцій $V(A_0)$ у систему $V(A_2)$: $R(A_2) v_{2m-j}(x) \equiv v_{2m-j}(x, A_2)$, $j = 0, 1$, $m = 0, 1, \ldots$.

Із формул (33)–(35) отримуємо включення $R(A_2) \in G(B_{0,p})$.

У випадку, коли $k_p \leq p,\ p = 1, 2, \ldots, n$, із співвідношення (36) випливає, що послідовність $\{c_{2,m}\}_{m=0}^{\infty}$ є обмеженою.

Тому з теореми 2 отримуємо останнє твердження теореми.

6.2. Розглянемо для рівняння (1) крайову задачу з умовами

$$l_{3,j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) - y^{(2j-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{38}$$

$$l_{3,n+p}y \equiv l^0_{n+p}y + l^2_p y = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{39}$$

де

$$l^2_p y \equiv \sum_{q=1}^{k_p} b_{q,p}\big(y^{(2q-2)}(0) + y^{(2q-2)}(1)\big), \qquad b_{p,q} \in \mathbb{R}, \quad k_p \leq n, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Нехай $A_3 \equiv A_{3,p}$ — оператор задачі (1), (38)–(40), $A_3 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x),\ y \in D(A_3)$, $D(A_3) \equiv \big\{y \in W_2^{2n}(0{,}1) \colon l^3_j y = 0, j = 1, \ldots, 2n\big\}$, $V(A_3)$ — система кореневих функцій оператора A_3.

Теорема 4. *Нехай $b_{p,q} \in \mathbb{R},\ 0 \leq q \leq k_p \leq n,\ p = 1, 2, \ldots, n$. Тоді множини власних значень операторів A_0 та A_3 збігаються між собою і система $V(A_3)$ повна та мінімальна у просторі $L_2(0{,}1)$.*

Визначимо систему $V(A_3)$ за допомогою операторів $R(A_3) \colon V(A_0) \to V(A_3)$, $R(A_3) = E + S(A_3) = \prod_{p=1}^{n} \big(E + S(A_{2,p,b})\big)$.

Для оператора $R\left(A^1\right)$ маємо розвинення

$$R\left(A^1\right) = \prod_{p=1}^{n} \big(E + S(A^1_p)\big) = E + \sum_{p=1}^{n} S(A^1_p).$$

За наслідком 1 оператор $R(A_{3,p}) = E + S(A_{3,p})$ є елементом $G(B_{0,p})$.

Далі використовуємо міркування з доведення теореми 3.

7. Нелокальна багатоточкова задача. *7.1.* Розглянемо для будь-якого $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ багатоточкову задачу для рівняння (1) з умовами

$$l_{4,j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) - y^{(2j-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{41}$$

$$l_{4,n+j}y \equiv (y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1)) = 0, \qquad j \neq p, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{42}$$

$$l_{4,n+p}y \equiv (y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1))y + l^3_p y = 0, \tag{43}$$

де

$$l^3_p y \equiv \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q,s}\big(y^{(2q-2)}(x_s) + y^{(2q-2)}(1 - x_s)\big) = 0. \tag{44}$$

Нехай $A_4 \equiv A_{4,p}$ — оператор задачі (1), (41) — (44),

$$A_4 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(A_4), \qquad D(A_4) \equiv \big\{y \in W_2^{2n}(0{,}1) \colon l^4_j y = 0, j = 1, 2, \ldots, 2n\big\}.$$

Визначимо елементи системи $V(A_4)$ кореневих функцій оператора A_4.

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що $v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2}\sin 2\pi mx \in D(A_4)$, $A_4 v_{2m-1}(x) = \lambda_{2m-1} v_{2m-1}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Отже,

$$v_{2m-1}(x, A_4) \equiv v_{2m-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi mx, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$v_0(x, A_4) \equiv \begin{cases} 1 + b(2x-1) & \text{для} \quad p = 1, \\ 1 & \text{для} \quad p > 1. \end{cases} \tag{45}$$

Кореневі функції оператора A_4 визначимо сумою

$$v_{2m}(x, A_4) \equiv v_{2m}(x) + c_{4,m} y_{2,n+p}(x, \rho_m), \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{46}$$

Підставляючи вираз (46) в (43), (44), отримуємо

$$c_{4,m} = \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q,s}(-1)^{2q-2p-1}(\rho_m)^{2q-2p}\cos\rho_m x_s, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{47}$$

$$v_{2m}(x, A_4) \equiv v_{2m}(x) + \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q,s}(-1)^{2q-2p-1}(\rho_m)^{2q-2p}\cos\rho_m x_s y^1_{n+p}(x, \rho_m), \tag{48}$$

$m = 1, 2, \ldots,\ p = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, оператор A_4 має систему функцій (43) – (48), кореневих у сенсі рівностей

$$A_4 v^1_{2m}(x, A_4) = \lambda_m v_{2m}(x, A_4) + \xi_{4,m}(A_4) v_{2m-1}(x, A_4),$$
$$\xi_{4,m}(A_4) = 4(-1)^n n W(\omega_2^2, \ldots, \omega_n^2)(\rho_m)^{2n-1} c_{4,m}(b), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$A_4 v_{2m-1}(x, A_4) = \lambda_m v_{2m-1}(x, A_4), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

***Зауваження* 6.** З формули (48) випливає, що $R(A_4) \in G(B_{0,p})$ та $R(A_4) \in G_c(B_{0,p})$ при $k_p \le p$.

Тому справджується така теорема.

