УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

СКІНЧЕННІ СТРУКТУРНО-ОДНОРІДНІ ГРУПИ І КОМУТАТИВНІ НІЛЬНАПІВГРУПИ

Let S be a finite semigroup. By $\mathrm{Sub}(S)$ we denote the lattice of all its subsemigroups. If $A \in \mathrm{Sub}(S)$, then by $h(A)$ we denote the height of the subsemigroup A in the lattice $\mathrm{Sub}(S)$. A semigroup S is called *structurally uniform* if, for any $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$ the condition $h(A) = h(B)$ implies that $A \cong B$. We present a classification of finite structurally uniform groups and commutative nilsemigroups.

Нехай S — скінченна напівгрупа. Решітку піднапівгрупи напівгрупи S позначимо через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через $h(A)$ позначимо висоту піднапівгрупи A в решітці $\mathrm{Sub}(S)$. Напівгрупа S називається структурно-однорідною, якщо для довільних $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$ з умови $h(A) = h(B)$ випливає $A \cong B$. У статті наведено класифікацію скінченних структурно-одорідних груп і комутативних нільнапівгруп.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента x існує єдиний елемент x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див. [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли кожний її елемент є регулярним і будь-які два її ідемпотенти комутують. Далі, локальним автоморфізмом математичної структури C називають ізоморфізм між двома її підструктурами. Множина всіх локальних автоморфізмів математичної структури C відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів структури C, який ми будемо позначати через $L\,\mathrm{Aut}(C)$. Відомо, що основним джерелом груп є групи автоморфізмів (групи симетрій) математичних структур. Аналогічно, основним джерелом інверсних моноїдів є інверсні моноїди локальних автоморфізмів (локальних симетрій) математичних структур. Вивчення взаємозв'язків між математичною структурою C і групою автоморфізмів $\mathrm{Aut}(C)$ є актуальною задачею. Аналогічно, важливою проблемою в теорії інверсних напівгруп є вивчення зв'язків між властивостями математичної структури C і інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(C)$. Зокрема, у статті [2] (крім іншого) знайдено структуру групи G, для якої інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(G)$ є кліффордовим. У роботі [3] наведено опис інверсних напівгруп S, для яких інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів між інверсними піднапівгрупами напівгрупи S є цілком напівпростим або фундаментальним.

Скажемо, що напівгрупа S є конгруенц-переставною (або просто переставною), якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Класичним прикладом конгруенц-переставної напівгрупи є група. До конгруенц-переставних напівгруп також належать скінченна симетрична інверсна напівгрупа, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченновимірного векторного простору, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченної лінійно впорядкованої напіврешітки, напівгрупа Брандта та інші напівгрупи. У статті [8] наведено повну класифікацію скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставною напівгрупою. Відомо (див. [13]), що множина ідеалів конгруенц-переставної напівгрупи є лінійно впорядкованою відносно включення. У зв'язку з цією обставиною виникає проблема класифікації скінченних напівгруп S, для яких інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ має лінійно впорядковану (відносно включення) множину ідеалів. Відомо (див. [7], теорема 1), що множина ідеалів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і лише тоді, коли з умови $h(A) = h(B)$ випливає $A \cong B$ $\big($тут через $h(A)$ позначено висоту піднапівгрупи A в решітці $\mathrm{Sub}(S)\big)$. Далі (для зручності) скінченну напівгрупу, яка задовольняє щойно зазначену умову, будемо називати *структурно-однорідною*.

У данній статті ми класифікуємо структурно-однорідні скінченні групи (див. теорему 1), а також скінченні комутативні структурно-однорідні нільнапівгрупи (див. теорему 3).

1. Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів. Нехай S — довільна напівгрупа. Ізоморфізм між піднапівгрупами напівгрупи S називають *локальним автоморфізмом* напівгрупи S. Множина всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який ми позначимо через $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $\xi \in L\,\mathrm{Aut}(S)$, то через $\mathrm{dom}(\xi)$ і $\mathrm{im}(\xi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму ξ.

Напівгрупа називається конгруенц-переставною (або просто переставною), якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho\circ\sigma = \sigma\circ\rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень.

