УДК 517.5

В. В. Павленков (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ORV ПОСЛІДОВНОСТІ З НЕВИРОДЖЕНИМИ ГРУПАМИ РЕГУЛЯРНИХ ТОЧОК

We define a class of ORV sequences with nondegenerate groups of regular points and consider some properties of this sequences.

Определен класс ORV последовательностей с невырожденными группами регулярных точек и рассмотрены свойства таких последовательностей.

1. Вступ. У 30-х роках XX століття роботами Й. Карамати було започатковано теорію правильно змінних (RV) функцій (див. [10 – 12]). У своїх роботах Й. Карамата означив поняття RV функції та довів ряд фундаментальних теорем теорії таких функцій. RV функції широко застосовуються в різних розділах математики, зокрема в математичному аналізі та теорії ймовірностей (див. [3, 5]).

Разом із теорією RV функцій доцільно розглядати теорію RV послідовностей та порівняти ці дві теорії. Ще в роботі [10] Й. Карамата означив поняття RV послідовності. В [10] послідовність додатних чисел $\{x_n\}_{n\geq 0}$ називалася правильно змінною на нескінченності з індексом $\rho > -1$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{\rho+1}. \tag{1}$$

Зауважимо, що рівність (1) є аналогом прямої теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів від RV функцій (якщо суму замінити інтегралом). У [10] також зазначено, що якщо для послідовності додатних чисел $\{x_n\}$ виконується рівність (1), то існують послідовності $\{c_n\}$, $\{\delta_n\}$, збіжні до деякого додатного числа та нуля відповідно, такі, що

$$x_n = n^\rho c_n \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right), \quad n \geq 1,$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \lambda^\rho, \quad \lambda > 0.$$

У статті [10] Й. Карамата стверджував (без доведення), що справедливим є й обернене твердження, тобто якщо для кожного $\lambda > 0$ існує додатна та скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{[\lambda n]}}{x_n}$, то виконується рівність (1). Доведення цього твердження було наведене Р. Боянічем та Е. Сенетою в роботі [4], де побудовано теорію RV послідовностей, яка є аналогом відповідної теорії RV функцій. У цій роботі поняття RV послідовності будемо розуміти саме в сенсі означення, даного в [4].

Альтернативне означення RV послідовності було розглянуто в [9], проте в [4] показано, що це альтернативне означення є еквівалентним до основного.

В роботі [7] запропоновано відмінний від класичного підхід до означення та дослідження RV, ORV та інших послідовностей. Там для послідовностей $\{x_n\}$ розглядаються їх кусково-лінійні інтерполяції

$$\hat{x}(t) = x_{[t]} + \big(x_{[t]+1} - x_{[t]}\big)\,(t - [t]), \quad t \geq 0,$$

які є неперервними функціями. За допомогою цих функцій означуються та досліджуються RV, ORV та інші послідовності, при цьому використовуються результати з теорії RV функцій.

Існують різноманітні узагальнення поняття RV функції (див., наприклад, [1, 3, 6]). Серед цих узагальнень є ORV функції з невиродженими групами регулярних точок (див. [5, 7]). У цій статті ми будемо вивчати властивості ORV послідовностей з невиродженими групами регулярних точок.

2. Означення та попередні відомості. Нехай $\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbf{R}_+$ — множина додатних дійсних чисел, $\mathbf{Q}$ — множина раціональних чисел, $\mathbf{Z}$ — множина цілих чисел та $\mathbf{N}$ — множина натуральних чисел. Далі $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину дійсного числа.

Позначимо через $\mathbb{S}_+$ простір послідовностей $\{x_n\} = \{x_n\}_{n\geq 0}$ таких, що $x_n > 0$ для всіх великих n. Далі будемо вважати $x_0 = 1$, якщо не зазначено протилежне. Нехай також $\mathbb{SE}_+$ — простір послідовностей $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$, для яких

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1. \tag{2}$$

Нагадаємо (див. [4]), що послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ називається *правильно змінною* (RV), якщо для кожного $\lambda > 0$ існує додатна та скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \psi(\lambda). \tag{3}$$

Якщо при цьому $\psi(\lambda) = 1,\ \lambda > 0$, то послідовність $\{x_n\}$ називається *повільно змінною* (SV).

В [4] показано, що для RV послідовності $\{x_n\}$ існує число $\rho \in \mathbf{R}$ таке, що гранична функція з (3) завжди має вигляд

$$\psi(\lambda) = \lambda^\rho, \quad \lambda > 0.$$

Число $\rho \in \mathbf{R}$ називають *індексом* RV послідовності. Індекс $\rho = 0$ мають SV послідовності і лише вони. Якщо $\{x_n\}$ — RV послідовність з індексом ρ, то

$$x_n = n^\rho \ell_n, \quad n > 0,$$

де ℓ_n — деяка SV послідовність.

Відомо також (див. [4]), що для кожної RV послідовності $\{x_n\}$ виконується рівність (2), тобто клас усіх RV послідовностей міститься у просторі $\mathbb{SE}_+$.

Регулярні точки послідовності. Для послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ розглянемо *верхню та нижню граничні функції*

$$\psi^*(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} \quad \text{та} \quad \psi_*(\lambda) = \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n}, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

Зауважимо, що верхня та нижня граничні функції з (4) набувають значень у множині $[0, \infty]$.

Означення 1. *Число* $\lambda > 0$ *називається регулярною точкою послідовності* $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$, *якщо*

$$\psi_*(\lambda) = \psi^*(\lambda) \in (0, \infty),$$

тобто якщо існує додатна та скінченна границя (3). *Множину всіх регулярних точок послідовності* $\{x_n\}$ *позначимо через* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$.

Очевидно, що $1 \in \mathbb{G}_r(\{x_n\})$ для довільної послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$. Множину регулярних точок будемо називати *невиродженою*, якщо вона містить більше одного елемента, в протилежному випадку — *виродженою*.

Зрозуміло, що якщо $\mathbb{G}_r(\{x_n\}) = \mathbf{R}_+$, то $\{x_n\}$ — RV послідовність.

У роботах [5, 7] вивчаються функції з невиродженими множинами регулярних точок. Для таких функцій множина регулярних точок є мультиплікативною підгрупою групи $\mathbf{R}_+$ та називається *невиродженою групою регулярних точок*.

