УДК 517.5

А. Р. Бондаренко, О. В. Коваленко (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ НОРМОЮ КРАТНО МОНОТОННОЇ ФУНКЦІЇ І НОРМАМИ ЇЇ ПОХІДНИХ

We establish necessary and sufficient conditions for a system of positive numbers $M_{k_1},\ M_{k_2},\ M_{k_3},\ M_{k_4},\ 0 = k_1 < < k_2 < k_3 \le r-3,\ k_4 = r$ guaranteeing the existence of an $(r-2)$-monotone function x on the half line such that $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i},\ i = 1,2,3,4$.

Найдены необходимые и достаточные условия на систему положительных чисел $M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4},\ 0 = k_1 < < k_2 < k_3 \le r-3,\ k_4 = r$, гарантирующие существование $(r-2)$-монотонной на полуоси функции x такой, что $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i},\ i = 1,2,3,4$.

1. Вступ. Нехай G позначає дійсну пряму $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ або недодатну піввісь $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, а $L_\infty(G)$ — простір усіх вимірних суттєво обмежених функцій $x : G \to \mathbb{R}$ зі звичайною нормою $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty(G)}$. Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_\infty(G)$ будемо позначати простір усіх функцій $x : G \to \mathbb{R}$, які мають локально абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$, $x^{(0)} = x$ (у випадку, коли $G = \mathbb{R}_-$, ми розглядаємо односторонню похідну в точці $x = 0$) і такі, що $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Покладемо $L^r_{\infty,\infty}(G) := L^r_\infty(G) \cap L_\infty(G)$.

А. М. Колмогоров (див. [7]) сформулював таку задачу.

Задача Колмогорова. *Нехай задано деякий клас функцій $X \subset L^r_{\infty,\infty}(G)$ і систему d цілих чисел $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_d \le r$. Задача полягає у знаходженні необхідних та достатніх умов на додатні числа $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_d}$ для того, щоб гарантувати існування функції $x \in X$ такої, що*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = M_{k_i}, \quad i = 1,\ldots,d.$$

Повний розв'язок цієї задачі для трьох чисел (випадок $d = 3$ і $k_3 = r$) і класу $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ знайшов А. М. Колмогоров (розв'язки в частинних випадках випливали з робіт [5, 4]).

Для заданих $r, m \in \mathbb{N},\ m \le r$, позначимо через $L^{r,m}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ клас функцій $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, які є невід'ємними разом зі своїми похідними до порядку m включно. Будемо називати цей клас класом m-монотонних функцій.

Розв'язки задачі Колмогорова на класах кратно монотонних функцій отримано у таких випадках:

1) $X = L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r$ (В. М. Олов'янішніков [11]);

2) $X = L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r-1,\ k_4 = r$ (М. Л. Ятцелев [14]);

3) $X = L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r$ (Ю. М. Субботін, М. І. Черних [12] і, незалежно, В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко [1]);

4) $X = L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $k_1 = 0 < k_2 < k_3 < k_4 = r$ (В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко [2]);

5) $X = L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $k_1 = 0 < k_2 < k_3 \le r-2,\ k_4 = r$ (О. В. Коваленко [6]);

6) $X = L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_d \le r$ (В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко [3]).

Інформацію щодо інших відомих розв'язків задачі Колмогорова можна знайти у статті [3].

Метою даної статті є розв'язання задачі Колмогорова для системи додатних чисел M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}, $0 = k_1 < k_2 < k_3 \le r-3$, $k_4 = r$ і класу $X = L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$.

2. Означення екстремальних функцій. Нехай $0 \le b < a$. Визначимо функцію $\varphi(a,b;\cdot):$ $\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ таким чином. Якщо

$$a > \sqrt{2}b, \tag{1}$$

то

$$\varphi(a,b;t) = \begin{cases} 0, & t < -a, \\ t+a, & t \in [-a,-b), \\ -t+a-2b, & t \in [-b,0]. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо

$$\frac{4}{3}b < a \le \sqrt{2}b, \tag{3}$$

то

$$\varphi(a,b;t) = \begin{cases} 0, & t < -a, \\ t+a, & t \in [-a,-b), \\ -t+a-2b, & t \in [-b,-c), \\ t+a-2b+2c, & t \in [-c,0], \end{cases} \tag{4}$$

