УДК 517.983

С. Л. Гефтер, О. Л. Півень (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

ЦІЛІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО НЕЯВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

We establish the existence and uniqueness conditions for the solution for the initial problem $Bu'(z) = Au(z+h) + f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $u(0) = u_0$ in the classes of entire functions of exponential type. Closed linear operators A and B act on Banach spaces and can be degenerate. We also present an example of application of abstract results to partial differential equations.

Одержано умови існування та єдиності розв'язку початкової задачі $Bu'(z) = Au(z+h) + f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $u(0) = u_0$ у класах цілих вектор-функцій експоненціального типу. Замкнені лінійні оператори A, B діють у банахових просторах та можуть бути виродженими. Наведено приклад застосування абстрактних результатів до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Вступ. Нехай X і Y — комплексні банахові простори, I_X — тотожний у просторі X оператор, $L(X,Y)$ — простір неперервних лінійних операторів, що діють з X в Y, та $h \in \mathbb{C}$. Розглядається початкова задача

$$Bu'(z) = Au(z+h) + f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

де A, B — замкнені лінійні оператори, що діють з X в Y з областями визначення D_A та D_B відповідно, і $f : \mathbb{C} \to Y$ — ціла вектор-функція. Рівняння (1) називається *неявним*. Якщо $X = Y$ та $B = I_X$, то рівняння (1) є *явним*.

Означення 1. *Цілу вектор-функцію* $u : \mathbb{C} \to X$ *будемо називати розв'язком рівняння* (1), *якщо вектор-функції* $Au(z)$, $Bu(z)$ *також цілі та* $u(z)$ *задовольняє рівняння* (1) *при кожному* $z \in \mathbb{C}$. *Під розв'язком початкової задачі* (1), (2) *будемо розуміти розв'язок рівняння* (1), *який задовольняє початкову умову* (2).

На відміну від класичної теорії диференціально-різницевих рівнянь (див., наприклад, [1–10]) ми розглядаємо комплексне відхилення аргумента, розв'язками задачі (1), (2) вважаємо цілі вектор-функції і задаємо початкову умову тільки в одній точці. З цієї точки зору в роботі [11] вивчався частковий випадок рівняння (1), а саме, явне однорідне рівняння з обмеженим оператором A. Важливу роль при дослідженні цілих розв'язків однорідного рівняння відігравали властивості операторного ряду Брюв'є (див. [11], розділи 1, 2, а також пункт 2 цієї роботи). У [12, 13] за припущення, що $X = Y$, $A = I_X$ і $B \in L(X,X)$, було вивчено питання про розв'язки рівняння (1) скінченного та нульового експоненціального типу. В даній роботі за допомогою методу спектральних проекторів типу Ріса, що був запропонований у працях А. Г. Руткаса та його учнів [2, 14–16], доведено теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу (див. теорему 3). Як наслідок із теореми 3 отримано відповідний результат для неявного диференціального рівняння (наслідок 4) і для явного диференціального рівняння із замкненим оператором, для резольвенти якого точка $\lambda = 0$ є ізольованою особливою точкою (наслідок 5). Розглянуто також випадок, коли $f(z)$ — ціла вектор-функція нульового експоненціального типу (наслідок 6). У пункті 4 наведено приклад застосування абстрактних результатів до диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Зазначимо, що рівняння (1) на *дійсній* півосі і більш загальні неявні диференціально-різницеві рівняння вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [2, 17 – 21]). Для явного лінійного диференціального рівняння з необмеженим оператором цілі розв'язки експоненціального типу вивчались у [22 – 24] та інших роботах (див. бібліографію в статті [22]).

Цю статтю присвячено 80-річчю професора Анатолія Георгійовича Руткаса.

2. Попередні відомості. В цьому пункті будемо вважати, що $A \in L(X, X)$ і $B = I_X$. Через $r(A)$ будемо позначати спектральний радіус обмеженого оператора A. В роботі [11] для дослідження початкової задачі

$$u'(z) = Au(z + h), \quad z \in \mathbb{C}, \qquad u(0) = u_0, \tag{3}$$

з таким оператором було введено операторний ряд Брюв'є

$$F_A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n (z + nh)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

та показано, що при виконанні умови $|h| e r(A) < 1$ цей ряд є цілою оператор-функцією зі значеннями в $L(X, X)$. Також у роботі [11] (теорема 2.1) було доведено теорему існування та єдиності розв'язку початкової задачі (3). Наступна теорема встановлює існування та єдиність розв'язку цієї задачі при більш слабких обмеженнях.