Для послідовностей множина регулярних точок не завжди є мультиплікативною групою. Наступний приклад підтверджує це $\Big($в [9] цей приклад розглядався як приклад послідовності, для якої $\dfrac{\theta_{nk}}{\theta_n} \to 1$ при будь-якому $k \in \mathbf{N}$, але $\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \nrightarrow 1\Big)$.

***Приклад* 1.** Нехай ω_n — кількість простих дільників числа n. Розглянемо послідовність

$$\theta_n = \omega_n + \sqrt{\log\log n}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Тут і далі $\log(\cdot)$ означає натуральний логарифм.

Відомо (див., наприклад, [13, с. 39]), що існує підпослідовність $p_{s_1}, p_{s_2}, \ldots$ простих чисел така, що $\omega_{p_{s_n}-1} \sim \log\log p_{s_n}, n \to \infty$. Тому, оскільки $\omega_{p_{s_n}} = 1$, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{p_{s_n}}}{\theta_{p_{s_n}-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{\log\log p_{s_n}}}{\log\log p_{s_n} + \sqrt{\log\log p_{s_n}}} = 0. \tag{6}$$

Із рівності (6) видно, що $\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \nrightarrow 1, n \to \infty$.

Зауважимо, що для фіксованих $n \in \mathbf{N}$ та $k \in \mathbf{N}$ виконуються нерівності

$$\omega_n + \sqrt{\log(\log n + \log k)} \le \theta_{nk} \le \omega_n + \omega_k + \sqrt{\log(\log n + \log k)},$$

а тому для кожного $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{[kn]}}{\theta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{kn}}{\theta_n} = 1.$$

Із останньої рівності видно, що довільне натуральне число є регулярною точкою послідовності (5), тобто $\mathbb{G}_r(\{\theta_n\}) \supset \mathbf{N}$. Припустимо тепер, що $\mathbb{G}_r(\{\theta_n\})$ — мультиплікативна група. Тоді $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{G}_r(\{\theta_n\})$, оскільки $2 \in \mathbb{G}_r(\{\theta_n\})$. Це означає, що існують додатні та скінченні границі

$$\psi(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{2n}}{\theta_n}, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{[\frac{n}{2}]}}{\theta_n}. \tag{7}$$

Розглянемо послідовність

$$\delta_n = \frac{\theta_{2[\frac{n}{2}]}}{\theta_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Враховуючи (7), маємо

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{2[\frac{n}{2}]}}{\theta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{2[\frac{n}{2}]}}{\theta_{[\frac{n}{2}]}}\frac{\theta_{[\frac{n}{2}]}}{\theta_n}=\psi(2)\psi\left(\frac{1}{2}\right)\in(0,\infty).$$

Отже, послідовність $\{\delta_n\}$ має додатну та скінченну границю. Але

$$\begin{aligned}&\delta_{2k}=1,\\&\delta_{2k+1}=\frac{\theta_{2k}}{\theta_{2k+1}},\quad k\in\mathbf{N},\end{aligned}\tag{8}$$

тому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\theta_{2k}}{\theta_{2k+1}}=1,$$

що суперечить рівності (6), оскільки послідовність $p_{s_1},p_{s_2},\ldots$ є підпослідовністю непарних чисел. Тому припущення про те, що $\mathbb{G}_r(\{\theta_n\})$ — мультиплікативна група, є хибним.

Отже, послідовність (5) має невироджену множину регулярних точок, яка не є мультиплікативною групою.

Наступна теорема встановлює умови, при яких множина регулярних точок послідовності буде мультиплікативною групою.

Теорема 1. *Нехай послідовність $\{x_n\}$ належить $\mathbb{S}_+$. Якщо $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1,$$

то множина регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою.

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, то з (2) для довільного фіксованого $M\in\mathbf{N}$ випливає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n\pm M}}{x_n}=1.\tag{9}$$

Покажемо, що $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою. Оскільки $1\in\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то множина $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є непорожньою. Якщо λ, μ належать $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то

$$\psi(\lambda\mu)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\lambda\mu n]}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\lambda n]}}{x_n}\frac{x_{[\mu[\lambda n]]}}{x_{[\lambda n]}}\frac{x_{[\lambda\mu n]}}{x_{[\mu[\lambda n]]}}=\psi(\lambda)\psi(\mu).$$

Тут ми скористалися тим, що з (9) випливає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\lambda\mu n]}}{x_{[\mu[\lambda n]]}}=1,$$

оскільки $[\lambda\mu n]=[\mu[\lambda n]]+M,\quad M\le[\mu]+1$. Отже, якщо λ,μ належать $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то і $\lambda\mu$ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$.

Зауважимо, що для довільного $\lambda>0$ та $n\in\mathbf{N}$ вираз $\left[\lambda\left[\frac{n}{\lambda}\right]\right]$ набуває можливих значень $n,n-1,\ldots,n-[\lambda]$. А тому, з урахуванням (9), якщо λ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то

$$\psi\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\frac{n}{\lambda}]}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\frac{n}{\lambda}]}}{x_{[\lambda[\frac{n}{\lambda}]]}}\frac{x_{[\lambda[\frac{n}{\lambda}]]}}{x_n}=\frac{1}{\psi(\lambda)}.$$

Це свідчить, що $\dfrac{1}{\lambda}$ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$.

Отже, $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** В доведенні теореми 1 встановлено такі властивості граничної функції ψ для послідовностей $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$:

$$\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu), \quad \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}).$$

Справедливі і деякі обернені до теореми 1 твердження.

Лема 1. *Нехай послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ має невироджену множину регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, яка є мультиплікативною групою. Якщо ірраціональне число λ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$.*

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ має невироджену множину регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ і ця множина є мультиплікативною групою. Не обмежуючи загальності будемо вважати $\lambda > 1$ (це припущення не звужує умов леми, оскільки λ та $\dfrac{1}{\lambda}$ належать $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$). Оскільки λ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, а $\dfrac{1}{\lambda}$ — $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то існують додатні та скінченні границі

$$\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n}, \quad \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{\left[\frac{n}{\lambda}\right]}}{x_n}. \tag{10}$$

Розглянемо послідовність

$$\delta_n = \frac{x_{\left[\frac{[\lambda n]}{\lambda}\right]}}{x_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Зауважимо, що ідею використання такої послідовності застосовано в роботі [14] для встановлення властивостей RV послідовностей. Враховуючи (10), маємо

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{\left[\frac{[\lambda n]}{\lambda}\right]}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{\left[\frac{[\lambda n]}{\lambda}\right]}}{x_{[\lambda n]}} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\psi(\lambda) \in (0, \infty).$$

Отже, послідовність $\{\delta_n\}$ має додатну та скінченну границю. Але оскільки λ — ірраціональне число та $\lambda > 1$, то

$$\delta_n = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тому існує додатна та скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \in (0, \infty).$$

Припустимо, що $a \neq 1$. Тоді, використовуючи теорему Штольца, отримуємо $x_n \sim a^n$, $n \to \infty$, що суперечить (10).

