УДК 517.53

М. В. Заболоцький, Ю. В. Басюк, С. І. Тарасюк (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ З НУЛЯМИ НА ЛОГАРИФМІЧНІЙ СПІРАЛІ

We prove the Valiron-type and Valiron – Titchmarsh-type theorems for entire functions of order zero with zeros on a logarithmic spiral.

Доказаны теоремы типа Валирона и Валирона – Титчмарша для целых функций нулевого порядка с нулями на логарифмической спирали.

1. Вступ. Нехай f — ціла трансцендентна (далі ціла) функція порядку $\rho,\ 0 \le \rho < \infty,\ f(0) = 1,$ $n(r) = n(r, 0, f)$ — лічильна функція послідовності $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ її нулів, $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots \to \infty,$ $n \to +\infty,\ \rho(r)$ — уточнений порядок, $N(r) = N(r, 0, f) = \displaystyle\int_0^r n(t)/t dt.$

Якщо нулі функції f розташовані на промені $l_\psi = \{z : |z| \ge |a_1|, \arg z = \psi\}$,

$$n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}, \qquad r \to \infty, \tag{1}$$

$0 < \Delta < +\infty$, а число $\rho = \lim_{r\to\infty} \rho(r)$ є нецілим, то для всіх $\varphi,\ \psi < \varphi < \psi + 2\pi$, виконується (див., наприклад, [1, с. 94])

$$\ln f(re^{i\varphi}) \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho}\, e^{i\rho(\varphi-\psi-\pi)} r^{\rho}(r), \qquad r \to \infty,$$

де $\ln f(z)$ — однозначна в області $D(l_\psi) = \mathbb{C} \setminus l_\psi$ гілка багатозначної функції Ln $f(z)$, $\ln f(0) = 0$. Аналогічні співвідношення для $\ln f(z)$ отримано і у випадку цілого додатного порядку ρ [1, с. 108, 109].

У випадку $\rho(r) = \rho,\ 0 < \rho < 1$, вищенаведене твердження було доведено ще в 1913 р. Ж. Валіроном [2]. У [2] також доведено: якщо f — ціла функція порядку $\rho,\ 0 < \rho < 1$, з нулями на промені l_ψ і

$$\ln \left| f(re^{i(\psi+\pi)}) \right| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho}\, r^{\rho(r)}, \qquad r \to \infty,$$

то $n(r) \sim \Delta r^{\rho}$, $r \to \infty$. Пізніше простіше доведення цього твердження навів Е. Тітчмарш [3]. Теореми, в яких за відомою асимптотикою функції $n(r)$ робиться висновок про асимптотику функції $\ln f(z)$, називають теоремами типу Валірона, а обернені до них твердження — теоремами типу Валірона – Тітчмарша. В [4 – 6] отримано теореми типу Валірона – Тітчмарша для цілих функцій довільного додатного порядку ρ.

В 1996 р. М. В. Заболоцький [7] отримав теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку. Нехай $\lambda(r)$ — такий нульовий уточнений порядок, що $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty$ при $r \to +\infty,\ \varepsilon(r) = r\left(r^{\lambda(r)}\right)' / r^{\lambda(r)} = \lambda(r) + r\lambda'(r)\ln r \to 0,\ r \to +\infty$. Якщо f — ціла функція нульового порядку з нулями на промені l_ψ, $0 < \Delta < +\infty$ і

$$n(r) = \Delta r^{\lambda(r)} + o(\varepsilon(r) r^{\lambda(r)}), \qquad r \to \infty, \tag{2}$$

то для всіх $\varphi, \quad \psi < \varphi < \psi + 2\pi,$ маємо

$$\ln f(re^{i\varphi}) = \Delta \int_1^r t^{\lambda(t)-1}\, dt + i\Delta(\varphi - \psi - \pi) r^{\lambda(r)} + o(r^{\lambda(r)}), \qquad r \to \infty, \tag{3}$$