Теорема 1. *Нехай $A \in L(X, X)$ та $|h| e r(A) < 1$. Тоді для будь-якого початкового вектора $u_0 \in X$ початкова задача* (3) *має єдиний розв'язок у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу $\sigma < \dfrac{1}{|h|}$,*

$$u(z) = F_A(z) (F_A(0))^{-1} u_0.$$

$\Bigg($*При $h = 0$ вважаємо $\dfrac{1}{|h|} = \infty$ та одержуємо відомий розв'язок $u(z) = e^{Az} u_0$, який є цілою вектор-функцією експоненціального типу.*$\Bigg)$

Доведення. Доведення єдиності збігається з аналогічним доведенням теореми 2.1 [11]. Зазначимо, що існування розв'язку в роботі [11] доводилось за припущенням $|h| e r(A) \le \dfrac{1}{2}$. Розглянемо оператор

$$F_A(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n h^n A^n}{n!}$$

і покажемо, що цей оператор має обмежений обернений. Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n h^n z^n}{n!}$. Тоді функція $g(z)$ голоморфна у крузі $|z| < \dfrac{1}{e|h|}$. Оскільки спектр $\operatorname{spec}(A)$ оператора A міститься в цьому ж крузі, то $F_A(0) = g(A)$. За теоремою про відображення спектра $\operatorname{spec}(F_A(0)) = g(\operatorname{spec}(A))$. Згідно з результатом О. Перрона [25] (§2), $g(z) = \dfrac{1}{1 - h s_z}$, де s_z — найменший за модулем корінь рівняння $s = z e^{hs}$ (див. також [1, с. 181], вправа 5). Тому $g(z) \neq 0$ при

$|z| < \dfrac{1}{e|h|}$, і, отже, $0 \notin \operatorname{spec}(F_A(0))$. Таким чином, оператор $F_A(0)$ має обмежений обернений. Тепер неважко перевірити, що вектор-функція $u(z) = F_A(z)(F_A(0))^{-1}u_0$ є розв'язком початкової задачі (3) (див. доведення теореми 2.1 [11]).

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконано умови попередньої теореми. Тоді сім'я операторів* $U_A(z) = F_A(z)(F_A(0))^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$, *утворює рівномірно неперервну групу з генератором* $T = AF_A(h)(F_A(0))^{-1}$, *який задовольняє операторне рівняння* $T = Ae^{hT}$. *Таким чином,* $F_A(z) = e^{zT}F_A(0)$, $z \in \mathbb{C}$.

Доведення. За теоремою 1 для будь-якого $u_0 \in X$ вектор-функція $u(z) = U_A(z)u_0$ є розв'язком початкової задачі (3). Тому справедливою є операторна тотожність

$$U_A'(z) = AU_A(z+h), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Для будь-яких $\zeta \in \mathbb{C}$ та $u_0 \in X$ вектор-функція $w(z) = U_A(z+\zeta)u_0$ є розв'язком початкової задачі (3) з початковим значенням $w(0) = U_A(\zeta)u_0$. Вектор-функція $w_1(z) = U_A(z)U_A(\zeta)u_0$ є розв'язком початкової задачі (3) з тим самим початковим значенням $w_1(0) = U_A(\zeta)u_0$. Внаслідок єдиності розв'язку початкової задачі (3) маємо $w(z) = w_1(z)$. Звідси випливає справедливість операторної тотожності

$$U_A(z+\zeta) = U_A(z)U_A(\zeta), \quad z, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Отже, сім'я операторів $U_A(z)$, $z \in \mathbb{C}$, є групою операторів та цілою оператор-функцією. Оскільки оператор-функція $F_A(z)$ є голоморфною у точці $z = 0$, то група $U_A(z)$ є рівномірно неперервною. Генератором цієї групи є оператор $T = U_A'(0) \in L(X, X)$ і тоді за теоремою 9.6.1 [26, с. 302, 303] $U_A(z) = e^{zT}$. Звідси з урахуванням тотожності (4) маємо

$$T = U_A'(0) = AU_A(h) = Ae^{hT}.$$

Наслідок доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо $h = 0$, то $U_A(z) = e^{Az}$ та $T = A$.

Тепер у просторі $X = Y$ розглянемо частковий випадок рівняння (1)

$$u'(z) = Au(z+h) + f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

коли оператор A є квазінільпотентним. У наступній лемі будується розв'язок цього рівняння у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу σ.

Лема 1. *Нехай A — квазінільпотентний оператор та $f(z)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу σ. Тоді вектор-функція*

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \int\limits_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} f(\zeta)\, d\zeta \tag{6}$$

є цілою вектор-функцією експоненціального типу σ, що задовольняє рівняння (5).

Доведення. Якщо $f(z)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу σ, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $M(\varepsilon) > 0$, що справедливою є оцінка

$$\|f(z)\| \leq M(\varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\left\| A^n \int\limits_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} f(\zeta)\, d\zeta \right\| \leq M(\varepsilon) \|A^n\| \frac{|z+nh|^{n+1}}{n!} e^{(\sigma+\varepsilon)|z+nh|} \leq$$

$$\leq M(\varepsilon) \|A^n\| e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \frac{2^n(|z|^{n+1} + n^{n+1}|h|^{n+1})}{n!} e^{(\sigma+\varepsilon)n|h|} \leq$$

$$\leq M(\varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \cdot 2^n \|A^n\| \left(\frac{|z|^{n+1} e^{(\sigma+\varepsilon)n|h|}}{n!} + n|h|^{n+1} e^{n(1+(\sigma+\varepsilon)|h|)} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

оскільки $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n!$. Очевидно, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \|A^n\| \, |z|^{n+1} e^{(\sigma+\varepsilon)n|h|}}{n!}$$

збігається рівномірно в кожному крузі $|z| \leq \varrho$ для будь-якого обмеженого оператора A, а числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n \|A^n\| |h|^{n+1} e^{n(1+(\sigma+\varepsilon)|h|)}$$