Отже, $a = 1$ і тому $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ має невироджену множину регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, яка є мультиплікативною групою. Якщо раціональне число λ належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, то знайдеться підпослідовність натуральних чисел $c_n \to \infty$ така, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{c_n - 1}}{x_{c_n}} = 1. \tag{11}$$

Доведення. Будемо використовувати аналогічні до доведення леми 1 міркування. В доведенні леми 1 показано, що послідовність $\delta_n = \dfrac{x_{\left[\frac{[\lambda n]}{\lambda}\right]}}{x_n}$, $n \in \mathbf{N}$, має границю. Більше того, в означенні послідовності $\{\delta_n\}$ можна замінити λ на $\dfrac{1}{\lambda}$. При такій заміні нова послідовність буде мати таку саму границю на нескінченності.

В умовах леми 2 λ — раціональне число, тому покладемо $\lambda = \dfrac{m}{s}$, $m, s \in \mathbf{N}$. Тоді для довільного $k \in \mathbf{N}$

$$\delta_{sk} = 1, \quad \delta_{sk+r} = \frac{x_{sk+r-1}}{x_{sk+r}}, \quad r \in \{1, 2, \ldots, s-1\}. \tag{12}$$

Число $s \in \mathbf{N}$ із рівностей (12) вважаємо не рівним 1. Зауважимо, що це припущення не звужує умов леми 2. Дійсно, в означенні послідовності $\{\delta_n\}$ можна використовувати як число λ, так і число $\dfrac{1}{\lambda}$, а тому якщо λ — ціле, можна покласти $s = \lambda$.

Послідовність $\{\delta_n\}$ має границю, тому з (12) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{k\to\infty} \delta_{sk} = 1.$$

Покладемо $c_n = sn + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Тоді, використовуючи (12), маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{c_n - 1}}{x_{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \delta_{c_n} = 1,$$

що й завершує доведення леми 2.

Зауваження 2. З доведення леми 2 зрозуміло, що в якості підпослідовності $\{c_n\}$ такої, що виконується (5), можна використовувати послідовності вигляду $c_n = sn + r$, $r \in \{1, 2, \ldots, s - 1\}$. При цьому в якості числа s можна використовувати як чисельник, так і знаменник дробу λ, якщо $s \neq 1$.

А тому якщо крім умов леми 2 для послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{sn-1}}{x_{sn}} = 1,$$

де s — чисельник або знаменник дробу λ, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1.$$

Звідси випливає, що $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$.

Теорема 1, леми 1 і 2 та зауваження 2 свідчать про важливість виконання умови $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ для існування невиродженої групи регулярних точок у послідовності. Тому далі будемо розглядати, якщо не зазначено протилежне, послідовності з простору $\mathbb{SE}_+$.

Далі розглянемо приклад послідовності з невиродженою групою регулярних точок, яка не є RV послідовністю.

Приклад 2. Нехай $\{r_n\}$ — RV послідовність з індексом ρ. Для $n \in \mathbf{N}$ розглянемо послідовність

$$x_n = r_n \exp(\sin \log n), \quad n \in \mathbf{N},$$

$$x_0 = 1.$$

Тоді для всіх $\lambda > 0$ та $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \frac{r_{[\lambda n]}}{r_n} \exp\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\log\frac{[\lambda n]}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\log(n[\lambda n])\right)\right).$$

Зауважимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2}\log\frac{[\lambda n]}{n}\right) = \sin\log\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{13}$$

Крім того,

$$\liminf_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\log(\lambda n^2)\right) = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\log(\lambda n^2)\right) = 1, \quad \lambda > 0,$$

звідки, враховуючи, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\log(n[\lambda n])\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\log(n[\lambda(n+1)])\right)\right) = 0,$$

маємо

$$\liminf_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\log(n[\lambda n])\right) = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\log(n[\lambda n])\right) = 1, \quad \lambda > 0. \tag{14}$$

З рівностей (13) та (14) випливає

$$\psi^*(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \lambda^\rho \exp\left(2|\sin\log\sqrt{\lambda}|\right),$$

$$\psi_*(\lambda) = \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{[\lambda n]}}{x_n} = \lambda^\rho \exp\left(-2|\sin\log\sqrt{\lambda}|\right), \quad \lambda > 0.$$

Отже, якщо $\lambda = e^{2\pi k},\ k \in \mathbf{Z}$, то

$$\psi_*(\lambda) = \psi^*(\lambda) \in (0, \infty),$$

звідки

$$\mathbb{G}_r(\{x_n\}) = \{e^{2\pi k},\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Зауважимо, що отримана множина регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою. Для $n \in \mathbf{N}$ розглянемо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \exp\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\log(n(n+1))\right)\right),$$

звідки випливає (2) для послідовності $\{x_n\}$. Крім того, функція $\left(\exp\left(2\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right), u \in \mathbf{R}\right)$, через яку виражаються ψ^* та ψ_*, є додатною та періодичною.

3. Фактор-зображення верхньої та нижньої граничних функцій ORV послідовностей із невиродженими групами регулярних точок. Отримані в цьому та наступному пунктах результати є аналогами основних теорем для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок із [7].

У цьому пункті ми розглянемо властивості граничних функцій із (4). При цьому будемо розглядати послідовності з простору $\mathbb{SE}_+$. Вивчення властивостей граничних функцій почнемо з леми, яка, вочевидь, випливає з означень (4) та рівності (2).

Лема 3. *Нехай* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$. *Тоді*:

(i) *для кожного* $\lambda > 0$

$$0 \le \psi_*(\lambda) \le \psi^*(\lambda) \le \infty;$$

(ii) *для кожного* $\lambda > 0$

$$\psi_*(\lambda) = \frac{1}{\psi^*\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)},$$

де покладено $\dfrac{1}{\infty} = 0$ *та* $\dfrac{1}{0} = \infty$;

(iii) *для довільних* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *таких, що* $0 < \psi_*(\lambda_i) \le \psi^*(\lambda_i) < \infty,\ i = 1, 2,$

$$\psi_*(\lambda_1)\psi_*(\lambda_2) \le \psi_*(\lambda_1\lambda_2) \le \min\{\psi_*(\lambda_1)\psi^*(\lambda_2), \psi_*(\lambda_2)\psi^*(\lambda_1)\} \le$$
$$\le \max\{\psi_*(\lambda_1)\psi^*(\lambda_2), \psi_*(\lambda_2)\psi^*(\lambda_1)\} \le \psi^*(\lambda_1\lambda_2) \le \psi^*(\lambda_1)\psi^*(\lambda_2);$$

(iv) $\psi_*(1) = \psi^*(1) = 1$.

