УДК 519.21

$\boxed{\text{О. А. Глонти}}$, **О. Г. Пуртухия** (Тбил. гос. ун-т им. И. Джавахишвили,
Ин-т математики им. А. Размадзе, Грузия)

ХЕДЖИРОВАНИЕ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА С НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫПЛАТЫ

We consider one type of European option in the case of the Black – Scholes financial market model whose payment function is a certain combination of binary and Asian options. The corresponding hedging scheme is analyzed. We deduce the formula for the Clark stochastic integral representation of the corresponding Wiener functional with integrand represented in the explicit form.

Розглядається один тип європейського опціона у випадку фінансової ринкової моделі Блека – Шоулза, функція виплати якого є певною комбінацією функцій виплат бінарного та азійського опціонів. Досліджується відповідна проблема хеджування. Отримано формулу стохастичного інтегрального зображення Кларка для відповідного вінерового функціоналу з підінтегральним виразом у явному вигляді.

1. Введение и предварительные замечания. В работах [1 – 4] были изучены некоторые методы получения стохастического интегрального представления негладких (в смысле Маллявэна) винеровских функционалов и его приложений для задач хеджирования европейских опционов. Если функционал стохастически гладкий, то формула Кларка – Оконе доказывает, что подынтегральное выражение из представления Кларка этого функционала представляет собой условное математическое ожидание производной Маллявэна. Несмотря на то, что формула Кларка – Оконе дает конструкцию подынтегральной функции, существуют некоторые проблемы для практической реализации (в отношении вычисления как стохастической производной, так и условного математического ожидания). Оказалось, что требование гладкости функционала можно ослабить требованием гладкости только его условного математического ожидания (см. [1]). В частности, мы обобщили формулу Кларка – Оконе для случая, когда функционал не является стохастически гладким, но его условное математическое ожидание стохастически дифференцируемо. Мы предложили метод нахождения подынтегрального выражения. Известно, что если случайная величина стохастически дифференцируема в смысле Маллявэна, то ее условное математическое ожидание также дифференцируемо (см. [5]). В частности, если $F \in D_{2,1}$, то $E(F \mid \Im_s^w) \in D_{2,1}$[1] и $D_t\big[E(F \mid \Im_s^w)\big] = E(D_t F \mid \Im_s^w) I_{[0,s]}(t)$. С другой стороны, условное математическое ожидание может быть гладким, даже если случайная величина не является стохастически гладкой (см. [1]). Например, известно, что $I_{\{w_T \le C\}} \notin D_{2,1}$ (индикатор события A является дифференцируемым по Маллявэну тогда и только тогда, когда вероятность $\mathrm{P}(A)$ равна нулю или единице (см. [5]), но для всех $t \in [0, T)$

$$E\big[I_{\{w_T \le C\}} | \Im_t^w\big] = \varPhi\left(\frac{C - w_t}{\sqrt{T - t}}\right) \in D_{2,1},$$

где C — некоторая вещественная константа, а $\varPhi$ — стандартная нормальная функция распределения.

[1] Пространство $D_{2,1}$ и оператор стохастического дифференцирования $D.$ будут определены во втором пункте, а $\Im_s^w = \sigma\{w_u : 0 \le u \le s\}$, где $w.$ — стандартный винеровский процесс.

В настоящей работе рассматривается негладкий функционал, условное математическое ожидание которого также не является стохастически дифференцируемым. В частности, изучается функционал интегрального типа $\int_0^T u_s(\omega)ds$ с негладким подынтегральным выражением $u_s(\omega)$. Если $u_s(\omega)$ не дифференцируема в смысле Маллявэна, то лебеговское усреднение (относительно ds) также не дифференцируемо в смысле Маллявэна (см. [2], теорема 2). С другой стороны, в этом случае даже условное математическое ожидание упомянутого функционала не является гладким, поскольку мы имеем

$$E\left[\int\limits_0^T u_s(\omega)ds|\Im_t^w\right] = \int\limits_0^t u_s(\omega)ds + \int\limits_t^T E\big[u_s(\omega)|\Im_t^w\big]ds,$$

где первое слагаемое не дифференцируемо, а второе дифференцируемо в смысле Маллявэна (если $u_s(\cdot\,) \in D_{2,1}$ для почти всех s и $u_\cdot(\omega)$ является интегрируемым по Лебегу для почти всех ω, то $\int_t^T u_s(\omega)ds$ принадлежит $D_{2,1}$). Такой тип интегральных функционалов рассматривался в [3, 4]. Метод хеджирования опциона на основе использования локального времени цены рискового актива S был разработан в [3] (но этот подход здесь неприменим). Сначала мы вывели стохастическое интегральное представление Кларка для локального времени. Затем получили интегральное представление Кларка для функции выплаты интегрального типа

$$\int\limits_0^T I_{\{a\le S_t\le b\}}S_t^2dt$$

европейского опциона, использовав соотношение между функцией выплаты опциона и локальным временем (теорема Троттера – Майера, см. теорему IV.45.1 из [6]), а также теорему Фубини стохастического типа, и впоследствии решили соответствующую проблему хеджирования в случае модели Блэка – Шоулза с нулевой процентной ставкой.