збігається внаслідок квазінільпотентності оператора A. Тому ряд у правій частині (6) збігається рівномірно в кожному крузі $|z| \leq \varrho$ і при кожному $z \in \mathbb{C}$ справедливою є оцінка

$$\|u(z)\| \leq M(\varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \|A^n\| |z|^{n+1} e^{(\sigma+\varepsilon)n|h|}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n \|A^n\| \, |h|^{n+1} e^{n(1+(\sigma+\varepsilon)|h|)} \right).$$

Внаслідок квазінільпотентності оператора A для будь-якого $\varepsilon > 0$ оператор-функція

$$H_\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \|A^n\| \, z^n e^{(\sigma+\varepsilon)n|h|}}{n!}$$

є цілою функцією нульового експоненціального типу. Тому експоненціальний тип вектор-функції $u(z)$, яку визначено за допомоги формули (6), не перевищує σ. Диференціюючи вектор-функцію (6), отримуємо

$$u'(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A^n \int\limits_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta)\, d\zeta = Au(z+h) + f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отже, $u(z)$ задовольняє рівняння (5). Оскільки експоненціальний тип $u'(z)$ дорівнює експоненціальному типу $u(z)$ та $u(z+h)$, то з рівняння (5) випливає, що експоненціальний тип

σ вектор-функції $f(z)$ не перевищує експоненціальний тип вектор-функції $u'(z) - Au(z+h)$. Звідси одержуємо, що експоненціальний тип $u(z)$ дорівнює σ.

Лему доведено.

Наступна теорема містить достатні умови існування та єдиності розв'язку початкової задачі (5), (2).

Теорема 2. *Нехай A — квазінільпотентний оператор та $f(z)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу σ. Тоді для будь-якого $u_0 \in X$ у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ існує єдиний розв'язок початкової задачі* (5), (2)

$$u(z) = U_A(z)\left(u_0 - \sum_{m=0}^{\infty} A^m \int_0^{mh} \frac{(mh-\zeta)^m}{m!} f(\zeta)\,d\zeta\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A^n \int_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} f(\zeta)\,d\zeta. \quad (7)$$

Крім того, експоненціальний тип цього розв'язку дорівнює σ.

Доведення. З теореми 1 та леми 1 випливає, що для будь-якого вектора $v \in X$ вектор-функція

$$u(z) = U_A(z)v + \sum_{n=0}^{\infty} A^n \int_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} f(\zeta)\,d\zeta \quad (8)$$

задовольняє рівняння (5). Виберемо вектор $v \in X$ таким чином, щоб ця вектор-функція задовольняла початкову умову (2). Підставляючи (8) у (2), одержуємо

$$u(0) = v + \sum_{m=0}^{\infty} A^m \int_0^{mh} \frac{(mh-\zeta)^m}{m!} f(\zeta)\,d\zeta = u_0.$$

Звідси маємо

$$v = u_0 - \sum_{m=0}^{\infty} A^m \int_0^{mh} \frac{(mh-\zeta)^m}{m!} f(\zeta)\,d\zeta,$$

та для вектор-функції $u(z)$ справедливою є формула (7). Із результатів [11] (теорема 1.2) випливає, що для квазінільпотентного оператора A експоненціальний тип оператор-функції $U_A(z)$ дорівнює нулю. Тому за лемою 1 експоненціальний тип вектор-функції $u(z)$ (7) дорівнює σ.

Доведемо єдиність розв'язку початкової задачі (5), (2) у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(z)$, $u_2(z)$ цієї задачі, що мають експоненціальний тип не вищий за σ. Тоді вектор функція $v(z) = u_1(z) - u_2(z)$ є розв'язком задачі (3) з початковим вектором $v(0) = 0$. Оскільки експоненціальний тип цього розв'язку не перевищує σ, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $M_\varepsilon > 0$, що

$$\|v(z)\| \leq M_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Диференціюючи рівняння $v'(z) = Av(z+h)$, отримуємо $v^{(n)}(0) = A^n v(nh)$, і, отже, згідно з оцінкою (9) експоненціальний тип вектор-функції $v(z)$ є таким:

$$\sigma_v = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|v^{(n)}(0)\|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|\|v(nh)\|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} e^{(\sigma+\varepsilon)|h|} = 0,$$

тобто $\sigma_v = 0$. Тепер з теореми 1 випливає, що $v(z) \equiv 0$, тобто єдиність розв'язку встановлено.

Теорему доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай A — нільпотентний оператор з індексом нільпотентності $p+1$ та $f(z) = \sum_{j=0}^{d} c_j \dfrac{z^j}{j!}$ — поліном із коефіцієнтами $c_j \in X,\ j = 0,\ldots,d$. Тоді для будь-якого $u_0 \in X$ існує єдиний поліноміальний розв'язок початкової задачі* (5), (2)

$$u(z) = U_A(z)\left(u_0 - \sum_{j=0}^{d}\sum_{m=0}^{p}\frac{(mh)^{m+j+1}}{(m+j+1)!}A^m c_j\right) + \sum_{j=0}^{d}\sum_{n=0}^{p}\frac{(z+nh)^{n+j+1}}{(n+j+1)!}A^n c_j. \tag{10}$$