до того ж оцінка (3) виконується рівномірно щодо $\varphi \in [\psi + \delta; \psi + 2\pi - \delta],\ \delta > 0.$

Навпаки, нехай f — ціла функція нульового порядку з нулями на промені l_ψ і

$$\ln \left| f(re^{i(\psi+\pi)}) \right| = \Delta \int_1^r t^{\lambda(t)-1}\, dt + o(r^{\lambda(r)}), \qquad r \to \infty. \tag{4}$$

Тоді $n(r) \sim \Delta r^{\lambda(r)},\ r \to \infty.$

Якщо нулі функції f замість (2) задовольняють умову

$$n(r) \sim \Delta r^{\lambda(r)}, \qquad r \to \infty,$$

то для всіх $\varphi, \quad \psi < \varphi < \psi + 2\pi,$ виконується

$$\ln f(re^{i\varphi}) = N(r) + i\Delta(\varphi - \psi - \pi) r^{\lambda(r)} + o(r^{\lambda(r)}), \qquad r \to \infty.$$

У статті [7] також показано, що в теоремі типу Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку умову (4) не можна замінити умовою

$$\ln \left| f(re^{i(\psi+\pi)}) \right| = N(r) + o(r^{\lambda(r)}), \qquad r \to \infty.$$

С. К. Балашов [8] отримав теорему типу Валірона для функцій f додатного порядку ρ з нулями на логарифмічній спіралі $L_\psi^c = \left\{ z : z = re^{i(\psi + c\ln r)},\ r \geq 1 \right\}, c \in \mathbb{R}$. У випадку нецілого ρ для таких функцій f за умови (1) для всіх $\varphi,\ \psi < \varphi < \psi + 2\pi,$ виконується

$$\ln f(re^{i(\varphi + c\ln r)}) \sim \frac{\pi\Delta \exp\left(i\, \dfrac{\rho}{1+ic}\, (\varphi - \psi - \pi) \right)}{\sin \dfrac{\pi\rho}{1+ic}}\, r^{\rho(r)}, \qquad r \to \infty.$$

Теореми типу Валірона – Тітчмарша для цілих функцій додатного порядку з нулями на логарифмічній спіралі отримано в [9].

У даній статті ми доведемо теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку з нулями на логарифмічній спіралі.

2. Означення та формулювання результатів. Додатні, зростаючі, необмежені, неперервно диференційовні на $[0;+\infty)$ функції будемо називати функціями зростання. Функції зростання v та $\tilde{v}$ такі, що $v(r)\sim\tilde{v}(r)$, $r\to\infty$, називатимемо еквівалентними і будемо ототожнювати. Через $\mathcal{L}$ позначимо клас функцій зростання v, для яких $rv'(r)/v(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Відомо [10, с. 15], що з точністю до еквівалентних функцій клас $\mathcal{L}$ збігається з класом повільно зростаючих функцій, тобто неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ на $[0;+\infty)$ функцій β таких, що $\beta(2r)\sim\beta(r)$, $r\to\infty$. Зауважимо також, що функції v з класу $\mathcal{L}$ мають нульовий порядок, а саме $\lim_{r\to\infty}\ln^+ v(r)/\ln r=0$. Легко бачити, що:

а) якщо $v\in\mathcal{L}$, то $\lambda(r):=\ln^+ v(r)/\ln r$ є нульовим уточненим порядком;

б) якщо $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок, то $v(r)=r^{\lambda(r)}\in\mathcal{L}$.

Позначимо через $\tilde{\mathcal{H}}_0(v)$ клас цілих функцій нульового порядку, лічильна функція нулів яких задовольняє умову $n(r)\sim\Delta v(r)$, $r\to\infty$, де $0<\Delta<+\infty$.

Нехай $\ln f(z)$ — однозначна гілка в області $D(L^c_\psi)=\mathbb{C}\setminus L^c_\psi$ багатозначної функції $\mathrm{Ln} f(z)$, $\ln f(0)=0$.