В настоящей работе изучается экзотический опцион, который является определенной комбинацией бинарных и азиатских опционов, и исследуется соответствующая проблема хеджирования. В частности, мы изучаем европейский опцион с функцией выплаты

$$\int\limits_0^T I_{\{C_1\le S_t\le C_2\}}\ln(S_t)dt,$$

где S_t — геометрическое броуновское движение и $C_1, C_2,\ C_1 < C_2,$ — некоторые действительные числа. Для этого мы выводим стохастическое интегральное представление Кларка для такой функции выплаты с подынтегральным выражением в явном виде.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ задан винеровский процесс $w = (w_t),\ t \in \in [0,T]$ и $(\Im_t^w),\ t\in[0,T],$ — естественная фильтрация, порожденная винеровским процессом w. Рассмотрим модель Блэка – Шоулза, в которой эволюция цены безрискового актива описывается уравнением

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_0 = 1, \tag{1.1}$$

где $r \geq 0$ — процентная ставка, а для эволюции цены рискового актива имеем

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \quad S_0 = 1, \tag{1.2}$$

где $\mu \in R$ — средная доходность, а $\sigma > 0$ — коэффициент изменчивости.

Пусть

$$Z_T = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma} w_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right\}$$

и $\widetilde{P}_T$ — такая мера на $(\Omega, \Im_T^w)$, что

$$d\widetilde{P}_T = Z_T dP.$$

Из теоремы Гирсанова следует (см. [7]), что по этой мере (риск-нейтральной мартингальной мере) процесс

$$\widetilde{w}_t = w_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

является стандартным винеровским процессом и

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{w}_t, \quad S_0 = 1,$$

или

$$S_t = \exp\left\{\sigma\widetilde{w}_t + (r - \sigma^2/2)t\right\}. \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим проблему „репликации” европейского опциона экзотического типа с функцией выплаты интегрального типа

$$F = \int_0^T I_{\{C_1 \leq S_t \leq C_2\}} \ln(S_t) dt \tag{1.4}$$

(где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы, $C_1 < C_2$), т. е. требуется найти торговую стратегию $(\beta_t, \gamma_t),\ t \in [0, T]$, такую, что капитальный процесс

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad X_T = F, \tag{1.5}$$

в условиях самофинансирования

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t. \tag{1.6}$$

Из соотношений (1.3), (1.5) и (1.6) имеем

$$F = X_T = X_0 + \int_0^T r(\beta_t B_t + \gamma_t S_t) dt + \int_0^T \sigma\gamma_t S_t d\widetilde{w}_t.$$

Наша цель — найти торговую стратегию $(\gamma, \beta) = (\gamma_t, \beta_t),\ t \in [0, T]$. Эта проблема эквивалентна задаче нахождения мартингального представления функции выплаты F с подынтегральным выражением в явном виде. Заметим, что F квадратично интегрируема, но ни F, ни его условное математическое ожидание не являются дифференцируемыми (в смысле Маллявэна) функционалами винеровского процесса $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_t),\ t \in [0, T]$. Поэтому мы пытаемся получить интегральное представление Кларка с известным подынтегральным выражением, применяя нетрадиционный метод, поскольку метод Кларка – Оконе, а также полученные нами ранее результаты здесь неприменимы.

2. Вспомогательные сведения и результаты. В 80-е годы прошлого века было показано (см. [8]), что теоремы мартингального представления (вместе с теоремой Гирсанова о замене меры) играют важную роль в современной финансовой математике. Согласно формуле Кларка (см. [9]), если F — $\Im_T^w$-измеримая квадратично интегрируемая случайная величина, то

$$F = \mathrm{E}\,F + \int\limits_0^T \varphi_t(\omega) dw_t$$

для некоторого квадратично интегрируемого случайного процесса $\varphi_t(\omega)$ $\big(\varphi_\cdot(\cdot) \in L_2([0,T] \times \Omega)\big)$, адаптированного к фильтрации $\Im_t^w,\ t \in [0, T]$. Благодаря так называемой формуле Кларка – Оконе (см. [10]) $\varphi_t(\omega) = \mathrm{E}\left[D_t F | \Im_t^w\right]$, где $D_t F$ — стохастическая производная (так называемая производная Маллявэна) функционала F. Но в тех случаях, когда функционал F не имеет стохастическую производную, его применение невозможно.

Производная гладкой случайной величины F вида

$$F = f\big(w(h_1), \ldots, w(h_n)\big), \qquad f \in C_p^\infty(R^n), \quad h_i \in L_2\big([0,T]\big),$$

— стохастический процесс $D_t F$, заданный соотношением (см. [5])

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(w(h_1), \ldots, w(h_n)\big) h_i(t),$$

где $w(h_i) = \displaystyle\int_0^T h_i(t)\, dw_t$.