Важливим узагальненням поняття RV послідовності є поняття ORV послідовності. Нагадаємо (див., наприклад, [2]), що послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ називається *O-правильно змінною* (ORV), якщо для всіх $\lambda > 0$

$$\psi^*(\lambda) < \infty. \tag{15}$$

Серед ORV послідовностей можна виділити клас O-повільно змінних послідовностей, які узагальнюють SV послідовності. ORV послідовність $\{x_n\} \in \mathbb{S}_+$ назвемо *O-повільно змінною* (OSV), якщо

$$\sup_{\lambda > 0} \psi^*(\lambda) < \infty.$$

Наступне твердження випливає з леми 3.

Зауваження 3. Нехай $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

(a) $\{x_n\}$ — ORV послідовність;

(b) $0 < \psi_*(\lambda)$ для всіх $\lambda > 0$;

(c) для всіх $\lambda > 1$

$$0 < \psi_*(\lambda) \le \psi^*(\lambda) < \infty;$$

(d) знайдеться інтервал $[a, b]$, $0 < a < 1 < b < \infty$, такий, що (15) виконується для всіх $\lambda \in [a, b]$.

Для верхньої та нижньої граничних функцій ORV послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ виконуються нерівності

$$0 < \inf_{\lambda \in [a,b]} \psi_*(\lambda) \le \sup_{\lambda \in [a,b]} \psi^*(\lambda) < \infty, \quad 0 < a < b < \infty. \tag{16}$$

Нерівності (16) випливають з аналогічних відомих нерівностей для верхньої та нижньої граничних функцій ORV функції (див. [1]), якщо розглянути функцію

$$f(t) = x_{[t]}, \quad t > 0.$$

Перед тим як перейти до фактор-зображень граничних функцій, розглянемо ще одне допоміжне твердження.

Лема 4. *Нехай послідовність* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$. *Якщо* c *належить* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, *то*

$$\psi^*(c^n\lambda) = \psi^*(c^n)\psi^*(\lambda) = \psi(c^n)\psi^*(\lambda) \tag{17}$$

для всіх $\lambda > 0$ *та* $n \in \mathbf{Z}$.

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, то за теоремою 1 множина $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою. Отже, рівність (17) достатньо довести лише для $n = 1$. За умовами леми 4 c належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, тому $\psi^*(c) = \psi_*(c)$. Звідси та з твердження (iii) леми 3 маємо

$$\psi^*(c)\psi^*(\lambda) = \psi_*(c)\psi^*(\lambda) \le \psi^*(c\lambda) \le \psi^*(c)\psi^*(\lambda)$$

для всіх $\lambda > 0$. Звідки випливає (17) для $n = 1$.

Лему 4 доведено.

Нагадаємо, що для дійснозначної функції $(f(t), t \in \mathbf{R})$ її множиною періодів називається множина $S_{\text{per}}(f)$ точок s, для яких $f(t \pm s) = f(t), \quad t \in \mathbf{R}$. Зауважимо, що $0 \in S_{\text{per}}(f)$ та $S_{\text{per}}(f)$ — адитивна група. Якщо множина $S_{\text{per}}(f) \setminus \{0\}$ є непорожньою, то функція f називається *періодичною*.

Тепер ми можемо сформулювати та довести теореми про фактор-зображення граничних функцій ORV послідовності з простору $\mathbb{SE}_+$, яка має невироджену множину регулярних точок.

Почнемо з теореми, яка встановлює зображення для верхньої та нижньої граничних функцій.

Теорема 2. *Нехай* $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ *є ORV послідовністю з невиродженою множиною регулярних точок* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$. *Якщо* $c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\})$ *та* $c \ne 1$, *то*

$$\psi^*(\lambda) = \lambda^\alpha P(\log\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{18}$$

$$\psi_*(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{P(-\log\lambda)}, \quad \lambda > 0, \tag{19}$$

де

$$\alpha = \log_c \psi(c), \tag{20}$$

$(P(u), u \in \mathbf{R})$ — *додатна періодична функція, для якої множина періодів* $S_{\text{per}}(P)$ *містить множину* $\{nu_0 : n \in \mathbf{Z}\}$, $P(0) = 1$,

$$u_0 = \log c \ne 0, \tag{21}$$

та $S_{\text{per}}(P) \subset \mathbb{H}_r(\{x_n\})$. *Більше того, для всіх* $u \in \mathbf{R}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{P(u+t)}{P(t)} = P(u) \quad \text{та} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{P(u+t)}{P(t)} = \frac{1}{P(-u)}. \tag{22}$$

Тут ми позначили через $\mathbb{H}_r(\{x_n\})$ множину $\log(\mathbb{G}_r(\{x_n\}))$ — це множина точок $u \in \mathbf{R}$ таких, що $e^u \in \mathbb{G}_r(\{x_n\})$.

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, то за теоремою 1 множина $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою.

Позначимо

$$h(u) = \log\left(\psi^*(e^u)\right), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Така функція є коректно означеною, оскільки $\{x_n\}$ — ORV послідовність. Тоді за лемою 4

$$h(u + u_0) = h(u) + h_0, \quad u \in \mathbf{R}, \tag{23}$$

де $u_0 = \log c$, $h_0 = \log \psi(c)$. Зауважимо, що $h(0) = 0$, оскільки $\psi^*(1) = 1$, а тому з (23) маємо $h(-u_0) = -h(u_0) = -h_0$. Остаточно

$$h(u \pm u_0) = h(u) \pm h_0, \quad u \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

Покладемо

$$p(u) = h(u) - \frac{h_0}{u_0} u, \quad u \in \mathbf{R}.$$

Тоді з (24) для довільного $u \in \mathbf{R}$ отримуємо

$$p(u \pm u_0) = h(u \pm u_0) - \frac{h_0}{u_0}(u \pm u_0) =$$

$$= h(u) \pm h_0 \mp h_0 - \frac{h_0}{u_0} u = h(u) - \frac{h_0}{u_0} u = p(u).$$

Це означає, що $(p(u), u \in \mathbf{R})$ — періодична функція, для якої множина періодів $S_{\text{per}}(p)$ містить множину $\{nu_0 \colon n \in \mathbf{Z}\}$. Тому, оскільки

$$\psi^*(\lambda) = \exp(h(\log \lambda)), \quad \lambda > 0,$$

маємо

$$\psi^*(\lambda) = \lambda^\alpha P(\log \lambda), \quad \lambda > 0,$$

де

$$\alpha = \frac{h_0}{u_0} = \frac{\log \psi(c)}{\log c} = \log_c \psi(c)$$

та

$$P(u) = \exp(p(u)), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Це доводить рівність (18). Рівність (19) випливає з (18) та співвідношення (ii) леми 3.