Теорема 1. *Нехай $v\in\mathcal{L}$, $f\in\tilde{\mathcal{H}}_0(v)$ — ціла функція нульового порядку, нулі якої розташовані на логарифмічній спіралі L^c_ψ, $-\pi\le\psi<\pi$. Тоді для всіх φ, $\psi<\varphi<\psi+2\pi$, маємо*

$$\ln f\left(re^{i(\varphi+c\ln r)}\right)=(1+ic)N(r)+i\Delta(\varphi-\psi-\pi)v(r)+o(v(r)),\qquad r\to\infty,\tag{5}$$

до того ж оцінка (5) *виконується рівномірно щодо $\varphi\in\psi+\delta,\ \psi+2\pi-\delta$, $\delta>0$.*

Теорема 2. *Нехай $v\in\mathcal{L}$, f — ціла функція нульового порядку з нулями на логарифмічній спіралі L^c_ψ, для якої виконується співвідношення* (5). *Тоді f належить $\tilde{\mathcal{H}}_0(v)$.*

3. Допоміжні результати. Для доведення теорем 1, 2 будемо використовувати результати, які сформулюємо у вигляді лем. Позначимо $L^c_\psi(a,b)=\left\{z: z=re^{i(\psi+c\ln r)}, 1\le a\le r\le b\right\}$, $L^c_\psi(1,+\infty)=L^c_\psi$, де $\psi\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $v(r)=0$ при $0\le r\le 1$.

Лема 1. *Нехай $v\in\mathcal{L},\varepsilon(t)$ — кусково-неперервна, невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Тоді для $z=re^{i(\varphi+c\ln r)}$, $-\pi<\varphi<\pi$,*

$$I_1=\int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)}\frac{\varepsilon(|w|)v(|w|)}{w-z}\,dw=o(v(r)),\qquad r\to+\infty,$$

$$I_2=z\int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)}\frac{\varepsilon(|w|)v(|w|)}{w(w-z)}\,dw=o(v(r)),\qquad r\to+\infty,$$

до того ж ці оцінки виконуються рівномірно щодо $\varphi\in[-\pi+\delta;\pi-\delta]$, $\delta>0$.

Доведення. Покажемо спочатку, що при $0\le t<+\infty$

$$\left|te^{ic\ln t}+re^{i(\varphi+c\ln r)}\right|\ge(t+r)\delta_1\tag{6}$$

для всіх $\varphi\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$, де $\delta_1=\min\left\{\sin\dfrac{\delta}{4},\dfrac{\delta}{2|c|(e^{\delta/(2|c|)}+1)}\right\}$.

Покладемо $x=t/r$. Тоді

$$\frac{\left|te^{ic\ln t}+re^{i(\varphi+c\ln r)}\right|}{t+r}=\frac{\left|xe^{ic\ln x}+e^{i\varphi}\right|}{x+1},\ 0\le x<+\infty.$$

Якщо $0 < x \le e^{-\delta/(2|c|)}$, то

$$\frac{\left|xe^{ic\ln x} + e^{i\varphi}\right|}{x+1} \ge \frac{1-x}{x+1} \ge \frac{1-e^{-\delta/(2|c|)}}{1+e^{-\delta/(2|c|)}} \ge \frac{\delta/(2|c|)}{e^{\delta/(2|c|)}+1} \ge \delta_1.$$

Нехай $e^{\delta/(2|c|)} \le x < +\infty$. Тоді

$$\frac{\left|xe^{ic\ln x} + e^{i\varphi}\right|}{x+1} \ge \frac{x-1}{x+1} \ge 1 - \frac{2}{x+1} \ge 1 - \frac{2}{e^{\delta/(2|c|)}+1} \ge \frac{\delta/(2|c|)}{e^{\delta/(2|c|)}+1} \ge \delta_1.$$