D замыкаем как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2\big(\Omega; L_2([0,T])\big)$. Обозначим его область определения через $D_{2,1}$. Это означает, что $D_{2,1}$ равен замыканию класса гладких случайных величин по норме

$$\|F\|_{2,1} := \|F\|_{L_2(\Omega)} + \||DF\||_{L_2(\Omega; L_2([0,T]))}\,.$$

Пусть $p(u, t, w_u, A)$ — вероятности перехода винеровского процесса w, т. е. $\mathrm{P}\big[w_t \in A \mid \Im_u^w\big] = p(u, t, w_u, A)$, где $0 \le u \le t,\ A$ является борелевским подмножеством R и

$$p(u, t, x, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}} \int\limits_A \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-u)}\right\} dy.$$

Для вычисления условного математического ожидания мы используем приводимое ниже утверждение.

Предложение 2.1. *Для любой ограниченной или положительной измеримой функции f справедливо соотношение*

$$\mathrm{E}\left[f(w_t)|\Im_u^w\right] = \int\limits_R f(y)p(u,t,w_u,dy) \quad (\mathrm{P}\text{-}п.\,н.). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Предположим, что $g_t = \mathrm{E}\left[F|\Im_t^w\right]$ является дифференцируемым по Маллявэну функционалом $\big(g_t(\cdot) \in D_{2,1}\big)$ для почти всех $t \in [0,T)$. Тогда справедливо стохастическое интегральное представление*

$$g_T = F = \mathrm{E}\,F + \int\limits_0^T \nu_u dw_u \quad (\mathrm{P}\text{-}п.\,н.),$$

где

$$\nu_u := \lim_{t\uparrow T} \mathrm{E}\left[D_u g_t|\Im_u^w\right] \quad в \quad L_2\big([0,T]\times\Omega\big)$$

(см. теорему 1 в [1]).

Теорема 2.2. *В схеме* (1.1), (1.2) *для любого действительного числа $C > 0$ и $\theta \in (0,T]$ функционал $I_{\{S_\theta \le C\}} \ln(S_\theta)$ допускает стохастическое интегральное представление*

$$I_{\{S_\theta\le C\}}\ln(S_\theta) = b\theta\Phi\left(\frac{\ln C - b\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right) - \sigma\sqrt{\theta}\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right) +$$

$$+\int\limits_0^\theta \left\{\sigma\Phi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) - \frac{\ln C}{\sqrt{\theta-u}}\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right)\right\} d\widetilde{w}_u, \tag{2.2}$$

где $b = r - \sigma^2/2$.

Здесь и ниже $\Phi_{a,\lambda}$ — функция нормального распределения с параметрами a и λ, $\varphi_{a,\lambda}$ — ее функция плотности, $\Phi := \Phi_{0,1}$ и $\varphi := \varphi_{0,1}$.

Доказательство. Согласно предложению 2.1, используя стандартную технику интегрирования и известное свойство функции плотности нормального распределения, нетрудно видеть, что

$$g_t^\theta := \widetilde{E}\big[I_{\{S_\theta\le C\}}\ln(S_\theta)|\Im_t^{\widetilde{w}}\big] =$$

$$= \widetilde{E}\big[I_{\{\widetilde{w}_\theta \le \frac{\ln C - b\theta}{\sigma}\}}(\sigma\widetilde{w}_\theta + b\theta)|\Im_t^{\widetilde{w}}\big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\theta-t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\{x\le\frac{\ln C - b\theta}{\sigma}\}}(\sigma x + b\theta)\exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_t)^2}{2(\theta-t)}\right\}dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(\theta-t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\{x\le\frac{\ln C - b\theta}{\sigma}\}}(x-\widetilde{w}_t)\exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_t)^2}{2(\theta-t)}\right\}dx+$$

$$+(\sigma\widetilde{w}_t+b\theta)\varPhi_{\widetilde{w}_t,\theta-t}\left(\frac{\ln C-b\theta}{\sigma}\right)=$$

$$=-\frac{\sigma(\theta-t)}{\sqrt{2\pi(\theta-t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\{x\le\frac{\ln C-b\theta}{\sigma}\}}d\left(\exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_t)^2}{2(\theta-t)}\right\}\right)dx+$$

$$+(\sigma\widetilde{w}_t+b\theta)\varPhi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right)=$$

$$=-\sigma\sqrt{\theta-t}\varphi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right)+(\sigma\widetilde{w}_t+b\theta)\varPhi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right).$$

Поэтому в силу предложения 1.2.3 из [5] (см. также [11]) случайная величина

$$g_t^\theta=\widetilde{E}\big[I_{\{S_\theta\le C\}}S_\theta|\Im_t^{\widetilde{w}}\big]$$

является дифференцируемой по Маллявэну ($g_t^\theta(\cdot)\in D_{2,1}$) для любого $t\in[0,\theta)$.