Оскільки $(p(u), u \in \mathbf{R})$ — періодична функція, то $(P(u), u \in \mathbf{R})$ — також періодична функція, для якої множина періодів $S_{\text{per}}(P)$ містить множину $\{nu_0 \colon n \in \mathbf{Z}\}$. Більше того, з (18) та (19) випливає, що $S_{\text{per}}(P) \subset \mathbb{H}_r(\{x_n\})$. Зрозуміло також, що $P(0) = 1$, оскільки $p(0) = 0$ та P — додатна функція за означенням.

Доведемо тепер рівності (22). Для цього спочатку зауважимо, що із твердження (iii) леми 3 маємо

$$\frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} \le \psi^*(\lambda), \quad \lambda, t > 0.$$

Тому для довільного $\lambda > 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} \le \psi^*(\lambda). \tag{25}$$

Оскільки $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ — невироджена мультиплікативна група, то знайдеться число $z > 1$ таке, що z належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$. Тоді за лемою 4 для довільного $\lambda > 0$ та $n \in \mathbf{N}$ маємо

$$\frac{\psi^*(z^n\lambda)}{\psi^*(z^n)} = \psi^*(\lambda),$$

звідки

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda z^n)}{\psi^*(z^n)} = \psi^*(\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{26}$$

Із співвідношень (25), (26) випливає, що

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} = \psi^*(\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{27}$$

Із рівності (27) отримуємо

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} = \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi^*\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)}{\psi^*(t)} \right)^{-1} = \frac{1}{\psi^*\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}, \quad \lambda > 0.$$

Тому з урахуванням твердження (ii) леми 3

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\psi^*(\lambda t)}{\psi^*(t)} = \psi_*(\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{28}$$

Остаточно рівності (22) випливають із (27) та (28), якщо врахувати (18) та (19).

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 4.** Число α у рівності (18) залежить від граничної функції ψ та числа c. Проте якщо (18) виконується для деякого фіксованого α та функції $(P(u), u \in \mathbf{R})$ такої, як і в теоремі 2, то

$$\psi(\lambda) = \lambda^\alpha, \quad \lambda \in \exp\left(S_{\mathrm{per}}(P)\right).$$

Остання рівність показує вигляд граничної функції ψ.

***Зауваження* 5.** З теореми 2 випливає, що для довільної ORV послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ з невиродженою групою регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ виконується рівність

$$\mathbb{H}_r(\{x_n\}) = \{u \colon P(u)P(-u) = 1\}.$$

Отже, $\{x_n\}$ — RV послідовність і (3) виконується тоді і тільки тоді, коли $P(u)P(-u) = 1$ для всіх $u \in \mathbf{R}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді для функції* $(P(u), u \in \mathbf{R})$ *з теореми* 2 *маємо*:

(i) $P(u)P(-u) \ge 1$ *для всіх* $u \in \mathbf{R}$;

(ii) $\inf_{u\in\mathbf{R}} P(u) \sup_{u\in\mathbf{R}} P(u) \geq 1.$

Доведення. З рівностей (18), (19) та леми 3 отримуємо

$$P(-\log\lambda) = \lambda^\alpha \psi^*\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq \lambda^\alpha \psi_*\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda^\alpha}{\psi^*(\lambda)} = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha P(\log\lambda)} = \frac{1}{P(\log\lambda)}$$

для всіх $\lambda > 0$. Тому, оскільки функція P є додатною, $P(u)P(-u) \geq 1,\ u \in \mathbf{R}$. Твердження (i) наслідку 1 доведено. Твердження (ii) випливає з (i).

Теорема 2 встановлює зображення граничних функцій ORV послідовностей. Але в ній не йдеться про єдиність таких зображень. Виявляється, що число α з теореми 2 не залежить від вибору числа $c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\})$ і є єдиним. Його можна вважати індексом ORV послідовності з невиродженою групою регулярних точок. Для індексу будемо використовувати звичне позначення ρ. Наступна теорема уточнює теорему 2 та є основною в цьому пункті.

Теорема 3. *Нехай $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ є ORV послідовністю з невиродженою множиною регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$. Тоді $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою та*:

(i) *існує єдине число $\rho \in \mathbf{R}$ таке, що*

$$\rho = \log_c \psi(c), \quad c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\};$$

(ii) *якщо $1 \in \{\psi(c), c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}\}$, то $\rho = 0$;*

(iii) *для $\lambda \in \mathbb{G}_r(\{x_n\})$*

$$\psi(\lambda) = \lambda^\rho; \tag{29}$$

(iv) *для $\lambda > 0$*

$$\psi^*(\lambda) = \lambda^\rho \mathcal{P}(\log\lambda) \tag{30}$$

та для $\lambda > 0$

$$\psi_*(\lambda) = \frac{\lambda^\rho}{\mathcal{P}(-\log\lambda)}, \tag{31}$$

де $(\mathcal{P}(u), u \in \mathbf{R})$ — така додатна періодична функція, що

$$\mathcal{P}(0) = 1,$$
$$0 < m = \inf_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) \leq \sup_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) = M < \infty \tag{32}$$

та

$$S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}) = \mathbb{H}_r(\{x_n\});$$

(v) *для всіх $u \in \mathbf{R}$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \mathcal{P}(u) \quad \textit{та} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \frac{1}{\mathcal{P}(-u)};$$

(vi) *в (32) $m = 1$, тобто*

$$\min_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) = 1;$$

(vii) *для всіх* $t, u \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{P}(u+x) \leq \mathcal{P}(u)\mathcal{P}(x);$$

(viii) *зображення* (29), (30) *та* (31) *єдині.*

Перед тим як перейти до доведення теореми 3, зауважимо, що правильним є обернене до цієї теореми твердження.