При цьому група $U_A(z)$ має вигляд

$$U_A(z) = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k(z+nh)^n}{n!}A^n\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{l^l h^l}{l!}A^l\right)^k. \tag{11}$$

Доведення. Для всіх $h, z \in \mathbb{C},\ n = 0,1,2,\ldots,$ обчислюємо

$$\int\limits_0^{z+nh}\frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!}f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=0}^{d}c_j\int\limits_0^{z+nh}\frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!}\frac{\zeta^j}{j!}\,d\zeta = \sum_{j=0}^{d}\frac{(z+nh)^{n+j+1}c_j}{(n+j+1)!}. \tag{12}$$

Підставляючи співвідношення (12) у формулу (7) та враховуючи, що $A^k = 0$ при $k > p$, одержуємо зображення (11) групи $U_A(z)$ та зображення (10) розв'язку початкової задачі (5), (2).

Наслідок доведено.

Покажемо, що у випадку, коли оператор A є квазінільпотентним, а $f(z)$ — поліном, рівняння (5) може взагалі не мати поліноміальних розв'язків, навіть при $h = 0$.

***Приклад* 1.** Нехай квазінільпотентний оператор A має необмежений обернений. Тоді існує вектор $c_0 \in X$, який не належить $A(X)$. Якщо $f(z) \equiv c_0$ та $h = 0$, то будь-який розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$u(z) = e^{Az}u_0 + \int\limits_0^z e^{A(z-\zeta)}c_0 d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k A^k}{k!}u_0 + \int\limits_0^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\zeta)^k A^k}{k!}d\zeta c_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k A^k}{k!}u_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}A^k}{(k+1)!}c_0 = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}A^{k-1}(Au_0 + c_0),$$

де $u_0 \in X$ — довільний початковий вектор. Якщо при деякому векторі u_0 цей розв'язок є поліномом, то повинно існувати таке $k \in \mathbb{N}$, що $A^{k-1}(Au_0 + c_0) = 0$, а це суперечить оберненості оператора A та вибору вектора c_0.

3. Існування та єдиність розв'язку неявного рівняння (1). Рівнянню (1) відповідає жмуток операторів $\lambda B + A$ з областю визначення $D = D_A \cap D_B$. Будемо вважати, що $D \neq \{0\}$. Згідно з [16], точка λ є регулярною точкою жмутка $\lambda B + A$, якщо визначено резольвенту $R(\lambda) = (\lambda B + A)^{-1} \in L(Y, X)$. Множина всіх регулярних точок жмутка $\lambda B + A$ є відкритою, та на цій множині резольвента $R(\lambda)$ є голоморфною оператор-функцією зі значеннями в $L(Y, X)$. Будемо припускати, що точка $\lambda = 0$ є або регулярною для жмутка $\lambda B + A$, або ізольованою особливою точкою резольвенти $R(\lambda)$. У цьому випадку існує таке $\varepsilon > 0$, що множина $\{\lambda\colon 0 < |\lambda| \leq \varepsilon\}$ складається з регулярних точок жмутка $\lambda B + A$. Згідно з теоремою 2.1 [16], на D визначено проектори

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} (\lambda B + A)^{-1} d\lambda\right) B, \quad P_2 = I_X - P_1, \tag{13}$$

а у просторі Y — обмежені проектори

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} B(\lambda B + A)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = I_Y - Q_1. \tag{14}$$

Справедливими є такі розвинення у пряму суму:

$$D = P_1(D) \dot{+} P_2(D), \qquad Y = Q_1(Y) \dot{+} Q_2(Y),$$

причому $A, B\colon P_k(D) \to Q_k(Y),\ k = 1, 2$. За аналогією з [2] (п. 2.3.1) розглянемо замкнений оператор

$$G = BP_1 + AP_2 = Q_1 B + Q_2 A$$

з областю визначення $D_G = D$, що має обмежений обернений $G^{-1} \in L(Y, X)$. Цей оператор має такі властивості:

$$Q_1 B G^{-1} = Q_1, \qquad Q_2 A G^{-1} = Q_2. \tag{15}$$

Оператори $G_1 = Q_1 A G^{-1}$ та $G_2 = Q_2 B G^{-1}$ є обмеженими у просторі Y, причому оператор G_1 є квазінільпотентним.

Наступна теорема встановлює необхідні та достатні умови існування та єдиності розв'язку початкової задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай $f(z)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу σ, причому $r(G_2)\sigma e^{\sigma|h|} < 1$. Припустимо, що $u_0 \in D$ і точка $\lambda = 0$ є або регулярною для жмутка $\lambda B + A$, або ізольованою особливою точкою резольвенти $R(\lambda)$. Початкова задача* (1), (2) *має розв'язок у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ тоді і тільки тоді, коли*

$$Q_2 A u_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} G_2^n Q_2 f^{(n)}(-(n+1)h). \tag{16}$$

При цьому розв'язок є єдиним у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ та має вигляд

$$u(z) = G^{-1} U_{G_1}(z)\left(Q_1 B u_0 - \sum_{m=0}^{\infty} G_1^m \int\limits_0^{mh} \frac{(mh-\zeta)^m}{m!} Q_1 f(\zeta)\, d\zeta\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} G^{-1} G_1^n \int\limits_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} Q_1 f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{n=0}^{\infty} G^{-1} G_2^n Q_2 f^{(n)}(z-(n+1)h). \tag{17}$$

Якщо, крім того, оператори A і B є обмеженими, то експоненціальний тип розв'язку $u(z)$ дорівнює σ.