Используя теорему 2.1, записываем следующее стохастическое интегральное представление:

$$I_{\{S_\theta\le C\}}\ln(S_\theta)=\widetilde{E}\big[I_{\{S_\theta\le C\}}\ln(S_\theta)\big]+\int\limits_0^\theta\nu_u^\theta d\widetilde{w}_u\quad(P\text{-п. н.}),\tag{2.3}$$

где

$$\nu_u^\theta:=\lim_{t\to\theta}\widetilde{E}\big[D_ug_t^\theta|\Im_u^{\widetilde{w}}\big]\quad\text{в}\quad L_2\big([0,T]\times\Omega\big).\tag{2.4}$$

Ясно, что

$$\widetilde{E}[I_{\{S_\theta\le C\}}\ln(S_\theta)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\{x\le\frac{\ln C-b\theta}{\sigma}\}}(\sigma x+b\theta)\varphi_{0,\theta}(x)dx=$$

$$=-\sigma\theta\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\{x\le\frac{\ln C-b\theta}{\sigma}\}}d\left(\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\}\right)+b\theta\varPhi_{0,\theta}\left(\frac{\ln C-b\theta}{\sigma}\right)=$$

$$=b\theta\varPhi\left(\frac{\ln C-b\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)-\sigma\sqrt{\theta}\varphi\left(\frac{\ln C-b\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right).\tag{2.5}$$

Далее, в силу предложения 1.2.3 из [5] имеем

$$D_ug_t^\theta=\sigma\varphi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right)I_{[0,t]}(u)+$$

$$+\sigma\varPhi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right)I_{[0,t]}(u)-\frac{\sigma\widetilde{w}_t+b\theta}{\sqrt{\theta-t}}\varphi\left(\frac{\ln C-b\theta-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right)I_{[0,t]}(u):=$$

$$:=\left(\sigma-\frac{b\theta}{\sqrt{\theta-t}}\right)I_{[0,t]}(u)J_1+I_{[0,t]}(u)J_2-\frac{\sigma}{\sqrt{\theta-t}}I_{[0,t]}(u)J_3.\tag{2.6}$$

Вычислим теперь ν_u^θ. В соответствии с предложением 2.1, снова используя стандартную технику интегрирования и свойства функции плотности нормального распределения, получаем

$$\widetilde{E}\big[J_1|\Im_u^{\widetilde{w}}\big] := \widetilde{E}\left[\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta - t}}\right) \,\middle|\, \Im_u^{\widetilde{w}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma x}{\sigma\sqrt{\theta - t}}\right)\exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_u)^2}{2(t-u)}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t-u}}\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\left[x - \dfrac{(\ln C - b\theta)(t-u) + \sigma\widetilde{w}_u(\theta - t)}{\sigma(\theta - u)}\right]^2}{2\dfrac{(\theta - t)(t-u)}{\theta - u}}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t-u}}\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}\sqrt{2\pi\frac{(\theta - t)(t-u)}{\theta - u}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\theta - t}{2\pi(\theta - u)}}\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}.$$

Поэтому заключаем, что

$$\lim_{t\uparrow\theta}\widetilde{E}\left\{\left(\sigma - \frac{b\theta}{\sqrt{\theta - t}}\right)I_{[0,t]}(u)J_1|\Im_u^{\widetilde{w}}\right\} =$$

$$= \sigma\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}\lim_{t\uparrow\theta}\left\{\sqrt{\frac{\theta - t}{2\pi(\theta - u)}}I_{[0,t]}(u)\right\} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi(\theta - u)}}\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}\lim_{t\uparrow\theta}\left\{b\theta I_{[0,t]}(u)\right\} =$$

$$= -\frac{b\theta}{\sqrt{2\pi(\theta - u)}}\exp\left\{-\frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta - u)}\right\}I_{[0,\theta]}(u) =$$

$$= -\frac{b\theta}{\sqrt{\theta - u}}\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta - u}}\right)I_{[0,\theta]}(u). \tag{2.7}$$

Далее, используя предложение 2.1, имеем

$$\widetilde{E}\big[J_2|\Im_u^{\widetilde{w}}\big] := \widetilde{E}\left[\sigma\varPhi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta - t}}\right) \,\middle|\, \Im_u^{\widetilde{w}}\right] =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(t-u)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varPhi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma x}{\sigma\sqrt{\theta - t}}\right)\exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_u)^2}{2(t-u)}\right\}dx.$$

Следовательно, согласно соотношению

$$\lim_{t\uparrow\theta} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\theta-t}}\right) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 0{,}5, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$$

используя теорему о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\lim_{t\uparrow\theta} \widetilde{E}\big\{I_{[0,t]}(u)J_2|\Im_u^{\widetilde{w}}\big\} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(\theta-u)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\{\ln C - b\theta - \sigma x>0\}} \exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_u)^2}{2(\theta-u)}\right\} dx I_{[0,\theta]}(u) =$$

$$= \sigma\mathit{\Phi}_{\widetilde{w}_u,\theta-u}\left(\frac{\ln C - b\theta}{\sigma}\right) I_{[0,\theta]}(u) = \sigma\mathit{\Phi}\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) I_{[0,\theta]}(u). \tag{2.8}$$

С другой стороны,

$$\widetilde{E}\big[J_3|\Im_u^{\widetilde{w}}\big] := \widetilde{E}\left[\widetilde{w}_t\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right) \,\middle|\, \Im_u^{\widetilde{w}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma x}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right) \exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_u)^2}{2(t-u)}\right\} dx.$$