де $c = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}}$. Нарешті у випадку, коли

$$a \le \frac{4}{3}b, \tag{5}$$

покладемо

$$\varphi(a,b;t) = \begin{cases} 0, & t < -a, \\ t+a, & t \in [-a,-b), \\ -t+a-2b, & t \in [-b,-3b+2a), \\ t+4b-3a, & t \in [-3b+2a,-4b+3a), \\ 0, & t \in [-4b+3a,0]. \end{cases} \tag{6}$$

Деякі властивості введених функцій містяться у наступній лемі.

Лема 1. *Нехай задано числа* $0 \le b < a$. *Тоді для функції* $\varphi(a,b)$, *означеної вище*, *справджуються такі властивості*:

1) $\varphi(a,b)$ *є абсолютно неперервною і має компактний носій*, *що міститься в* $[-a,0]$;

2) $\|\varphi'(a,b;\cdot)\| = 1$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \varphi(a,b;s)ds \ge 0$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}_-$;

4) *якщо виконується нерівність* (3), *то* $\int_{-\infty}^{0}\varphi(a,b;s)ds=0$, *а якщо виконується нерівність* (5), *то* $\int_{-\infty}^{-4b+3a}\varphi(a,b;s)ds=0$.

Властивості 1 та 2 випливають з означення функції $\varphi(a,b;\cdot)$. У випадку, коли числа a і b пов'язані нерівністю (5), властивості 3 та 4 випливають із формули (6).

Нехай виконується нерівність (1). Якщо $\varphi(a,b;0)\geq 0$, то властивість 3 виконується внаслідок невід'ємності $\varphi(a,b)$ в усіх точках. В іншому випадку достатньо показати, що властивість 3 виконується при $t=0$. Безпосередньо обчислюючи інтеграл, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(a,b;s)ds=\frac{1}{2}\left((a-b)^2-(a-2b)^2+(a-b)^2\right)=\frac{1}{2}\left(a^2-2b^2\right)>0.$$

Нехай тепер виконується нерівність (3). Тоді $2b-a>0$, а отже,

$$\varphi(a,b;0)=a-2b+2c\leq 0 \iff 4c^2\leq(2b-a)^2 \iff 3a\geq 4b.$$

Таким чином, при виконанні нерівності (3) маємо $\varphi(a,b;0)\leq 0$, а тому за означенням (4) функція $\varphi(a,b;\cdot)$ змінює знак рівно один раз (причому з плюса на мінус). Це означає, що в цьому випадку властивість 3 є наслідком відповідної частини властивості 4. Безпосередньо обчислюючи інтеграл, одержуємо

$$2\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(a,b;s)ds=(a-b)^2-(a+c-2b)^2+(a-b)^2+(a-2b+2c)^2-$$

$$-(a+c-2b)^2=2(a-b)^2+(a-2b+2c)^2-2(a+c-2b)^2=2a^2-4ab+$$

$$+2b^2+a^2+4b^2+4c^2-4ab+4ac-8bc-2a^2-2c^2-8b^2-4ac+8ab+$$

$$+8bc=a^2-2b^2+2c^2=0.$$

Лему доведено.

Нехай тепер задано числа $l>0$ і $a>b\geq 0$. Покладемо $\varphi_1(a,b,l;t):=l\varphi(a,b;t)$. Для $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$, покладемо $\varphi_r(a,b,l;t):=\int_{-\infty}^{t}\varphi_{r-1}(a,b,l;s)ds$. За лемою 1 $\varphi_r(a,b,l;t)\in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, $\varphi_r(a,b,l;t)=0$ при всіх $t\leq -a$, $\varphi_r^{(r-1)}(a,b,l;t)=l\varphi(a,b;t)$, а отже, $\left\|\varphi_r^{(r)}(a,b,l)\right\|=l$. Крім того, у випадку, коли виконується нерівність (3), маємо

$$\varphi_r^{(r-2)}(a,b,l;0)=0, \tag{7}$$

а у випадку, коли виконується нерівність (5),

$$\varphi_r^{(r-2)}(a,b,l;t)=0,\quad t\in[-4b+3a,0]. \tag{8}$$

3. Основна екстремальна властивість. Справедливою є наступна лема.