Нарешті, якщо $e^{-\delta/(2|c|)} < x < e^{\delta/(2|c|)}$, то для $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$ маємо

$$\varphi - c\ln x \ge -\pi + \delta - |c\ln x| \ge -\pi + \delta - |c|\ln e^{\delta/(2|c|)} = -\pi + \frac{\delta}{2}$$

і

$$\varphi - c\ln x \le \pi - \delta + |c\ln x| \le \pi - \delta + |c|\ln e^{\delta/(2|c|)} = \pi - \frac{\delta}{2}.$$

Отже, $|\tilde{\varphi}| = |\varphi - c\ln x| \le \pi - \dfrac{\delta}{2}$ і, враховуючи нерівність (див., наприклад, [1, с. 92]) $|x + e^{i\theta}| \ge (x+1)\sin(\eta/2)$ для $x \ge 0$ і $|\theta| \le \pi - \eta$, $\eta > 0$, отримуємо

$$\frac{\left|xe^{ic\ln x} + e^{i\varphi}\right|}{x+1} = \frac{\left|x + e^{i\tilde{\varphi}}\right|}{x+1} \ge \sin\frac{\delta}{4} \ge \delta_1,$$

що доводить нерівність (6).

Нехай $w = te^{i(-\pi + c\ln t)}$, $t \in (1, r)$, — рівняння кривої $L^c_{-\pi}(1, r)$. Тоді

$$I_1 = (1+ic)\int\limits_1^r \frac{\varepsilon(t)v(t)e^{ic\ln t}dt}{te^{ic\ln t} + re^{i(\varphi + c\ln r)}}.$$

Далі, завдяки (6), як при доведенні леми 1 із [7], для $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$ отримуємо

$$|I_1| \le \frac{\sqrt{1+c^2}}{\delta_1}\int\limits_1^r \frac{\varepsilon(t)v(t)}{t+r}\,dt = o(v(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Нехай $w = te^{i(-\pi + c\ln t)}$, $t \in (r, +\infty)$, — рівняння кривої $L^c_{-\pi}(r, +\infty)$. Тоді

$$I_2 = -(1+ic)\cdot re^{i(\varphi + c\ln r)}\int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)v(t)dt}{t\left(te^{ic\ln t} + re^{i(\varphi + c\ln r)}\right)}.$$

Враховуючи (6) та міркування леми 1 із [7] для $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$, маємо

$$|I_2| \le \frac{\sqrt{1+c^2}}{\delta_1}\, r\int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)v(t)}{t(t+r)}\,dt = o(v(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Лему 1 доведено.

Для $\tilde{v} \in \mathcal{L}$ приймемо $v(r) = \int_1^r \dfrac{\tilde{v}(t)}{t}\, dt$. Легко бачити, що $v \in \mathcal{L}$ і $\tilde{v}(r) = o(v(r)), r \to +\infty$. Покладемо

$$a_k(r, \tilde{v}) = \frac{1}{k+1} \int\limits_1^r \tilde{v}(t)\, t^k e^{i(k+1)c\ln t}\, dt,$$

$$b_k(r, \tilde{v}) = \frac{1}{k+1} \int\limits_r^{+\infty} \tilde{v}(t)\, t^{-k-2} e^{-i(k+1)c\ln t}\, dt.$$

Лема 2. *Нехай* $\tilde{v} \in \mathcal{L}$. *Тоді для* $z = re^{i(\varphi + c\ln r)}$, $-\pi < \varphi < \pi$, *виконується*

$$I_3 = \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{v(|w|)}{w-z}\, dw = \ln(1 + e^{-i\varphi}) v(r) + \sum\nolimits_1,$$

$$I_4 = z \int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{v(|w|)}{w(w-z)}\, dw = -\ln(1 + e^{i\varphi}) v(r) + \sum\nolimits_2,$$

де

$$\sum\nolimits_1 = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, a_k(r,\tilde{v})}{z^{k+1}}, \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, b_k(r,\tilde{v})}{z^{-k-1}}.$$