Теперь обозначим

$$h_1 := h_1(\theta, u, \widetilde{w}_u) = \frac{(\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(\theta-u)},$$

$$h_2 := h_2(\theta, t, u, \widetilde{w}_u) = \frac{(\ln C - b\theta)(t-u) + \sigma\widetilde{w}_u(\theta-t)}{\sigma(\theta-u)},$$

$$h_3 := h_3(\theta, t, u) = \frac{(\theta-t)(t-u)}{\theta-u}.$$

Тогда, проведя преобразования, аналогичные тем, которые используются для вычисления условного математического ожидания $\widetilde{E}\big[J_1|\Im_u^{\widetilde{w}}\big]$, можем записать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma x}{\sigma\sqrt{\theta-t}}\right) \exp\left\{-\frac{(x-\widetilde{w}_u)^2}{2(t-u)}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-h_1\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-h_2)^2}{2h_3}\right\} dx =$$

$$= -\frac{h_3}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-h_1\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\left(\exp\left\{-\frac{(x-h_2)^2}{2h_3}\right\}\right) + \frac{h_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-h_1\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-h_2)^2}{2h_3}\right\} dx.$$

Следовательно, согласно свойствам функции плотности нормального распределения получаем

$$\widetilde{E}\left[J_3 | \Im_u^{\widetilde{w}}\right] = -\frac{h_3}{2\pi\sqrt{t-u}} \exp\{-h_1\} \exp\left\{-\frac{(x-h_2)^2}{2h_3}\right\} \Bigg|_{x=-\infty}^{\infty} +$$

$$+\frac{h_2}{2\pi\sqrt{t-u}} \exp\{-h_1\} \sqrt{2\pi}\sqrt{h_3} = \frac{h_2\sqrt{h_3}}{\sqrt{2\pi(t-u)}} \exp\{-h_1\}.$$

Поэтому имеем

$$\lim_{t\uparrow\theta} \widetilde{E}\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{\theta-t}} I_{[0,t]}(u) J_3\right\} \Bigg| \Im_u^{\widetilde{w}} \Bigg\} = \exp\{-h_1\}\times$$

$$\times \lim_{t\uparrow\theta} \left\{\frac{(\ln C - b\theta)(t-u) + \sigma\widetilde{w}_u(\theta-t)}{\sqrt{2\pi}(\theta-u)^{3/2}} I_{[0,t]}(u)\right\} =$$

$$= \exp\{-h_1\} \frac{\ln C - b\theta}{\sqrt{2\pi(\theta-u)}} I_{[0,\theta]}(u) = \frac{\ln C - b\theta}{\sqrt{\theta-u}} \varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) I_{[0,\theta]}(u). \qquad (2.9)$$

Сопоставляя теперь соотношения (2.6) – (2.9), заключаем, что

$$\nu_u^\theta = -\frac{b\theta}{\sqrt{\theta-u}} \varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) I_{[0,\theta]}(u) +$$

$$+\sigma\Phi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) I_{[0,\theta]}(u) -$$

$$-\frac{\ln C - b\theta}{\sqrt{\theta-u}} \varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) I_{[0,\theta]}(u) =$$

$$= \left\{\sigma\Phi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right) - \frac{\ln C}{\sqrt{\theta-u}} \varphi\left(\frac{\ln C - b\theta - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{\theta-u}}\right)\right\} I_{[0,\theta]}(u). \qquad (2.10)$$

Соотношение (2.10) вместе с (2.3) – (2.5) завершает доказательство теоремы.

3. Хеджирование опциона.

Теорема 3.1. *В схеме* (1.1), (1.2) *для любых вещественных положительных чисел* $C_1 < C_2$ *и для функционала* F (1.4) *справедливо стохастическое интегральное представление*

$$\int\limits_0^T I_{\{C_1 \le S_t \le C_2\}} \ln(S_t) dt = \int\limits_0^T \left[bt\Phi(h_4(t)) - \sigma\sqrt{t}\varphi(h_4(t))\right] \Big|_{C=C_1}^{C_2} dt +$$

$$+\int\limits_0^T \left\{\int\limits_u^T \left[\sigma\Phi(h_5(t,u)) - \frac{\ln C}{\sqrt{t-u}} \varphi(h_5(t,u))\right] \Big|_{C=C_1}^{C_2} dt\right\} d\widetilde{w}_u, \qquad (3.1)$$

где

$$h_4(t) = \frac{\ln C - bt}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$h_5(t,u) = \frac{\ln C - bt - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{t-u}}.$$

Доказательство. Интегрируя обе части равенства (2.2) по $d\theta$ и используя теорему Фубини стохастического типа (см. [12], лемма III.4.1 или [13], следствие леммы IV. 2.4), нетрудно видеть, что имеет место стохастическое интегральное представление

$$\int\limits_0^T I_{\{S_\theta \le C\}} \ln(S_\theta) d\theta = \int\limits_0^T \left[b\theta\Phi(h_4(\theta)) - \sigma\sqrt{\theta}\varphi(h_4(\theta))\right] d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^\theta \left[\sigma\Phi(h_5(\theta,u)) - \frac{\ln C}{\sqrt{\theta-u}}\varphi(h_5(\theta,u))\right] d\widetilde{w}_u d\theta =$$

$$= \int\limits_0^T \left[b\theta\Phi(h_4(\theta)) - \sigma\sqrt{\theta}\varphi(h_4(\theta))\right] d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^T \left\{ \int\limits_u^T \left[\sigma\Phi(h_5(\theta,u)) - \frac{\ln C}{\sqrt{\theta-u}}\varphi(h_5(\theta,u))\right] d\theta \right\} d\widetilde{w}_u. \qquad (3.2)$$

Ясно, что

$$\int\limits_0^T I_{\{C_1 \le S_t \le C_2\}} \ln(S_t) dt = \int\limits_0^T I_{\{S_t \le C_2\}} \ln(S_t) dt - \int\limits_0^T I_{\{S_t < C_1\}} \ln(S_t) dt. \qquad (3.3)$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) получаем представление (3.1).