Лема 2. *Нехай задано функцію* $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ *і цілі числа* $0 \le k_1 < k_2 < k_3 \le r-3$, $k_4 = r$. *Нехай числа* $l > 0$, $a > b \ge 0$ *такі, що*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = \left\|\varphi_r^{(k_i)}(a,b,l)\right\|, \quad i = 2,3,4. \tag{9}$$

Тоді

$$\left\|x^{(k_1)}\right\| \ge \left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,b,l)\right\|. \tag{10}$$

Якщо в нерівності (10) *має місце знак рівності, то* $x^{(k_1)} \equiv \varphi_r^{(k_1)}(a,b,l)$.

Без зменшення загальності можемо вважати, що $\|x^{(r)}\| = 1$ і $l = 1$. Для більш короткого запису далі в доведенні леми будемо писати $\varphi_r(t)$ замість $\varphi_r(a,b,l;t)$.

Припустимо супротивне, тобто функції $x^{(k_1)}$ і $\varphi_r^{(k_1)}$ не є тотожно рівними і має місце нерівність $\left\|x^{(k_1)}\right\| \le \left\|\varphi_r^{(k_1)}\right\|$. Покладемо $\delta(t) := x(t) - \varphi_r(t)$.

На підставі припущення і належності $x, \varphi_r \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ отримуємо $\delta^{(k_1)}(0) = x^{(k_1)}(0) - \varphi_r^{(k_1)}(0) = \left\|x^{(k_1)}\right\| - \left\|\varphi_r^{(k_1)}\right\| \le 0$. Крім того, за означенням функцій φ_r $\delta^{(k_1)}(-a) \ge 0$. Це означає, що існує точка $-a < t^1_{k_1+1} < 0$ така, що $\delta^{(k_1+1)}(t^1_{k_1+1}) < 0$. Крім цього, $\delta^{(k_1+1)}(-a) \ge 0$. Це означає, що існує точка $-a < t^1_{k_1+2} < 0$ така, що $\delta^{(k_1+2)}(t^1_{k_1+2}) < 0$.

Повторюючи аналогічні міркування, переконуємося, що існує точка $-a < t^1_{k_2} < 0$ така, що $\delta^{(k_2)}(t^1_{k_2}) < 0$. Крім того, $\delta^{(k_2)}(-a) \ge 0$ і на підставі (9) $\delta^{(k_2)}(0) = 0$. Це означає, що існують точки $-a < t^1_{k_2+1} < t^2_{k_2+1} < 0$ такі, що $\delta^{(k_2+1)}(t^1_{k_2+1}) < 0$ і $\delta^{(k_2+1)}(t^2_{k_2+1}) > 0$. Окрім того, $\delta^{(k_2+1)}(-a) \ge 0$. Повторюючи аналогічні міркування, переконуємося, що існують точки $-a < t^1_{k_3} < t^2_{k_3} < 0$ такі, що $\delta^{(k_3)}(t^1_{k_3}) < 0$ і $\delta^{(k_3)}(t^2_{k_3}) > 0$. Крім цього, $\delta^{(k_3)}(-a) \ge 0$ і на підставі (9) $\delta^{(k_3)}(0) = 0$. Це означає, що існують точки $-a < t^1_{k_3+1} < t^2_{k_3+1} < t^3_{k_3+1} < 0$ такі, що $\delta^{(k_3+1)}(t^1_{k_3+1}) < 0$, $\delta^{(k_3+1)}(t^2_{k_3+1}) > 0$ і $\delta^{(k_3+1)}(t^3_{k_3+1}) < 0$. І так далі, існують точки $-a < t^1_{r-2} < t^2_{r-2} < t^3_{r-2} < 0$ такі, що $\delta^{(r-2)}(t^1_{r-2}) < 0$, $\delta^{(r-2)}(t^2_{r-2}) > 0$ і $\delta^{(r-2)}(t^3_{r-2}) < 0$. Оскільки $\delta^{(r-2)}(-a) \ge 0$, то існують точки