Доведення. У рівнянні (1) виконаємо заміну $v = Gu$ та застосуємо до цього рівняння проектори $Q_1,\ Q_2$. З урахуванням властивостей (15) одержимо два рівняння відносно проекцій $v_j(z) = Q_j v(z)$:

$$v_1'(z) = G_1 v_1(z+h) + Q_1 f(z), \tag{18}$$

$$G_2 v_2'(z) = v_2(z+h) + Q_2 f(z). \tag{19}$$

Позначимо через σ_j експоненціальний тип відповідної вектор-функції $Q_j f(z),\ j = 1, 2$. Очевидно, що $\sigma_j \le \sigma,\ j = 1, 2$, та хоча б одне з чисел σ_j дорівнює σ. Оскільки оператор G_1 є квазінільпотентним, то за теоремою 2 для початкового вектора $v_1(0) = Q_1 G u_0 = Q_1 B u_0$ існує єдиний розв'язок рівняння (18)

$$v_1(z) = U_{G_1}(z)\left(Q_1 B u_0 - \sum_{m=0}^{\infty} G_1^m \int\limits_0^{mh} \frac{(mh-\zeta)^m}{m!} Q_1 f(\zeta)\, d\zeta\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} G_1^n \int\limits_0^{z+nh} \frac{(z+nh-\zeta)^n}{n!} Q_1 f(\zeta)\, d\zeta \tag{20}$$

у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу σ_1. Згідно з теоремою 1 роботи [12], рівняння (19) має єдиний розв'язок

$$v_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} G_2^n Q_2 f^{(n)}(z-(n+1)h) \tag{21}$$

у класі цілих функцій експоненціального типу σ_2. Тому початковий вектор $v_2(0) = Q_2 G u_0 = Q_2 A u_0$ повинен задовольняти умову узгодження (16). Отже, початкова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u(z) = G^{-1}(v_1(z) + v_2(z))$, що є цілою вектор-функцією експоненціального типу $\le \sigma$, причому експоненціальний тип вектор-функції $Gu(z) = v_1(z) + v_2(z)$ дорівнює σ. З урахуванням формул (20), (21) цей розв'язок має вигляд (17). Якщо оператори A і B є обмеженими, то і оператор G є обмеженим, а отже, й експоненціальний тип розв'язку $u(z)$ дорівнює σ.

Теорему доведено.

Наслідок 3. *Нехай* $f(z) = \sum_{j=0}^{d} c_j \dfrac{z^j}{j!}$ *— поліном з коефіцієнтами* $c_j \in Y,\ j = 0, \ldots, d$. *Припустимо, що* $u_0 \in D$ *і точка* $\lambda = 0$ *є полюсом порядку* $p+1$ *резольвенти* $R(\lambda)$. *Початкова задача* (1), (2) *має поліноміальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли*

$$Q_2 A u_0 = -\sum_{n=0}^{d}\sum_{j=0}^{d-n} \frac{(-(n+1)h)^j}{j!} G_2^n Q_2 c_{j+n}. \tag{22}$$

При цьому поліноміальний розв'язок є єдиним і має вигляд

$$u(z) = G^{-1} U_{G_1}(z)\left(Q_1 B u_0 - \sum_{j=0}^{d}\sum_{m=0}^{p} \frac{(mh)^{m+j+1}}{(m+j+1)!} G_1^m Q_1 c_j\right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{d}\sum_{n=0}^{p} \frac{(z+nh)^{n+j+1}}{(n+j+1)!} G^{-1} G_1^n Q_1 c_j - \sum_{n=0}^{d}\sum_{j=0}^{d-n} \frac{(z-(n+1)h)^j}{j!} G^{-1} G_2^n Q_2 c_{j+n}, \tag{23}$$

де

$$U_{G_1}(z) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k (z+nh)^n}{n!} G_1^n \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{l^l h^l}{l!} G_1^l \right)^k . \tag{24}$$

Доведення. Якщо точка $\lambda = 0$ є полюсом порядку $p+1$ резольвенти $R(\lambda)$, то оператор G_1 є нільпотентним, причому індекс його нільпотентності дорівнює $p+1$ [2] (п. 2.3.1). Тепер, використовуючи формули (12), із зображення розв'язку (17) одержуємо зображення (23). Умова (16) набирає вигляду (22). Враховуючи, що $G_1^{p+1} = 0$, отримуємо також формулу (24).

Наслідок доведено.

Зауваження 2. Як показує приклад 1, умова, що точка $\lambda = 0$ — полюс резольвенти $R(\lambda)$, є суттєвою для існування поліноміального розв'язку початкової задачі (1), (2).