Теорема 3.1 дает нам возможность найти компоненту γ_t хеджирующей стратегии $\pi = (\beta_t, \gamma_t),\ t \in [0,T]$, которая определяется подынтегральной функцией интегрального представления (3.1) и имеет вид

$$\gamma_t = \frac{1}{\sigma S_t} \int\limits_t^T \left[\sigma\Phi(h_5(v,u)) - \frac{\ln C}{\sqrt{v-t}}\varphi(h_5(v,u))\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} dv. \qquad (3.4)$$

Теперь, используя теорему 3.1, можем найти процесс капитала

$$X_t = \widetilde{E}[F|\Im_t^{\widetilde{w}}] = \widetilde{E}F +$$

$$+ \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_u^T \left[\sigma\Phi(h_5(v,u)) - \frac{\ln C}{\sqrt{v-u}}\varphi(h_5(v,u))\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} dv \right\} d\widetilde{w}_u. \qquad (3.5)$$

Известно (см., например, [7] или соотношение (1.5) в этой статье), что вторую компоненту β_t хеджирующей стратегии π можно записать следующим образом:

$$\beta_t = \frac{1}{B_t}(X_t - \gamma_t S_t). \tag{3.6}$$

Поэтому хеджирующая стратегия $\pi = (\beta_t, \gamma_t)$, $t \in [0, T]$, в случае финансовой рыночной модели Блэка – Шоулза в проблеме „репликации” европейского опциона экзотического типа с функцией выплаты F, заданной соотношением (1.4), определяется соотношениями (3.4) – (3.6), а цена $\widetilde{C}$ этого опциона имеет вид

$$\widetilde{C} = \widetilde{E}F = \int\limits_0^T \Big[b\theta\varPhi(h_4(t)) - \sigma\sqrt{t}\varphi(h_4(t))\Big]\Big|_{C=C_1}^{C_2} dt.$$

***Следствие* 3.1.** *В случае* $r = \sigma^2/2$ *для любых вещественных положительных чисел* $C_1 < C_2$ *функционал* F (1.4) *допускает стохастическое интегральное представление*

$$F = \int\limits_0^T I_{\{C_1 \le S_t \le C_2\}} \ln(S_t) dt =$$

$$= \left\{ -\frac{2\sigma\sqrt{T}}{3}\varphi\left(\frac{\ln C}{\sigma\sqrt{T}}\right)\left(T - \frac{\ln^2 C}{\sigma^2}\right) + \frac{3|\ln C|^3}{\sigma^2}\left[\mathrm{er}\, f\left(\frac{|\ln C|}{\sigma\sqrt{2T}}\right) - 1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2} +$$

$$+ \int\limits_0^T \big\{\sigma\big[T\varPhi(h(C,u)) + (T-u)h(C,u)\varphi(h(C,u)) - u\big]\big\}\big|_{C=C_1}^{C_2} d\widetilde{w}_u -$$

$$- \int\limits_0^T \left\{\frac{\sigma^2\sqrt{T-u}}{2}\operatorname{sgn}\big[h(C,u)\big]\big[u - (T-u)h^2(C,u)\big]\left[\mathrm{er}\, f\left(\frac{|h(C,u)|}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2} d\widetilde{w}_u -$$

$$- \int\limits_0^T \left\{\ln C\sqrt{T-u}\big|h(C,u)\big|\left[\mathrm{er}\, f\left(\frac{|h(C,u)|}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2} d\widetilde{w}_u -$$

$$- \int\limits_0^T \left[2\ln C\sqrt{T-u}\varphi\left(\frac{h(C,u)}{\sqrt{2}}\right)\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2} d\widetilde{w}_u, \tag{3.7}$$

где $\mathrm{er}\, f(t)$ — *так называемая функция ошибки, т. е.*

$$\mathrm{er}\, f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \exp\{-x^2\} dx,$$

и

$$h(C,u) = \frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{T-u}}.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае представление (3.1) можно записать в виде

$$\int\limits_0^T I_{\{C_1\le S_t\le C_2\}}\ln(S_t)dt=-\sigma\int\limits_0^T\Big[\sqrt{t}\varphi(h_4(t))\Big]\Big|_{C=C_1}^{C_2}dt+$$

$$+\int\limits_0^T\left\{\int\limits_u^T\left[\sigma\Phi(h_5(t,u))-\frac{\ln C}{\sqrt{t-u}}\varphi(h_5(t,u))\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}dt\right\}d\widetilde{w}_u, \tag{3.8}$$

где

$$h_4(t)=\frac{\ln C}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$h_5(t,u)=\frac{\ln C-\sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{t-u}}.$$