$$-a < t^1_{r-1} < t^1_{r-2} < t^2_{r-1} < t^2_{r-2} < t^3_{r-1} < t^3_{r-2},$$

які задовольняють властивості

$$\begin{aligned} &\delta^{(r-2)}(t^1_{r-1}) = 0, \qquad \delta^{(r-1)}(t^1_{r-1}) < 0, \\ &\delta^{(r-2)}(t^2_{r-1}) = 0, \qquad \delta^{(r-1)}(t^2_{r-1}) > 0, \\ &\delta^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = 0, \qquad \delta^{(r-1)}(t^3_{r-1}) < 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Розглянемо три випадки.

Випадок 1. Нехай виконується нерівність (1). На підставі (9) при $i = 4$ і означення функції $\varphi(a,b,\cdot)$ (2) приходимо до висновку, що функція $\delta^{(r-1)}$ не може змінювати знак із мінуса на плюс на інтервалі $(-a,-b)$. Тому $t^2_{r-1} > -b$. Але тоді згідно з (11) на проміжку $(-b,0]$ функція $\delta^{(r-1)}$ змінює знак із плюса на мінус, що також неможливо.

Випадок 2. Нехай виконується нерівність (3). Як і у першому випадку, можна довести, що $t^2_{r-1} \notin (-a,-b)$, тому $t^2_{r-1} \in (-b,0)$; крім того, $t^3_{r-1} \notin (-b,-c)$, а отже, $t^3_{r-1} \in (-c,0)$.

На підставі (9) при $i = 4$ і означення функції $\varphi(a,b,\cdot)$ (4) приходимо до висновку, що функція $\delta^{(r-1)}$ не може змінювати знак із мінуса на плюс на інтервалі $(-c,0)$. Це означає, що для всіх $t \in (t^3_{r-1}, 0)$ виконується $\varphi_r^{(r-1)}(t) > x^{(r-1)}(t)$. Але тоді згідно з останнім зі співвідношень (11) і рівністю (7) маємо

$$x^{(r-2)}(0) - x^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = \int\limits_{t^3_{r-1}}^{0} x^{(r-1)}(s)ds < \int\limits_{t^3_{r-1}}^{0} \varphi_r^{(r-1)}(s)ds =$$

$$= \varphi_r^{(r-2)}(0) - \varphi_r^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = -\varphi_r^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = -x^{(r-2)}(t^3_{r-1}).$$

Тому $x^{(r-2)}(0) < 0$, а це суперечить тому, що $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$.

Випадок 3. Нехай виконується нерівність (5). Як і у першому випадку, можна довести, що $t^3_{r-1} \notin (-a, 2a-3b)$, а тому $t^3_{r-1} \in (2a-3b, 0)$. Крім того, як у другому випадку, можна довести, що $t^3_{r-1} \notin (2a-3b, 3a-4b)$, а отже, $t^3_{r-1} \in (3a-4b, 0)$.

Тоді за означенням функції $\varphi(a,b)$ (6)

$$\varphi_r^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = \varphi_r^{(r-1)}(t^3_{r-1}) = 0.$$

З останнього зі співвідношень (11) маємо $x^{(r-2)}(t^3_{r-1}) = 0$ і $x^{(r-1)}(t^3_{r-1}) < 0$. Але внаслідок неперервності функції $x^{(r-1)}$ функція $x^{(r-2)}$ спадає в деякому околі точки t^3_{r-1}, а отже, набуває від'ємних значень. Це суперечить тому, що $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$.

Лему доведено.

4. Деякі допоміжні результати.

Лема 3. *Нехай задано числа* $a_1 > a_2 > b \geq 0$ *і* $l > 0$. *Тоді для всіх* $0 \leq k \leq r-3$

$$\left\|\varphi_r^{(k)}(a_1, b, l)\right\| > \left\|\varphi_r^{(k)}(a_2, b, l)\right\|.$$

Достатньо довести, що

$$\varphi_r^{(r-2)}(a_1, b, l; t) \geq \varphi_r^{(r-2)}(a_2, b, l; t) \tag{12}$$

для всіх $t \in [-a_1, 0]$, тому що з цієї нерівності буде випливати нерівність $\varphi_r^{(k)}(a_1, b, l; t) > > \varphi_r^{(k)}(a_2, b, l; t)$ для всіх $t \in (-a_1, 0]$ і $k = 0, 1, \ldots, r-3$.