Доведення. Як і при доведенні леми 1,

$$I_3 = (1+ic) \int\limits_1^r \frac{v(t) e^{ic\ln t} dt}{te^{ic\ln t} + re^{i(\varphi + c\ln r)}} =$$

$$= (1+ic) \int\limits_1^r \frac{v(t)\, dt}{t + re^{i(\varphi + c\ln(r/t))}} = (1+ic) \int\limits_1^r \frac{v(t)}{re^{i(\varphi + c\ln(r/t))}} \left(1 + \frac{t}{re^{i(\varphi + c\ln(r/t))}}\right)^{-1} dt =$$

$$= (1+ic) \int\limits_1^r \frac{v(t)}{re^{i(\varphi + c\ln(r/t))}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{t}{r}\right)^k e^{-ik(\varphi + c\ln(r/t))}\right) dt =$$

$$= (1+ic) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{r^{k+1} e^{i(k+1)(\varphi + c\ln r)}} \int\limits_1^r v(t) t^k\, e^{i(k+1)c\ln t}\, dt =$$

$$= (1+ic) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{r^{k+1} e^{i(k+1)(\varphi + c\ln r)}}\, A_k(r, v),$$

де $A_k(r, v) = \int_1^r v(t) t^k\, e^{i(k+1)c\ln t}\, dt$. Тут почленне інтегрування степеневого ряду обґрунтовується, як у [7, с. 318]. Враховуючи, що

$$A_k(r,v) = v(t)\, e^{i(k+1)c\ln t}\, \frac{t^{k+1}}{k+1}\bigg|_1^r - \frac{1}{k+1}\int\limits_1^r t^{k+1}\, e^{i(k+1)c\ln t}\left(v'(t) + i(k+1)c\,\frac{v(t)}{t}\right)\, dt =$$

$$= v(r)\, e^{i(k+1)c\ln r}\, \frac{r^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int\limits_1^r \tilde{v}(t)\, t^k e^{i(k+1)c\ln t}\, dt - icA_k(r,v),$$

маємо

$$A_k(r,v) = \frac{1}{1+ic}\left(v(r)\, e^{i(k+1)c\ln r}\, \frac{r^{k+1}}{k+1} - a_k(r,\tilde{v})\right).$$

Отже,

$$I_3 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} e^{-i(k+1)\varphi}\right) v(r) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}}\, a_k(r,\tilde{v}) = \ln(1+e^{-i\varphi})v(r) + \sum\nolimits_1 .$$

Аналогічно показуємо, що $I_4 = -\ln(1+e^{i\varphi})v(r) + \sum_2 .$

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай $\tilde{v} \in \mathcal{L}$, $\sum_1$, $\sum_2$ — такі, як у лемі 2. Тоді для $z = re^{i(\varphi + c\ln r)}$, рівномірно щодо φ на множині $-\pi < \varphi < \pi$, виконується*

$$\sum\nolimits_1 = o(v(r)), \quad \sum\nolimits_2 = o(v(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Доведення. Маємо

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k(r,\tilde{v})|}{r^{k+1}} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^*(r,\tilde{v})}{r^{k+1}}, \qquad \left|\sum\nolimits_2\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|b_k(r,\tilde{v})|}{r^{k+1}} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k^*(r,\tilde{v})}{r^{k+1}},$$

де

$$a_k^*(r,\tilde{v}) = \frac{1}{k+1}\int\limits_1^r \tilde{v}(t)\, t^k\, dt, \quad b_k^*(r,\tilde{v}) = \frac{1}{k+1}\int\limits_1^r \tilde{v}(t)\, t^{-k-2}\, dt.$$

Оскільки $\tilde{v}(r) = o(v(r)),\ r \to +\infty$, то завдяки лемі 3 з [7] отримуємо

$$\sum\nolimits_i = o(v(r)), \qquad r \to +\infty, \quad i = 1, 2,$$

що доводить лему 3.

Нагадаємо, що множина $E \subset \mathbb{R}_+$ називається E_0-множиною, якщо E — вимірна множина і $\operatorname{mes}(E \cap [0,r]) = o(r),\ r \to +\infty$.