Далее, следуя стандартной технике интегрирования, нетрудно видеть, что для любой положительной константы a имеем

$$\int\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{a}{t}\right\}dt=2\sqrt{\pi}\sqrt{a}\,\mathrm{er}\,f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\right)+2\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{a}{t}\right\}+\mathrm{const}, \tag{3.9}$$

$$\int\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{a}{t}\right\}dt=\frac{2}{3}\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{a}{t}\right\}(t-2a)-$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{\pi}a^{3/2}\,\mathrm{er}\,f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\right)+\mathrm{const} \tag{3.10}$$

и

$$\int\frac{t}{\sqrt{(t-u)^3}}\exp\left\{-\frac{a}{t-u}\right\}dt=$$

$$=2\sqrt{t-u}\exp\left\{-\frac{a}{t-u}\right\}-\sqrt{\frac{\pi}{a}}(u-2a)\,\mathrm{er}\,f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t-u}}\right)+\mathrm{const}\,. \tag{3.11}$$

Используя равенство (3.9) с $a=\big[\ln C/(\sqrt{2}\sigma)\big]^2$, учитывая соотношения $\mathrm{er}\,f(+\infty)=1$ и

$$\lim_{t\downarrow 0}\left[(\sqrt{t})^\alpha\exp\left\{-\frac{a}{t}\right\}\right]=0,\quad \alpha>0, \tag{3.12}$$

заключаем, что

$$-\sigma\int\limits_0^T\Big[\sqrt{t}\varphi(h_4(t))\Big]\Big|_{C=C_1}^{C_2}dt=$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^T\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{\big[\ln C/(\sqrt{2}\sigma)\big]^2}{t}\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}dt=$$

$$= \left\{ \left[-\frac{2\sigma\sqrt{t}}{3} \varphi\left(\frac{\ln C}{\sigma\sqrt{t}}\right)\left(t - \frac{\ln^2 C}{\sigma^2}\right) + \frac{3|\ln C|^3}{\sigma^2} \operatorname{er} f\left(\frac{|\ln C|}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} \right\} \Bigg|_{t=u}^{T} =$$

$$= \left\{ -\frac{2\sigma\sqrt{T}}{3} \varphi\left(\frac{\ln C}{\sigma\sqrt{T}}\right)\left(T - \frac{\ln^2 C}{\sigma^2}\right) + \frac{3|\ln C|^3}{\sigma^2} \left[\operatorname{er} f\left(\frac{|\ln C|}{\sigma\sqrt{2T}}\right) - 1\right] \right\} \Bigg|_{C=C_1}^{C_2}. \qquad (3.13)$$

Заметим, что в данном случае $\ln C_1 \leq \sigma\widetilde{w}_u \leq \ln C_2$. Следовательно, мы имеем

$$\lim_{t \downarrow u} \varPhi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{t-u}}\right) = \begin{cases} 1, & C = C_2, \\ 0, & C = C_1. \end{cases}$$

Поэтому, согласно формуле интегрирования по частям, получаем

$$\int_u^T \left[\sigma\varPhi(h_5(t,u))\right] \Big|_{C=C_1}^{C_2} dt = \left\{ \left[\sigma t \varPhi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{t-u}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} \right\} \Bigg|_{t=u}^{T} +$$

$$+ \int_u^T \left[t \frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{2\sqrt{(t-u)^3}} \varphi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{t-u}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} dt =$$

$$= \left[\sigma T \varPhi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{T-u}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} - \sigma u +$$

$$+ \frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{2\sqrt{2\pi}} \int_u^T \left[\frac{t}{\sqrt{(t-u)^3}} \exp\left\{-\frac{(\ln C - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(t-u)}\right\}\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} dt. \qquad (3.14)$$

Далее, в силу равенства (3.11) с $a = \dfrac{(\ln C - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2}$, снова принимая во внимание соотношения (3.12) и $\operatorname{er} f(+\infty) = 1$, имеем

$$\int_u^T \left[\frac{t}{\sqrt{(t-u)^3}} \exp\left\{-\frac{(\ln C - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2(t-u)}\right\}\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} dt =$$

$$= \left[2\sqrt{2\pi(T-u)} \varphi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{T-u}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} -$$

$$- \left\{ \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{|\ln C - \sigma\widetilde{w}_u|} \left[u - \frac{(\ln C - \sigma\widetilde{w}_u)^2}{\sigma^2}\right]\left[\operatorname{er} f\left(\frac{|\ln C - \sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma\sqrt{2(T-u)}}\right) - 1\right] \right\} \Bigg|_{C=C_1}^{C_2}. \qquad (3.15)$$

Следовательно, из соотношений (3.14), (3.15) получаем

$$\int_u^T \left[\sigma\varPhi(h_5(t,u))\right]\Big|_{C=C_1}^{C_2} dt = \left[\sigma T \varPhi\left(\frac{\ln C - \sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{T-u}}\right)\right] \Bigg|_{C=C_1}^{C_2} - \sigma u +$$

$$+\left[(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)\sqrt{T-u}\varphi\left(\frac{\ln C-\sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{T-u}}\right)\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}-$$

$$-\left\{\frac{\sigma}{2}\operatorname{sgn}(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)\left[u-\frac{(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)^2}{\sigma^2}\right]\left[\operatorname{er}f\left(\frac{|\ln C-\sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma\sqrt{2(T-u)}}\right)-1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}. \qquad (3.16)$$