Покладемо

$$\delta(t) := \varphi_r^{(r-1)}(a_1, b, l; t) - \varphi_r^{(r-1)}(a_2, b, l; t) = l\big(\varphi(a_1, b; t) - \varphi(a_2, b; t)\big).$$

Якщо $a_2 > \sqrt{2}b$ (тобто для чисел a_2 і b виконується нерівність (1) і функція $\varphi(a_2, b)$ визначається за допомогою (2)), то $a_1 > \sqrt{2}b$, а тому $\delta(t) > 0$ на $(-a_1, 0]$. Звідси випливає нерівність (12).

Якщо $a_2 \leq \sqrt{2}b$, то згідно з (7) і (8) маємо $\varphi_r^{(r-2)}(a_2, b, l, 0) = 0$. Крім того, з побудови функцій $\varphi(a,b)$ випливає, що функція δ не може мати більше однієї зміни знака (і якщо зміна знака є, то вона з плюса на мінус). Отже, для функції $\Delta(t) := \varphi_r^{(r-2)}(a_1, b, l; t) - \varphi_r^{(r-2)}(a_2, b, l; t)$ маємо $\Delta(-a_1) = 0$ і $\Delta(0) \geq 0$. На підставі викладеного вище щодо $\delta = \Delta'$ отримуємо невід'ємність функції Δ, тобто справедливість (12).

Лему доведено.

Наступну лему можна довести, використавши міркування, аналогічні доведенню леми 2.

Лема 4. *Нехай задано функцію* $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ *і цілі числа* $0 \le k_1 < k_2 \le r-3,\ k_3 = r.$ *Нехай числа* $l > 0, a > 0$ *такі, що*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = \left\|\varphi_r^{(k_i)}(a,0,l)\right\|, \quad i = 2,3.$$

Тоді $\left\|x^{(k_1)}\right\| \ge \left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\right\|.$

Зауважимо, що для всіх $a, l > 0$ і $t \in \mathbb{R}_-$

$$\varphi_r(a,0,l;t) = \frac{l}{r!}(t+a)_+^r, \tag{13}$$

де для дійсного t покладено $t_+ := \max\{t,0\}$.

Справедливою є наступна лема, яка дає точну нерівність типу Колмогорова для класу $(r-2)$-монотонних функцій.

Лема 5. *Нехай задано функцію* $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ *і цілі числа* $0 \le k_1 < k_2 \le r-3,\ k_3 = r.$ *Тоді*

$$\left\|x^{(k_1)}\right\| \ge \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|x^{(k_2)}\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}.$$

Нерівність перетворюється в рівність на функціях $\varphi(a,0,l),\ a,l > 0.$

Враховуючи (13), отримуємо $\left\|\varphi_r^{(r)}(a,0,l)\right\| = l$, $\left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\right\| = \varphi_r^{(k_1)}(a,0,l;0) = l\dfrac{a^{r-k_1}}{(r-k_1)!}$, $\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,0,l)\right\| = l\dfrac{a^{r-k_2}}{(r-k_2)!}$. Тоді

$$\frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,0,l)\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|\varphi_r^{(r)}(a,0,l)\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}} =$$

$$= \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left(l\frac{a^{r-k_2}}{(r-k_2)!}\right)^{\frac{r-k_1}{r-k_2}} l^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}} = l\frac{a^{r-k_1}}{(r-k_1)!} = \left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\right\|,$$

і твердження про те, що функції $\varphi_r(a,0,l)$ перетворюють нерівність у рівність, доведено.