З лем 4 та 5 роботи [11] отримуємо таке твердження.

Лема 4. *Нехай $v \in \mathcal{L}$, $\delta > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, f — ціла функція нульового порядку, $n(r) \le Kv(r)$, $r \ge 0$, де $K > 0$ — стала. Тоді існує E_0-множина E така, що*

$$r\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi = O(v(r))\left(\delta + \delta\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right), \qquad r \to +\infty, \quad r \notin E.$$

4. Доведення теорем 1, 2. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що нулі цілої функції f розташовані на логарифмічній спіралі $L^c_{-\pi}$ і $|a_1| > 1$.

***Доведення теореми* 1.** За умов теореми 1 для $z = re^{i(\varphi + c\ln r)}$, $-\pi < \varphi < \pi$, маємо

$$\ln f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = \int\limits_{L^c_{-\pi}} \ln\left(1 - \frac{z}{w}\right) dn(|w|) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{z}{w}\right) n(|w|)\Big|_{w \in L^c_{-\pi}} - z \int\limits_{L^c_{-\pi}} \frac{n(|w|)}{w(w-z)}\, dw =$$

$$= \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{n(|w|)}{w}\, dw - \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} n(|w|)\left(\frac{z}{w(w-z)} + \frac{1}{w}\right) dw -$$

$$-z \int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{n(|w|)}{w(w-z)}\, dw = \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{n(|w|)}{w}\, dw - \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{n(|w|)}{w-z}\, dw -$$

$$-z \int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{n(|w|)}{w(w-z)}\, dw = J_1 + J_2 + J_3. \tag{7}$$

Нехай $w = te^{i(-\pi + c\ln t)}$, $1 \le t \le r$, — рівняння кривої $L^c_{-\pi}(1,r)$. Тоді, враховуючи леми 1 – 3, одержуємо

$$J_1 = (1 + ic) \int\limits_1^r \frac{n(t)}{t}\, dt = (1 + ic) N(r), \tag{8}$$

$$J_2 = -\int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{n(|w|) - \Delta v(|w|)}{w - z}\, dw - \Delta \int\limits_{L^c_{-\pi}(1,r)} \frac{v(|w|)}{w - z}\, dw = -I_1 - \Delta I_3 =$$

$$= -I_1 - \Delta \ln(1 + e^{-i\varphi}) v(r) - \Delta \sum\nolimits_1 = -\Delta \ln(1 + e^{-i\varphi}) v(r) + o(v(t)), \quad r \to +\infty. \tag{9}$$

Якщо $w = te^{i(-\pi + c\ln t)}$, $r \le t < +\infty$, — рівняння кривої $L^c_{-\pi}(r, +\infty)$, то завдяки лемам $1 - 3$ отримуємо

$$J_3 = -z \int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{n(|w|) - \Delta v(|w|)}{w(w - z)}\, dw - z\Delta \int\limits_{L^c_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{v(|w|)}{w(w - z)}\, dw = -I_2 - \Delta I_4 =$$

$$= -I_2 + \Delta \ln(1 + e^{i\varphi}) v(r) - \Delta \sum\nolimits_2 + o(v(t)) = \Delta \ln(1 + e^{i\varphi}) v(r) + o(v(t)), \qquad r \to +\infty. \tag{10}$$

Отже, підставляючи (8) – (10) у (7), маємо

$$\ln f\left(re^{i(\varphi + c\ln r)}\right) = (1 + ic) N(r) + \Delta \ln \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 + e^{-i\varphi}}\, v(r) + o(v(r)) =$$

$$= (1+ic)N(r) + i\Delta\varphi\, v(r) + o(v(r)), \qquad r\to\infty, \tag{11}$$

що доводить теорему 1 у випадку $\psi = -\pi$.