З теореми 3 при $h = 0$ та зауваження 1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 4. *Нехай $f(z)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу σ, причому $r(G_2)\sigma < 1$. Припустимо, що точка $\lambda = 0$ є або регулярною для жмутка $\lambda B + A$, або ізольованою особливою точкою резольвенти $R(\lambda)$. Задача Коші*

$$Bu'(z) = Au(z) + f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

$$u(0) = u_0 \in D, \tag{26}$$

має розв'язок у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ тоді і тільки тоді, коли

$$Q_2 A u_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} G_2^n Q_2 f^{(n)}(0). \tag{27}$$

При цьому розв'язок є єдиним у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ та має вигляд

$$u(z) = G^{-1} \left(e^{zG_1} Q_1 B u_0 + \int_0^z e^{(z-\zeta)G_1} Q_1 f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{n=0}^{\infty} G_2^n Q_2 f^{(n)}(z) \right).$$

Якщо, крім того, оператори A і B є обмеженими, то експоненціальний тип розв'язку $u(z)$ дорівнює σ.

Розглянемо тепер частковий випадок задачі (25), (26), коли $X = Y$ і $B = I_X$. Тоді маємо диференціальне рівняння

$$u'(z) = Au(z) + f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{28}$$

і наступні вирази для проекторів (13), (14):

$$P = P_1 = Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda| = \varepsilon} (\lambda I_X + A)^{-1} d\lambda, \qquad P_2 = Q_2 = I_X - P. \tag{29}$$

Відповідний оператор G має вигляд $G = P + (I_X - P)A$. Крім того, $D = D_A$, $G_1 = AP$ та $G_2 = (I_X - P)G^{-1}$. Умова (27) набирає вигляду

$$(I_X - P)Au_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \big((I_X - P)G^{-1}\big)^n (I_X - P)f^{(n)}(0). \tag{30}$$

Тепер ми отримаємо твердження, яке випливає з наслідку 4.

***Наслідок* 5.** *Нехай* $f(z)$ *— ціла вектор-функція експоненціального типу* σ. *Припустимо, що* $X = Y$, $u_0 \in D_A$, $r((I_X - P)G^{-1})\sigma < 1$ *та точка* $\lambda = 0$ *є або регулярною для оператора* A, *або ізольованою особливою точкою резольвенти оператора* A. *Задача Коші* (28), (26) *має розв'язок у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за* σ *тоді і тільки тоді, коли виконано умову* (30). *При цьому розв'язок є єдиним у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за* σ *та має вигляд*

$$u(z) = G^{-1}\left(e^{zAP}Pu_0 + \int\limits_0^z e^{(z-\zeta)AP}Pf(\zeta)\,d\zeta - \sum_{n=0}^{\infty}((I_X - P)G^{-1})^n (I_X - P)f^{(n)}(z)\right). \tag{31}$$

Наступний приклад показує, що в умовах наслідку 5 і необмеженості оператора A експоненціальний тип розв'язку задачі Коші (28), (26) може бути і меншим, ніж σ, на відміну від рівняння $Bu'(z) = u(z) - f(z)$ з обмеженим оператором B, яке розглядалось у [24].

***Приклад* 2.** Нехай $X = Y = \ell_2$. Замкнений оператор A визначимо таким чином: якщо $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, то

$$Ax = \big\{((n+1)!)x_n\big\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{i} \qquad D_A = \left\{x \in \ell_2 \colon \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)! \cdot x_n)^2 < \infty\right\}.$$

Оператор A має обмежений обернений оператор A^{-1}, який діє за правилом $A^{-1}x = \left\{\dfrac{x_n}{(n+1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Тому згідно з формулами (29) маємо $P = Q = 0$, $G = A$. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — стандартний ортонормований базис простору ℓ_2. Розглянемо цілу вектор-функцію $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n e_n}{n!}$, експоненціальний тип якої дорівнює $\sigma = 1$. Проте вектор-функція

$$g(z) = A^{-1}f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n e_n}{n!(n+1)!}$$

є цілою функцією нульового експоненціального типу. Крім того, $r(A^{-1}) \le \|A^{-1}\| = \dfrac{1}{2} < 1$. Отже, виконано всі умови як наслідку 5, так і теореми 2 [12] при $h = 0$. Згідно з теоремою 2 [12], рівняння (28) має єдиний розв'язок

$$u(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(n)}(z) \tag{32}$$

у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за 1. При цьому експоненціальний тип цього розв'язку збігається з експоненціальним типом вектор-функції $g(z)$, тобто дорівнює нулю. Зауважимо, що в даному випадку зображення розв'язку (32) збігається з відповідним зображенням (31), а початковий вектор

$$u_0 = u(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(n)}(0)$$

задовольняє умову (30).

З наслідку 5 безпосередньо випливає наступне твердження.

***Наслідок* 6.** *Нехай* $X = Y$, $u_0 \in D_A$, $f(z)$ *— ціла вектор-функція нульового експоненціального типу і точка* $\lambda = 0$ *є або регулярною для оператора* A, *або ізольованою особливою точкою резольвенти оператора* A. *Задача Коші* (28), (26) *має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу тоді і тільки тоді*, *коли виконано умову* (30). *При цьому розв'язок є єдиним у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу та має вигляд* (31).

Покажемо тепер, що у випадку, коли точка $\lambda = 0$ не є ізольованою особливою точкою резольвенти оператора A, а $f(z)$ — ціла вектор-функція нульового експоненціального типу, рівняння (28) може взагалі не мати розв'язків нульового експоненціального типу. Отже, умова ізольованості точки $\lambda = 0$ є суттєвою для наслідку 6.