Покладемо

$$a = \left(\frac{(r-k_2)!\|x^{(k_2)}\|}{\|x^{(r)}\|}\right)^{\frac{1}{r-k_2}}, \quad l = \left\|x^{(r)}\right\|.$$

Тоді для $i = 2,3$ виконуються рівності $\left\|x^{(k_i)}\right\| = \left\|\varphi^{(k_i)}(a,0,l)\right\|$. Використовуючи лему 4, отримуємо

$$\left\|x^{(k_1)}\right\| \ge \left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\right\| =$$

$$= \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,0,l)\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|\varphi_r^{(r)}(a,0,l)\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}} =$$

$$= \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|x^{(k_2)}\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}.$$

Лему доведено.

5. Існування екстремальних функцій із заданими нормами похідних.

Лема 6. *Нехай задано цілі числа* $0 \leq k_1 < k_2 \leq r-3,\ k_3 = r$ *і додатні числа* $M_{k_1},\ M_{k_2}$, M_r *такі, що виконується нерівність*

$$M_{k_1} \geq \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!} M_{k_2}^{\frac{r-k_1}{r-k_2}} M_r^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}.$$

Тоді існують такі числа $l > 0,\ a > b \geq 0$, *що виконуються рівності*

$$\|\varphi_r^{(k_i)}(a,b,l)\| = M_{k_i}, \quad i = 1,2,3. \tag{14}$$

Можна вважати, що $M_r = l = 1$, і замість $\varphi_r(a,b,1)$ будемо писати $\varphi_r(a,b)$.

Для кожного $b \geq 0$ існує число $a = a(b)$ таке, що

$$\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a(b),b)\right\| = M_{k_2}. \tag{15}$$

Дійсно, при фіксованому b $\psi(a) := \left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,b)\right\|$ є неперервною функцією змінної a. Крім того, $\lim_{a\to b+0}\psi(a) = 0$, а отже, при a, достатньо близькому до b,

$$\psi(a) < M_{k_2}. \tag{16}$$

Спрямуємо тепер a до ∞. Тоді виконується нерівність (1), а отже, функція $\varphi(a,b)$ має вигляд (2). Тоді

$$\lim_{a\to\infty}\psi(a) = \infty. \tag{17}$$

З (16) і (17) та неперервності функції ψ випливає, що існує число $a = a(b)$ таке, що $\psi(a(b)) = M_{k_2}$. Крім того, з леми 3 випливає, що таке число єдине. Таким чином, на проміжку $[0,\infty)$ ми визначили функцію $a(b)$ таку, що для всіх $b \geq 0$ виконується рівність (15). При цьому функція $a(b)$ є неперервною внаслідок неперервної залежності $\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,b)\right\|$ від a, b і леми 3.

Покажемо, що існує $b \geq 0$ таке, що виконується

$$\left\|\varphi_r^{(k_1)}(a(b),b)\right\| = M_{k_1}.$$

Покладемо $\eta(b) := \left\|\varphi_r^{(k_1)}(a(b),b)\right\|$. За лемою 5 $\eta(0) = \dfrac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!} M_{k_2}^{\frac{r-k_1}{r-k_2}} M_r^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}$, а отже, на підставі умови леми

$$\eta(0) \leq M_{k_1}. \tag{18}$$

Покажемо, що

$$\lim_{b\to\infty}\eta(b) = \infty. \tag{19}$$

Оскільки виконується рівність (15), то величина $\|\varphi_r^{(k_2)}(a(b),b)\|$ обмежена, а отже, за визначенням функцій $\varphi(a,b,l;t)$ величина $a(b)-b$ є обмеженою. Тому

$$\lim_{b\to+\infty}(3a(b)-4b) = \lim_{b\to+\infty}(4(a(b)-b)-a(b)) = -\infty. \tag{20}$$

Крім того, оскільки величина $a(b)-b$ обмежена, то при достатньо великих b виконується нерівність (5). Тому при достатньо великих b функція $\varphi(a,b)$ має вигляд (6), а отже, звуження $p(b;t)$ функції $\varphi(a(b),b;t)$ на відрізок $[3a-4b,0]$ є поліномом степеня $r-2$. Крім того,

$$\max_{t\in[-4b+3a;0]}\left|p^{(k_2)}(b;t)\right| = p^{(k_2)}(b;0) = M_{k_2} > 0. \tag{21}$$

Тепер, застосовуючи нерівність Маркова для алгебраїчних поліномів (див. [9, 10]) і враховуючи (20), (21), отримуємо

$$\lim_{b\to\infty}\max_{t\in[-4b+3a;0]}\left|p^{(k_1)}(b;t)\right| = \infty.$$

Звідси випливає справедливість (19). Залишилось врахувати (18), (19) і неперервність функції η.