***Зауваження* 6.** Дійсно, нехай для верхньої граничної функції послідовності $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ виконуються рівність (30) із деяким фіксованим $\rho \in \mathbf{R}$ та додатною періодичною функцією $(\mathcal{P}(u), u \in \mathbf{R})$, для якої $\mathcal{P}(0) = 1$, (32) та твердження (v) – (vii) теореми 3. Тоді з леми 3 випливає рівність (31). Рівності (30) та (31) показують, що $\{x_n\}$ є ORV послідовністю. Більше того, з цих же рівностей випливає, що $\psi^*(\lambda) = \psi_*(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{P}(\log\lambda)\mathcal{P}(-\log\lambda) = 1$, а оскільки $\min_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) = 1$, то

$$S_{\text{per}}(\mathcal{P}) = \mathbb{H}_r(\{x_n\}).$$

Отже, $\{x_n\}$ є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок.

***Доведення теореми* 3.** Оскільки $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, то за теоремою 1 множина $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ є мультиплікативною групою.

Нехай c належить $\mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$. Тоді за теоремою 2

$$\psi^*(\lambda) = \lambda^{\alpha_c} P_c(\log\lambda), \quad \lambda > 0,$$

де

$$\alpha_c = \log_c \psi(c),$$

$(P_c(u), u \in \mathbf{R})$ — додатна періодична функція з періодом $u_c = |\log c| > 0$ та

$$P_c(0) = 1.$$

Отже, для кожного $c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$

$$P_c(u) = \psi^*(e^u)\exp(-\alpha_c u), \quad u \in \mathbf{R}. \tag{33}$$

Тоді з (16) з урахуванням періодичності функції P_c маємо

$$0 < m_c = \inf_{0\leq u\leq u_c} P_c(u) = \inf_{u\in\mathbf{R}} P_c(u) \leq \sup_{u\in\mathbf{R}} P_c(u) = \sup_{0\leq u\leq u_c} P_c(u) = M_c < \infty. \tag{34}$$

Припустимо, що існують $c_1, c_2 \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$ такі, що

$$\alpha_1 = \log_{c_1} \psi(c_1) \neq \alpha_2 = \log_{c_2} \psi(c_2).$$

Тоді з (33) та (34) отримуємо

$$0 < \min\left\{\frac{m_{c_1}}{M_{c_2}}, \frac{m_{c_2}}{M_{c_1}}\right\} \leq \liminf_{u\to\infty} \min\left\{\frac{P_{c_1}(u)}{P_{c_2}(u)}, \frac{P_{c_2}(u)}{P_{c_1}(u)}\right\} =$$
$$= \liminf_{u\to\infty} \exp(-|\alpha_1 - \alpha_2| u) = 0.$$

Отримана суперечність свідчить, що всі числа α_c для $c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$ рівні між собою, а тому можна покласти

$$\rho = \alpha_c = \log_c \psi(c), \quad c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}.$$

Це доводить твердження (i).

Якщо $1 \in \{\psi(c), c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}\}$, то існує $\tilde{c} \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$ таке, що $\psi(\tilde{c}) = 1$. Тоді з твердження (i) випливає, що $\rho = 0$. Це доводить (ii).

Співвідношення (iii) випливає з (i).

Для доведення твердження (vi) покладемо

$$\mathcal{P}(u) = \psi^*(e^u) \exp(-\rho u), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Позначивши $\lambda = e^u$, отримаємо (30). Із (30) та леми 3 маємо

$$\psi_*(\lambda) = \frac{1}{\psi^*\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda^\rho}{\mathcal{P}(-\log\lambda)}, \quad \lambda > 0,$$

що доводить (31). Із твердження (i) та (33) отримуємо

$$\mathcal{P}(u) = P_c(u), \quad u \in \mathbf{R},$$

для кожного $c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}$, а тому $(\mathcal{P}(u), u \in \mathbf{R})$ — додатна періодична функція, та $\mathcal{P}(0) = 1$, оскільки такою є функція $(P_c(u), u \in \mathbf{R})$. З теореми 2 випливає, що

$$\mathbb{H}_r(\{x_n\}) \subset \bigcup_{c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}} S_{\mathrm{per}}(P_c) \subset S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}).$$

З іншого боку, рівності (30) та (31) показують, що $S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{H}_r(\{x_n\})$. Тому

$$\mathbb{H}_r(\{x_n\}) = S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}).$$

Крім того, з (34) маємо

$$0 < \sup_{c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}} m_c \leq \mathcal{P}(u) \leq \inf_{c \in \mathbb{G}_r(\{x_n\}) \setminus \{1\}} M_c < \infty, \quad u \in \mathbf{R},$$

звідки випливає (32). Отже, твердження (iv) доведено.

Співвідношення (v) випливають із теореми 2.

Для доведення (vi) спочатку зауважимо, що в (32) $m \leq 1$, оскільки $\mathcal{P}(0) = 1$. Припустимо, що $0 < m < 1$, тобто існує таке число $u' \in \mathbf{R}$, що $\mathcal{P}(u') \in (0, 1)$. Можна вважати $u' > 0$, оскільки функція $\mathcal{P}$ є періодичною. Нехай γ належить $(\mathcal{P}(u'), 1)$. Тоді з твердження (v) випливає, що існує таке додатне число t', що

$$\frac{\mathcal{P}(t)}{\mathcal{P}(u' + t)} > \frac{1}{\gamma}$$

для всіх $t \geq t'$. Тому для всіх $n \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{P}(t') > \frac{\mathcal{P}(u' + t')}{\gamma} > \frac{\mathcal{P}(2u' + t')}{\gamma^2} > \ldots > \frac{\mathcal{P}(nu' + t')}{\gamma^n} \geq \frac{m}{\gamma^n},$$

звідки, враховуючи (32), маємо

$$\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{m}{\gamma^n} \leq \mathcal{P}(t') < \infty.$$

Отримана суперечність доводить, що $m = 1$, а отже, і твердження (vi) встановлено.