***Приклад* 3.** Нехай $X = C[0,1]$ і оператор A визначено таким чином: $(Ay)(x) = xy(x)$, $y \in C[0,1]$. Точка $\lambda = 0$ не є ізольованою особливою точкою резольвенти оператора A. Початкова задача (28), (26) для рівняння (28) при $f(z) \equiv 1$ має вигляд

$$\frac{\partial u(z,x)}{\partial z} = xu(z,x) + 1, \qquad x \in [0,1], \quad z \in \mathbb{C}, \tag{33}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{34}$$

де $u(z,x) = u(z)(x)$. Зауважимо, що для будь-якої початкової функції $u_0(x) \in C[0,1]$ існує єдиний розв'язок

$$u(z,x) = \begin{cases} e^{zx}u_0(x) + \dfrac{e^{zx}-1}{x}, & x \neq 0, \\ u_0(0) + z, & x = 0, \end{cases}$$

задачі (33), (34) у класі цілих функцій експоненціального типу. Покажемо, що при будь-якій функції $u_0(x)$ експоненціальний тип цього розв'язку не дорівнює нулю. Внаслідок неперервності функції $u_0(x)$ існує таке $x_0 \in (0,1]$, що $u_0(x_0) \neq -\dfrac{1}{x_0}$ і

$$\max_{x\in[0,1]} |u(z,x)| \geq \left| \left(u_0(x_0) + \frac{1}{x_0} \right) e^{zx_0} - \frac{1}{x_0} \right|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ця нерівність показує, що вектор-функція $u(z)$ не є функцією нульового експоненціального типу. Тому рівняння (33) не має цілих розв'язків нульового експоненціального типу.

4. Приклад. У просторі $X = Y = L_2[0,\pi]$ розглянемо диференціальні оператори A і B:

$$Au = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x), \quad Bu = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + 4u(x),$$
$$D = D_A = D_B = \left\{ u(x) \in W_2^2(0,\pi) \colon u(0) = u(\pi) = 0 \right\},$$

де $W_2^m(0,\pi)$ — простір Соболєва. Будемо вважати, що $h \in \mathbb{R}$. Тоді при переході на дійсну вісь початкова задача (1), (2) має вигляд

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + 4\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t+h,x)}{\partial x^2} + u(t+h,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times [0,\pi], \tag{35}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{36}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{37}$$

У випадку $h = 0$ подібну задачу було розглянуто в монографії [2] (п. 4.4.1) на множині $(t,x) \in [0,T_0] \times [0,\pi]$. Припустимо, що $u_0(x) \in D$ і $f(t,x) = e^{\sigma t} y(x)$, де $y(x) \in X$, а число $\sigma > 0$ вибрано так, що виконується нерівність

$$\sigma e^{\sigma |h|} < 1. \tag{38}$$

Зауважимо, що оператори A, B є виродженими: $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}$, $\mathrm{Ker} B = \mathrm{Lin}\{\sin 2x\}$. Спектр жмутка $\lambda B + A$ складається з послідовності $\lambda_n = -\dfrac{n^2-1}{n^2-4}$, $n \in \mathbb{N}$, та її граничної точки $\lambda_0 = -1$. Знайдемо резольвенту $R(\lambda) = (\lambda B + A)^{-1}$:

$$(R(\lambda)w)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n \varphi_n(x)}{-(1+\lambda)n^2 + 4\lambda + 1}, \qquad w(x) \in L_2(0,\pi), \quad \lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty},$$

де

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \qquad w_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, точка $\lambda = 0$ є ізольованою особливою точкою резольвенти $R(\lambda)$. Справджуються рівності

$$A\varphi_n(x) = (1-n^2)\varphi_n(x), \qquad B\varphi_n(x) = (4-n^2)\varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Тому

$$(R(\lambda)Bw)(x) = (BR(\lambda)w)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-n^2) w_n \varphi_n(x)}{-(1+\lambda)n^2 + 4\lambda + 1}, \qquad w(x) \in D, \quad \lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty},$$

і згідно з формулами (13), (14)

$$(P_1 w)(x) = (Q_1 w)(x) = w_1 \varphi_1(x), \qquad (P_2 w)(x) = (Q_2 w)(x) = \sum_{n=2}^{\infty} w_n \varphi_n(x), \quad w(x) \in D.$$

З урахуванням співвідношень (39) маємо

$$(Gw)(x) = 3 w_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) w_n \varphi_n(x), \quad w(x) \in D,$$

$$(G^{-1}w)(x) = \frac{1}{3} w_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w_n \varphi_n(x)}{1-n^2}, \quad w(x) \in X,$$

$$(AG^{-1}w)(x) = (Q_2 w)(x), \qquad (BG^{-1}w)(x) = w_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4-n^2) w_n \varphi_n(x)}{1-n^2}, \quad w(x) \in X.$$

Звідси

$$G_1 = Q_1 A G^{-1} = 0, \qquad (G_2 w)(x) = (Q_2 B G^{-1} w)(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4-n^2) w_n \varphi_n(x)}{(1-n^2)}, \quad w(x) \in X.$$