Теорема 5. *Нехай $b_{p,q,s} \in R$, $0 \le k_p \le n$, $1 \le p \le n$. Тоді спектри операторів A_0, A_4 збігаються між собою і система функцій $V(A_4)$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0,1)$.*

Якщо $k_p \le p$, $p = 1, 2, \ldots, n$, то система кореневих функцій $V(A_4)$ є базисом Рісса у просторі $L_2(0,1)$.

7.2. Розглянемо багатоточкову задачу (1) – (3).

Нехай A — оператор задачі (1) – (3),

$$Ay \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \quad y \in D(A), \qquad D(A) \equiv \left\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_j^7 y = 0,\ j = 1, 2, \ldots, 2n\right\},$$

$V(A)$ — система кореневих функцій оператора A.

Теорема 6. *Нехай $b_{p,q,j} \in \mathbb{R}$, $0 \le q \le k_p \le n-1$, $j = 0, 1, \ldots, r$, $p = 1, 2, \ldots, n$. Тоді множини власних значень операторів A_0 та A збігаються між собою і система $V(A)$ повна та мінімальна у просторі $L_2(0,1)$.*

Якщо $k_p \le p$, $p = 1, 2, \ldots, n$, то система функцій $V(A)$ є базисом Рісса у просторі $L_2(0,1)$.

Ізоспектральність операторів A_4 та A_0 доводиться, як у доведенні теореми 1.

Визначимо систему $V(A)$ за допомогою оператора $R(A)\colon V(A_0) \to V(A)$.

Враховуючи співвідношення (44), (3), для оператора $R(A)$ отримуємо розвинення

$$R(A) = \prod_{p=1}^{n} \big(E + S(A_{4,p})\big) = E + \sum_{p=1}^{n} S(A_{4,p}), \tag{49}$$

де оператори $R(A_{4,p}) = E + S(A_{4,p})$ за лемою 2 є елементами групи $G(B_{0,p})$.

Тому система функцій $V(A)$ повна та мінімальна у просторі $L_2(0,1)$.

Якщо припущення $k_p \leq p,\ p = 1, 2, \ldots, n$, справджуються, то з розвинення (49) та наслідку 3 отримуємо твердження теореми.

***Зауваження* 7.** Аналогічні результати можна отримати для випадку багатоточкових умов

$$y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1) + \sum_{s=0}^{r} \sum_{j=0}^{k_p} b_{p,j,s} \left(y^{(j)}(x_s) + (-1)^j y^{(r)}(1 - x_s) \right) = 0.$$

8. Деякі висновки. Отже, в роботі отримано такі результати:

1. Визначено нові класи суттєво несамоспряжених крайових та багатоточкових задач, побудовано системи кореневих функцій та біортогональні системи, визначено спектр таких задач.

2. Сформульовано достатні умови повноти та базисності за Ріссом системи кореневих функцій досліджуваних задач.

3. Встановлено умови збіжності розкладу функції у ряд за системою кореневих функцій нерегулярних за Біркгофом крайових задач та їх багатоточкових аналогів.

4. Досліджено властивості операторів перетворення, які породжуються нелокальними задачами, ізоспектральними з оператором періодичної задачі.

Література

1. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981 – 984.
2. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – **39**, № 2. – С. 82 – 93.
3. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 5. – С. 235 – 236.
4. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – **142**. – С. 148 – 155.
5. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Функцион. анализ / ВИНИТИ. – 2006. – **96**. – С. 5 – 105.
6. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. – 1966. – **70**, № 3. – С. 310 – 329.
7. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 4. – С. 69 – 80.
8. *Хромов А. П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 5. – С. 763 – 772.
9. *Ткаченко В. А.* Разложения по собственным функциям, связанные с одномерными периодическими дифференциальными операторами порядка $2n$ // Функцион. анализ и его прил. – 2007. – **41**, № 1. – С. 66 – 89.
10. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1982. – № 6. – С. 12 – 21.

11. *Кангужин Б. Е., Нурахметов Д. Б., Токмагамбетов Н. Е.* Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфим. мат. журн. – 2011. – **3**, № 3. – С. 80 – 92.
12. *Ширяев Е. А.* Диссипативные краевые условия для обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 6. – С. 950 – 954.
13. *Ширяев Е. А., Шкаликов А. А.* Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 4. – С. 636 – 640.
14. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
15. *Hnyp Y., Mikhailets V., Murach A.* Parameter dependent one-dimentsional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Diferent. Equat. – 2017. – № 81. – P. 1 – 13.
16. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 231 с.
17. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
18. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 326 с.

Одержано 01.07.17