Нехай нулі функції f розташовані на логарифмічній спіралі L^c_ψ, $-\pi < \psi < \pi$. Якщо виконати поворот площини за годинниковою стрілкою на кут $(\pi+\psi)$, тобто замінити у співвідношенні (11) φ величиною $\varphi-\psi-\pi$, то отримаємо, що для довільного $\delta>0$ рівномірно щодо φ, $\psi+\delta\le\varphi\le\psi+2\pi-\delta$, виконується

$$\ln f\left(re^{i(\varphi+c\ln r)}\right) = (1+ic)N(r) + i\Delta(\varphi-\psi-\pi)\, v(r) + o(v(r)), \quad r\to\infty.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми **2.** Нехай $r\notin\Omega$, де $\{\Omega = |a_n| : n\in\mathbb{N}\}$, a_n — нулі функції f. Позначимо $G(\alpha,\beta,r) = \bigcup\limits_{\alpha\le\theta\le\beta} L^c_\theta(1,r)$, де $0\le\alpha<\pi<\beta<2\pi$. Тоді $\partial G(\alpha,\beta,r) = L^c_\alpha(1,r)\cup$ $\cup\Gamma(\alpha,\beta,r)\cup\left(L^c_\beta(1,r)\right)^{-1}\cup(\Gamma(\alpha,\beta,1))^{-1}$, де $\Gamma(\alpha,\beta,t) = \{z : |z| = t, \alpha + c\ln t\le\arg z\le$ $\le\beta + c\ln t\}$. Враховуючи, що нулі функції f розташовані на логарифмічній спіралі $L^c_{-\pi}$, за основною теоремою про лишки маємо

$$2\pi i\, n(r) = \int\limits_{\partial G(\alpha,\beta,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \left(\int\limits_{L^c_\alpha(1,r)} + \int\limits_{\Gamma(\alpha,\beta,r)} - \int\limits_{L^c_\beta(1,r)} - \int\limits_{\Gamma(\alpha,\beta,1)}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\, dz =$$

$$= (1+ic)\int\limits_1^r \frac{f'(te^{i(\alpha+c\ln t)})}{f(te^{i(\alpha+c\ln t)})}\, e^{i(\alpha+c\ln t)}\, dt + \int\limits_\alpha^\beta \frac{f'(re^{i(\theta+c\ln r)})}{f(re^{i(\theta+c\ln r)})}\, re^{i(\theta+c\ln t)}\, id\theta -$$

$$-(1+ic)\int\limits_1^r \frac{f'(te^{i(\beta+c\ln t)})}{f(te^{i(\beta+c\ln t)})}\, e^{i(\beta+c\ln t)}\, dt - \int\limits_\alpha^\beta \frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}\, e^{i\theta}\, id\theta = \ln f(re^{i(\alpha+c\ln r)}) +$$

$$+\left(\int\limits_\alpha^{\pi-\delta} + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} + \int\limits_{\pi+\delta}^{\beta}\right)\frac{f'(re^{i(\theta+c\ln r)})}{f(re^{i(\theta+c\ln r)})}\, re^{i(\theta+c\ln t)}\, id\theta - \ln f(re^{i(\beta+c\ln r)}) + C,$$

де $C = -\ln f(e^{i\alpha}) + \ln f(e^{i\beta}) - \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}\, e^{i\theta}\, id\theta.$

Далі,

$$\left(\int\limits_\alpha^{\pi-\delta} + \int\limits_{\pi+\delta}^{\beta}\right)\frac{f'(re^{i(\theta+c\ln r)})}{f(re^{i(\theta+c\ln r)})}\, re^{i(\theta+c\ln t)}\, id\theta + \ln f(re^{i(\alpha+c\ln r)}) - \ln f(re^{i(\beta+c\ln r)}) =$$

$$= \ln f(re^{i((\pi-\delta)+c\ln r)}) - \ln f(re^{i((\pi+\delta)+c\ln r)}).$$

Тому з останніх співвідношень отримуємо

$$2\pi i\, n(r) = \ln f(re^{i((\pi-\delta)+c\ln r)}) - \ln f(re^{i((\pi+\delta)+c\ln r)}) + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}\frac{f'(re^{i(\theta+c\ln r)})}{f(re^{i(\theta+c\ln r)})}\, re^{i(\theta+c\ln t)}\, id\theta + C. \tag{12}$$