Для доведення (vii) припустимо, що

$$\mathcal{P}(u' + t') = \gamma' \mathcal{P}(u')\mathcal{P}(t')$$

для деяких $u', t' \in \mathbf{R}$ та $\gamma' > 1$. Тоді для всіх $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{\mathcal{P}(u' + t' + nu_0)}{\mathcal{P}(t' + nu_0)} = \gamma' \mathcal{P}(u'),$$

де u_0 — деякий додатний період функції $\mathcal{P}$. Тому з тверджень (v) та (vi) маємо

$$1 = \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u' + t)}{\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(u')} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u' + t' + nu_0)}{\mathcal{P}(t' + nu_0)\mathcal{P}(u')} = \gamma' > 1.$$

Ця суперечність доводить (vii).

Єдиність зображень (30)–(32) випливає з (i).

Отже, теорему 3 доведено.

З теореми 3 випливає такий результат.

***Наслідок* 2.** *Нехай $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ — ORV послідовність із невиродженою групою регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ та індексом ρ. Тоді*

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{\log \psi^*(\lambda)}{\log \lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log \psi^*(\lambda)}{\log \lambda} = \rho$$

та

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{\log \psi_*(\lambda)}{\log \lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log \psi_*(\lambda)}{\log \lambda} = \rho.$$

Означення 2. *Показник ρ з твердження* (iii) *теореми* 3 *будемо називати індексом, а функцію $\mathcal{P}$ з твердження* (iv) *теореми* 3 *— періодичною компонентою ORV послідовності з невиродженою групою регулярних точок.*

Теорема 3 показує, що для ORV послідовності з невиродженою групою регулярних точок її граничні функції однозначно визначаються індексом ρ та періодичною компонентою $\mathcal{P}$. Крім того, з теореми 3 випливає, що серед усіх ORV послідовностей з невиродженими групами регулярних точок індекс $\rho = 0$ мають OSV послідовності і лише вони.

4. Фактор-зображення ORV послідовностей з невиродженими групами регулярних точок. У попередньому пункті було доведено теореми про зображення граничних функцій ORV послідовностей з невиродженими групами регулярних точок. У цьому пункті будуть розглянуті зображення самих послідовностей.

Лема 5. *Нехай $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ — ORV послідовність із невиродженою групою регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$, індексом ρ та періодичною компонентою $\mathcal{P}$. Тоді існує така OSV послідовність $\{s_n\} \in \mathbb{SE}_+$, що*

$$x_n = n^\rho s_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{35}$$

та верхня гранична функція послідовності $\{s_n\}$ має вигляд

$$\psi^*_{\{s_n\}}(\lambda) = \mathcal{P}(\log \lambda), \quad \lambda > 0. \tag{36}$$

Доведення. З теореми 3 виплиavає зображення (30). Покладемо

$$s_n = \frac{x_n}{n^\rho}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тоді, оскільки $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$, $\{s_n\}$ теж належить $\mathbb{SE}_+$. Із (30) маємо

$$\psi^*_{\{s_n\}}(\lambda) = \lambda^{-\rho}\psi^*_{\{x_n\}}(\lambda) = \mathcal{P}(\log\lambda), \quad \lambda > 0,$$

що доводить (36). Більше того, із твердження (iv) теореми 3 випливає, що

$$\sup_{\lambda>0}\psi^*_{\{s_n\}}(\lambda) = \sup_{u\in\mathbf{R}}\mathcal{P}(u) < \infty,$$

отже, $\{s_n\}$ — OSV послідовність.

Нагадаємо (див. [8]), що вимірна функція $(f(t), t > 0)$, додатна для всіх великих t, називається OSV функцією, якщо

$$\sup_{\lambda>0}\limsup_{t\to\infty}\frac{f(\lambda t)}{f(t)} < \infty.$$

У роботі [8] показано, що вимірна f є OSV функцією тоді і тільки тоді, коли

$$f(t) = \ell(t)s(t), \quad t > 0,$$

де ℓ — повільно змінна в сенсі Карамати функція, s — вимірна функція, така, що s та $\dfrac{1}{s}$ обмежені на $(0,\infty)$. Подібне твердження справедливе і для OSV послідовностей.

Твердження 1. *Нехай $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$. Послідовність $\{x_n\}$ є OSV послідовністю тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$x_n = \ell_n s_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

де $\{\ell_n\}$ — SV послідовність, $\{s_n\}$, $\left\{\dfrac{1}{s_n}\right\}$ є обмеженими та $\{s_n\} \in \mathbb{SE}_+$.

Доведення. Покладемо $f(t) = x_{[t]}$, $t \geq 1$. Зауважимо, що

$$\frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \frac{x_{[\lambda t]}}{x_{[t]}} = \frac{x_{[\lambda t]}}{x_{[\lambda[t]]}}\frac{x_{[\lambda[t]]}}{x_{[t]}}, \quad \lambda > 0, \quad t \geq 1.$$

Для послідовностей $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ з рівності (9) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{[\lambda t]}}{x_{[\lambda[t]]}} = 1, \quad \lambda > 0,$$

оскільки $0 \leq [\lambda t] - [\lambda[t]] \leq \lambda + 1$, $\lambda > 0$, $t \geq 1$. Тому для $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ умови $\{x_n\}$ — OSV послідовність та f — OSV функція є еквівалентними. Отже, твердження 1 випливає з результату Д. Дразіна та Е. Сенети [8].

Тепер ми можемо сформулювати теорему про фактор-зображення послідовностей із невиродженими групами регулярних точок.

Теорема 4. *Нехай* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{S}_+$. *Послідовність* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$ *та є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\{x_n\}$ *можна подати у вигляді*

$$x_n = r_n s_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{37}$$

де

(A$_1$) $\{r_n\}$ — *RV послідовність*;

(A$_2$) $\{s_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$;

(A$_3$) *послідовності* $\{s_n\}$, $\left\{\dfrac{1}{s_n}\right\}$ *є обмеженими*;

(A$_4$) *верхня гранична функція послідовності* $\{s_n\}$ *має вигляд*

$$\psi^*_{\{s_n\}}(\lambda) = \mathcal{P}(\log\lambda), \quad \lambda > 0,$$

де $(\mathcal{P}(u), u \in \mathbf{R})$ — *додатна періодична функція,* $\mathcal{P}(0) = 1$ *та*

$$0 < \inf_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) \le \sup_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) < \infty.$$

Більше того, якщо виконуються (37) *та* (A$_1$)–(A$_4$), *то*

(A$_5$) *індекс послідовності* $\{r_n\}$ *збігається з індексом послідовності* $\{x_n\}$;

(A$_6$) $S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}) = \mathbb{H}_r(\{x_n\})$;

(A$_7$) *для всіх* $u \in \mathbf{R}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \mathcal{P}(u) \quad \textit{та} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \frac{1}{\mathcal{P}(-u)};$$

(A$_8$) $\min_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) = 1$;

(A$_9$) *функція* $\log\mathcal{P}$ *субадитивна*;

(A$_{10}$) $\mathbb{G}_r(\{x_n\}) = \mathbb{G}_r(\{s_n\})$.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$ та є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$. Тоді (37) та (A$_1$)–(A$_{10}$) випливають із леми 5, твердження 1 та теореми 3.