Лему доведено.

Зауваження. При виконанні умов леми 6 покладемо

$$\Phi(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}; t) = \phi(a, b, l; t), \tag{22}$$

де числа $a,\ b,\ l$ вибрано так, щоб виконувались рівності (14).

6. Розв'язок задачі Колмогорова.

Теорема. *Нехай задано цілі числа* $0 = k_1 \le k_2 < k_3 \le r-3,\ k_4 = r$ *і додатні числа* M_{k_1}, $M_{k_2},\ M_{k_3},\ M_{k_4}$. *Існує функція* $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ *така, що*

$$\|x^{(k_i)}(a,b,l)\| = M_{k_i}, \quad i = 1,2,3,4, \tag{23}$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$M_{k_2} \ge \frac{(r-k_3)!^{\frac{r-k_2}{r-k_3}}}{(r-k_2)!} M_{k_3}^{\frac{r-k_2}{r-k_3}} M_r^{\frac{k_2-k_3}{r-k_3}} \tag{24}$$

і

$$M_{k_1} \ge \left\|\Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r)\right\|, \tag{25}$$

де $\Phi(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}; t)$ *визначено в* (22).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $x \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і виконуються рівності (23). Тоді для чисел $M_{k_2},\ M_{k_3},\ M_{k_4}$ за лемою 5 виконується нерівність (24). За лемою 6 існують числа $a, b, l > 0$ такі, що

$$\|\varphi^{(k_i)}(a,b,l)\| = M_{k_i}, \quad i = 2,3,4.$$

Отже, за лемою 2 $\left\|\Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r)\right\| = \|\varphi(a,b,l)\| \le \|x\|$. З цього випливає (25).

Достатність. При виконанні умов (24), (25) достатньо розглянути функцію $x = \Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r) + M_{k_1} - \left\|\Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r)\right\| \in L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$. Для неї виконуються рівності (23).

Теорему доведено.

Література

1. *Babenko V., Babenko Yu.* The Kolmogorov inequalities for multiply monotone functions defined on a half-line // East J. Approxim. – 2005. – **11**, № 2. – P. 169 – 186.
2. *Babenko V., Babenko Yu.* On the Kolmogorov's problem for the upper bounds of four consecutive derivatives of a multiply monotone function // Constr. Approxim. – 2007. – **26**, № 1. – P. 83 – 92.
3. *Babenko V., Babenko Yu., Kovalenko O.* Kolmogorov's problem on the class of multiply monotone functions // Adv. Math. – 2015. – **280**. – P. 256 – 281.
4. *Боссе Ю. К.* (*Шилов Г. Е.*) О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков Моск. ун-та. – 1937. – С. 17 – 27.
5. *Hadamard J.* Sur le maximum d'une fonction et de ses derivees // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. France. – 1914. – **41**. – P. 68 – 72.

6. *Коваленко О. В.* Задача Колмогорова на классе кратно монотонных функций // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 140 – 147.
7. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных произвольных функций на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
8. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
9. *Марков В. А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – СПб, 1892.
10. *Марков А. А.* Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Изв. Петербург. академии наук. –1889. – **62**. – С. 1 – 24.
11. *Оловянишников В. М.* О неравенствах для верхних граней последовательностей производных на полуоси // Успехи мат. наук. – 1951. – **42**, № 2. – С. 167 – 170.
12. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Неравенства для производных монотонных функций // Приближение функций. Теор. и прикл. аспекты: Сб. ст., посвящ. памяти проф. А. В. Ефимова. — М.: Моск. ин-т электрон. техники, 2003. – С. 199 – 211.
13. *Schoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau’s problem, concerning higher derivatives on half line // M. R. C. Techn. Summary Rept. – 1970.
14. *Ятцелев М. Л.* Неравенство между четырьмя верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 1999. – **4**. – С. 106 – 111.

Одержано 08.09.17