З (5) для $\psi = -\pi$ маємо

$$\ln f(re^{i((\pi-\delta)+c\ln r)}) = (1+ic)N(r) + i\Delta(\pi-\delta)v(r) + o(v(r)), \quad r\to\infty,$$
$$\ln f(re^{i((\pi+\delta)+c\ln r)}) = (1+ic)N(r) + i\Delta(\pi+\delta-2\pi)v(r) + o(v(r)), \quad r\to\infty.$$

Звідси з урахуванням (12) одержуємо

$$2\pi i\, n(r) = i\Delta(\pi-\delta)\, v(r) - i\Delta(-\pi+\delta)\, v(r) + I_5 + o(v(r)) =$$
$$= i\Delta(2\pi - 2\delta)\, v(r) + I_5 + o(v(r)),\ r\to+\infty,$$

де $I_5 = \displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \frac{f'(re^{i(\theta+c\ln r)})}{f(re^{i(\theta+c\ln r)})}\, re^{i(\theta+c\ln t)}\, id\theta.$

Далі, враховуючи лему 4, маємо

$$|I_5| \le r\int\limits_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi = O(v(r))\left(\delta + \delta\ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right),\ r\to+\infty,\ r\notin E,$$

де E — деяка E_0-множина.

З останніх співвідношень отримуємо

$$\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{n(r)}{v(r)} = \Delta\left(1-\frac{\delta}{\pi}\right) + K\left(\delta+\delta\ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right),$$

де $K>0$ — деяка стала. Звідси, спрямовуючи δ до $0+$, маємо

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{n(r)}{v(r)} = \Delta.$$

Оскільки міра множини E дорівнює 0, то будь-який інтервал $(R,(1+\eta)R)$ при $\eta>0$, $R>R_0$, містить точки, що не належать множині E. Враховуючи монотонність функції $n(r)$, для довільного $r>R_0,\ r(1-\eta)<r_1<r<r_2<r(1+\eta),\ r_1,\ r_2\notin E$, одержуємо

$$\frac{n(r_1)}{v(r_1)}\frac{v(r_1)}{v(r)} \le \frac{n(r)}{v(r)} \le \frac{n(r_2)}{v(r_2)}\frac{v(r_2)}{v(r)}.$$

Оскільки $v(r)$ — повільно зростаюча функція, то $v(r_2)\sim v(r)\sim v(r_1),\ r\to+\infty$. Отже, з останнього співвідношення отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{n(r)}{v(r)} = \Delta,$$

що доводить теорему 2.

Література

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d’ordre nul et d’ordre fini, et en particulier sur les fonctions a correspondance reguliere // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1913. – **5**, № 3. – P. 117 – 257.

3. *Titchmarsh E. C.* On integral functions with real negative zeros // Proc. London Math. Soc. – 1927. – **26**, № 2. – P. 185 – 200.
4. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 267 с.
5. *Bowen N. A.* A function theory proof of Tauberian theorem on integral functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1948. – **19**. – P. 90 – 100.
6. *Delange H.* Un theoreme sur les fonctions entieres a zeros reels et negatifs // J. Math. Pures et Appl. – 1952. – **31**, № 1. – P. 55 – 78.
7. *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 315 – 325.
8. *Балашов С. К.* О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 3. – С. 603 – 629.
9. *Хейфиц А. И.* Аналог теоремы Валирона – Титчмарша для целых функций с корнями на логарифмической спирали // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 12. – С. 74 – 75.
10. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
11. *Zabolotskii N. V.* Strongly regular growth of entire functions of order zero // Math. Notes. – 1998. – **63**, № 2. – P. 172 – 182.

Одержано 22.06.17,
після доопрацювання — 22.01.18