Наконец, согласно равенству (3.10) с $a=\dfrac{(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2}$, используя соотношения (3.12) и $\operatorname{er}f(+\infty)=1$, имеем

$$\int\limits_u^T\left[-\frac{\ln C}{\sqrt{t-u}}\varphi(h_5(t,u))\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}dt=$$

$$=-\frac{\ln C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{T-u}\left[-\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)^2/(2\sigma^2)}{t}\right\}\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}dt=$$

$$=-\left\{\left[\frac{\ln C|\ln C-\sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma}\operatorname{er}f\left(\frac{|\ln C-\sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}\right\}\Bigg|_{t=0}^{T-u}-$$

$$-\left\{\left[\frac{\ln C\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln C-\sigma\widetilde{w}_u)^2}{2\sigma^2 2t}\right\}\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}\right\}\Bigg|_{t=0}^{T-u}=$$

$$=-\left\{\frac{\ln C|\ln C-\sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma}\left[\operatorname{er}f\left(\frac{|\ln C-\sigma\widetilde{w}_u|}{\sigma\sqrt{2(T-u)}}\right)-1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}-$$

$$-\left[2\ln C\sqrt{T-u}\varphi\left(\frac{\ln C-\sigma\widetilde{w}_u}{\sigma\sqrt{2(T-u)}}\right)\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}. \qquad (3.17)$$

Комбинируя теперь соотношения (3.8), (3.13), (3.16) и (3.17), заключаем, что представление (3.7) выполнено.

Следствие 3.1 доказано.

***Следствие* 3.2.** *В случае* $r=\sigma^2/2$ *в силу следствия* 3.1 *хеджирующая стратегия* $\pi=(\beta_t,\gamma_t)$ *и цена рассматриваемого опциона определяются соответственно следующими соотношениями*:

$$\gamma_t=\frac{1}{S_t}\left[T\Phi(h)+(T-t)h\varphi(h)-2\ln C\sqrt{T-t}\varphi(h/\sqrt{2})-t\right]\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}-$$

$$-\frac{1}{2S_t}\left\{\sigma\sqrt{T-t}\operatorname{sgn}(h)\big[t-(T-t)h^2\big]+\ln C\sqrt{T-t}h\right\}\big[\operatorname{er}f(|h|/\sqrt{2})-1\big]\Big|_{C=C_1}^{C_2},$$

где

$$h=h(C,t)=\frac{\ln C-\sigma\widetilde{w}_t}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad \beta_t=\frac{1}{B_t}(X_t-\gamma_tS_t),$$

и

$$\widetilde{C} = \left\{ -\frac{2}{3}\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{\ln C}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(T - \frac{\ln^2 C}{\sigma^2}\right) + \frac{3|\ln^3 C|}{\sigma^2}\left[\mathrm{er}\,f\left(\frac{|\ln C|}{\sigma\sqrt{2T}}\right) - 1\right]\right\}\Bigg|_{C=C_1}^{C_2}.$$

Литература

1. *Glonti O., Purtukhia O.* On one integral representation of functionals of Brownian motion // SIAM J. Theory Probab. and Appl. – 2017. – **61**, № 1. – P. 133 – 139.
2. *Glonti O., Jaoshvili V., Purtukhia O.* Hedging of European option of exotic type // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2015. – **168**. – P. 25 – 40.
3. *Glonti O., Purtukhia O.* Hedging of European option of integral type // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci. – 2014. – **8**, № 3. – P. 4 – 13.
4. *Glonti O., Purtukhia O.* Hedging of one european option of integral type in Black – Scholes model // Int. J. Eng. and Innov. Technol. – 2014. – **4**, № 5. – P. 51 – 61.
5. *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics. – Second ed. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.
6. *Rogers L. C. G., Wiiliams D.* Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2: Ito calculus. – Cambridge Univ. Press, 2000.
7. *Shiryaev A. N.* Essentials of stochastic finance, facts, models, theory // Adv. Ser. Stat. Sci. and Appl. Probab. – New Jersey etc.: World Sci. Publ., 2003. – **3**.
8. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochast. Process. and Appl. – 1981. – **11**. – P. 215 – 260.
9. *Clark M. C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals // Ann. Math. Statist. – 1970. – **41**. – P. 1282 – 1295.
10. *Ocone D.* Malliavin calculus and stochastic integral representation formulas of diffusion processes // Stochastics. – 1984. – **12**. – P. 161 – 185.
11. *Jaoshvili V., Purtukhia O.* Stochastic integral representation of functionals of Wiener processes // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci. – 2005. – **171**, № 1. – P. 17 – 20.
12. *Glonti O. A.* Investigations in the theory of conditional Gaussian processes. – Tbilisi: Metsniereba, 1985 (in Russian).
13. *Ikeda N., Watanabe Sh.* Stochastic differential equations and diffusion processes. – Tokyo: North-Holland Publ. Co., 1981.

Получено 13.07.16