Зазначимо, що $r(G_2) \le \|G_2\| = 1$. Тоді згідно з умовою (38) є збіжним ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_2^n Q_2 f^{(n)}(t-(n+1)h) = e^{\sigma(t-h)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n G_2^n e^{-\sigma n h} (Q_2 y)(x) =$$

$$= e^{\sigma(t-h)} (I_X - \sigma e^{-\sigma h} G_2)^{-1} (Q_2 y)(x).$$

Оскільки

$$((I_X - \sigma e^{-\sigma h} G_2) y)(x) = y_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2-1) - (n^2-4)\sigma e^{-\sigma h}}{(n^2-1)} y_n \varphi_n(x),$$

де $y(x) \in X$ і $y_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} y(x) \sin nx \, dx$, то

$$\big((I_X - \sigma e^{-\sigma h} G_2)^{-1} y\big)(x) = y_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{(n^2-1) - (n^2-4)\sigma e^{-\sigma h}} y_n \varphi_n(x), \quad y(x) \in X.$$

Оскільки згідно з (39)

$$(Q_2 A u_0)(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) u_{0n} \varphi_n(x), \qquad u_{0n} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} u_0(x) \sin nx \, dx,$$

то умова (16) набирає вигляду

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) u_{0n} \varphi_n(x) = e^{-\sigma h} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^2}{(n^2-1) - (n^2-4)\sigma e^{-\sigma h}} y_n \varphi_n(x),$$

що еквівалентно рівностям

$$u_{0n} = \frac{e^{-\sigma h} y_n}{(n^2-1) - (n^2-4)\sigma e^{-\sigma h}}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{40}$$

Отже, за теоремою 3, якщо виконано обмеження (38), а функції $y(x) \in L_2[0,\pi]$ та $u_0(x) \in D$ задовольняють умову (40), то існує єдиний розв'язок початково-крайової задачі (35)–(37) у класі вектор-функцій, що продовжуються до цілих вектор-функцій експоненціального типу не вищого за σ. Згідно з формулою (17) цей розв'язок має вигляд

$$u(t,x) = u_{01} \varphi_1(x) + \frac{e^{\sigma t} - 1}{3\sigma} y_1 \varphi_1(x) + e^{\sigma(t-h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_n \varphi_n(x)}{(n^2-1) - (n^2-4)\sigma e^{-\sigma h}}.$$

Література

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

2. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. – 272 с.
3. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. – 1983. – **21**. – С. 130 – 264.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
5. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
6. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во УДУВГ, 2003. – 288 с.
8. *Фодчук В. І., Бігун Я. Й., Клевчук І. І., Черевко І. М., Якімов І. В.* Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 210 с.
9. *Хан В.* Обзор по теории дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями // Математика: Сб. пер. – 1961. – **5**, № 6. – С. 73 – 98.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
11. *Gefter S. L., Piven A. L., Tanasichuk A. S.* Operator Bruwier series and initial problem for a linear differential-difference equation in a Banach space // J. Math. Sci. – 2017. – **226**, Issue 4. – P. 335 – 343.
12. *Gefter S. L., Stulova T. E.* On entire solutions of exponential type for some implicit linear differential-difference equation in a Banach space // J. Math. Sci. – 2014. – **202**, Issue 4. – P. 541 – 545.
13. *Gefter S. L., Stulova T. E.* On solutions of zero exponential type for some inhomogeneous differential-difference equations in a Banach space // Prog. and Challeng. Dyn. Syst., Springer Proc. Math. and Stat. – 2013. – **54**. – P. 253 – 263.
14. *Радбель Н. И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t) = 0$ // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 6. – С. 1142 – 1143.
15. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996 – 2010.
16. *Руткас А. Г.* Спектральные методы исследования вырожденных дифференциально-операторных уравнений // Современная математика и ее приложения. – 2005. – **35**. – С. 48 – 64.
17. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations I // Res. Notes Math. – 1980. – **40**. – 176 p.
18. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором // Мат. заметки. – 2014. – **95**, вып. 1. – С. 37 – 49.
19. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Оптимальное управление недемпфированными системами типа Соболева с запаздыванием // Мат. заметки. – 2017. – **102**, вып. 3. – С. 323 – 338.
20. *Favini A., Vlasenko L.* Degenerate non-stationary differential equations with delay in Banach spaces // J. Different. Equat. – 2003. – **192**, № 1. – P. 93 – 110.
21. *Vlasenko L. A.* On a class of neutral functional differential equations // Funct. Different. Equat. – 2006. – **13**, № 2. – P. 305 – 321.
22. *Горбачук В. М., Горбачук М. Л.* Простори гладких та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 4. – С. 478 – 509.
23. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On well-posed solvability in some classes of entire functions of the Cauchy problem for differential equations in a Banach space // Methods Funct. Anal. and Topology. – 2005. – **11**, № 2. – P. 113 – 125.
24. *Гефтер С. Л., Стулова Т. Е.* О корректности некоторого нерезонансного операторно-дифференциального уравнения в пространстве целых функций экспоненциального типа // Доп. НАН України. – 2012. – № 9. – С. 7 – 12.
25. *Perron O.* Über Bruwiersche Reihen // Math. Z. – 1939. – **45**. – S. 127 – 141.
26. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

Одержано 17.10.17