Нехай виконуються (37) та (A$_1$)–(A$_4$). Безпосередньо перевіряється, що тоді $\{x_n\}$ належить $\mathbb{SE}_+$ та є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$. Тому справджується теорема 3, звідки випливають (A$_5$)–(A$_{10}$).

Теорему 4 доведено.

Для RV послідовності $\{x_n\}$ з індексом ρ відомо (див., наприклад, [4]), що $f(t) = x_{[t]}$, $t \ge 1$, є RV функцією з індексом ρ. Також відомо (див. [3]), що для RV функції f з індексом ρ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log f(t)}{\log t} = \rho,$$

звідки для RV послідовності $\{x_n\}$ з індексом ρ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n}{\log n} = \rho.$$

Подібний результат має місце і для ORV послідовностей з невиродженими групами регулярних точок та випливає з теореми 4.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\{x_n\} \in \mathbb{SE}_+$ *є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ *та індексом* ρ. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n}{\log n} = \rho.$$

Доведення. З (37) та (A_1), (A_3), (A_6) теореми 4 випливає

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n}{\log n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\log s_n}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n}{\log n} = \rho.$$

5. Зображення типу інтегральних зображень Карамати. Для RV послідовностей відомі зображення, які є аналогами інтегральних зображень Карамати RV функцій. Справедливим є таке твердження (див. [4, 9]).

Твердження 2. *Нехай* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{S}_+$. *Послідовність* $\{x_n\}$ *є RV послідовністю з індексом* ρ *тоді і тільки тоді, коли існують такі послідовності* $\{c_n\}$, $\{\delta_n\}$, *що*

$$x_n = n^\rho c_n \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right), \quad n \in \mathbf{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \in (0,\infty), \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Наступна теорема встановлює подібне зображення для ORV послідовностей із невиродженими групами регулярних точок та є очевидним наслідком теореми 4 та твердження 2.

Теорема 5. *Нехай* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{S}_+$. *Послідовність* $\{x_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$ *та є ORV послідовністю з невиродженою групою регулярних точок* $\mathbb{G}_r(\{x_n\})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\{x_n\}$ *можна подати у вигляді*

$$x_n = n^\rho c_n \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right), \quad n \in \mathbf{N}, \tag{38}$$

де

(B_1) $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$;

(B_2) $\{c_n\}$ *належить* $\mathbb{SE}_+$;

(B_3) *послідовності* $\{c_n\}$, $\left\{\dfrac{1}{c_n}\right\}$ *є обмеженими*;

(B_4) *верхня гранична функція послідовності* $\{c_n\}$ *має вигляд*

$$\psi^*_{\{c_n\}}(\lambda) = \mathcal{P}(\log\lambda), \quad \lambda > 0,$$

де $(\mathcal{P}(u), u \in \mathbf{R})$ — *додатна періодична функція,* $\mathcal{P}(0) = 1$ *та*

$$0 < \inf_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) \le \sup_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) < \infty.$$

Більше того, якщо виконуються (38) *та* (B_1)–(B_4), *то*

(B_5) *індекс послідовності* $\{x_n\}$ *збігається з* ρ;

(B_6) $S_{\mathrm{per}}(\mathcal{P}) = \mathbb{H}_r(\{x_n\})$;

(B_7) *для всіх* $u \in \mathbf{R}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \mathcal{P}(u) \quad \textit{та} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(u+t)}{\mathcal{P}(t)} = \frac{1}{\mathcal{P}(-u)};$$

(B_8) $\min_{u\in\mathbf{R}} \mathcal{P}(u) = 1$;

(B_9) *функція* $\log \mathcal{P}$ *субадитивна*;

(B_{10}) $\mathbb{G}_r(\{x_n\}) = \mathbb{G}_r(\{c_n\})$.

6. Висновки. В роботі досліджено клас ORV послідовностей із невиродженими групами регулярних точок. Для таких послідовностей розглянуто граничні функції, за допомогою яких означаються поняття RV та ORV послідовностей. Для граничних функцій встановлено їх зображення. Також отримано зображення самих послідовностей. Отримані результати є аналогами подібних результатів для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок.

Встановлено і деякі відмінності між ORV послідовностями та ORV функціями з невиродженими групами регулярних точок. Так, для послідовностей, на відміну від функцій, множина регулярних точок не завжди є мультиплікативною групою.

Література

1. *Aljancić S., Arandelović D.* O-regularly varying functions // Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1977. – **22**. – P. 5 – 22.
2. *Avakumovic V. G.* Sur une extension de la condition de convergence des theorems inverses de sommabilite // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1935. – **200**. – P. 1515 – 1517.
3. *Bingham N. M., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 508 p.
4. *Bojanic R., Seneta E.* A unified theory of regularly varying sequences // Math. Z. – 1973. – **134**. – S. 91 – 106.
5. *Булдигін В. В., Індлекофер К.-Х., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г.* Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення. – Київ: ТВіМС, 2012. – 441 с.
6. *Булдигін В. В., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – **70**. – С. 9 – 25.
7. *Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G.* On factorization representation for Avakumovic – Karamata functions with nondegenerate groups of regular points // Anal. Math. – 2004. – **30**. – P. 161 – 192.
8. *Drasin D., Seneta E.* A generalization of slowly varying functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **96**. – P. 470 – 472.
9. *Galambos J., Seneta E.* Regularly varying sequences // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **41**. – P. 110 – 116.
10. *Karamata J.* Sur certains “Tauberian theorems” de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33 – 48.
11. *Karamata J.* Sur un mode de croissance reguliere // Mathematica (Cluj). – 1930. – **4**. – P. 38 – 53.
12. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux // Bull. Soc. Math. France. – 1933. – **61**. – P. 55 – 62.
13. *Kubilius J.* Probabilistic method in the theory of numbers // Transl. Math. Monogr. – 1964. – **11**. – 184 p.
14. *Weissman I.* A note on Bojanic – Seneta theory of regularly varying sequences // Math. Z. – 1976. – **151**. – S. 29 – 30.

Одержано 20.12.17