Нехай P — скінченна впорядкована множина з найменшим елементом 0. Висотою $h(x)$ елемента x називається точна верхня межа довжин ланцюгів, що з'єднують елементи 0 і x.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа у групі), то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ вважається саме ця піднапівгрупа. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупи в S не існує, то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ будемо вважати порожню множину $\varnothing$, і в цьому випадку порожнє перетворення є нулем інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A позначимо відношення рівності на піднапівгрупі A. Зрозуміло, що Δ_A є ідемпотентом моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Кожний ідемпотент напівгрупи $L\,\mathrm{Aut}(S)$ має таку форму. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через $h(A)$ будемо позначати висоту піднапівгрупи A в решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини (відносно звичайного канонічного порядку на S). Якщо $a \in S$, то (за означенням) $\mathrm{rank}(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці $E(S)$. Легко перевірити, що при такому означенні рангу елемента виконується характеристична нерівність $\mathrm{rank}(a\cdot b) \le \min\big\{\mathrm{rank}(a), \mathrm{rank}(b)\big\}$. Зазначимо, що таке означення рангу елемента інверсної напівгрупи скінченної довжини в багатьох випадках (наприклад, у випадку скінченної симетричної інверсної напівгрупи) тотожне класичному означенню. Конкретизуємо наше означення рангу для інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ у випадку, коли S — скінченна напівгрупа. Отже, нехай $f \in L\,\mathrm{Aut}(S)$, тоді (за означенням) $\mathrm{rank}(f) = h(\mathrm{im}(f))$, де $h(\mathrm{im}(f))$ — висота піднапівгрупи $\mathrm{im}(f)$ у решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Групу $Q_8 = \big\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\big\}$, де множення задається правилом $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, називають *групою кватерніонів.*

Для простого числа p через $\mathbb{Z}_p$ позначимо відповідне поле. Множина всіх верхніх трикутних матриць вигляду $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де a, b, c — довільні елементи з поля $\mathbb{Z}_p$, відносно звичайної операції множення матриць утворює групу, яку називають групою Гайзенберга над полем $\mathbb{Z}_p$ і позначають через $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$.

Напівгрупу, що містить нуль, називають нільнапівгрупою, якщо для довільного $x \in S$ існує таке натуральне число n, що $x^n = 0$. Мінімальне значення k, для якого справджується ця рівність, називають індексом нільпотентності елемента x і позначають через $nd(x)$.

Напівгрупу S з нулем називають напівгрупою з нульовим множенням, якщо $S^2 = \{0\}$.

Напівгрупа називається в'язкою, якщо кожний її елемент є ідемпотентом.

Всі інші поняття щодо абстрактних напівгруп і напівгруп перетворень можна знайти відповідно в [1] і [4].

Тепер сформулюємо кілька тверджень, необхідних для подальшого викладу.

Твердження 1 (див. [5], теорема 2)**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є конгруенц-переставною в тому і лише в тому випадку*, *коли виконуються такі умови*:

1) *якщо* $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$, *то $SaS = SbS$ для будь-яких $a, b \in S$*;

2) *для будь-якого $e \in E(S)$* $(\mathrm{rank}(e) \geq 2)$ *існують ідемпотенти f і g такі*, *що $f \neq g$, $f < e, g < e$ і* $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = \mathrm{rank}(e) - 1$.

Зауваження **1** (див. [5], теорема 1)**.** Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S конгруенц-переставна тоді і лише тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

Зауваження **2** (див. [6], теорема 2)**.** Зазначимо, що умова 1 твердження 1 еквівалентна лінійній впорядкованості (відносно включення) множини ідеалів напівгрупи S.

Зауваження **3** (див. [5], лема 1)**.** Умовою 2 часто зручніше користуватися в еквівалентній формі, а саме: якщо $u < v$, де $u, v \in E(S)$ і $\mathrm{rank}(u) \geq 1$, то існує елемент $w \in E(S)$ такий, що $u \neq w, w < v$ і $\mathrm{rank}(u) = \mathrm{rank}(w)$.

Твердження 2 (див. [7], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна напівгрупа. Множина ідеалів напівгрупи $L\,\mathrm{Aut}(S)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і тільки тоді*, *коли в решітці* $\mathrm{Sub}(S)$ *неізоморфні піднапівгрупи мають різні висоти.*

Твердження 3 (див. [8], теорема 2)**.** *Нехай G — скінченна група. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(G)$ є конгруенц-переставним тоді і лише тоді*, *коли G*:

1) *або елементарна абелева p-група, де p — довільне просте число*;

2) *або група Гайзенберга над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, де p — довільне непарне просте число.*

У даній статті ми розглядаємо лише скінченні групи і напівгрупи. Тому далі (якщо не зазначено інше) під словами „група" і „напівгрупа" ми розуміємо відповідно „скінченна група" і „скінченна напівгрупа".

2. Структурно-однорідні групи.

Означення. *Напівгрупу S назвемо структурно-однорідною*, *якщо будь-які дві її піднапівгрупи однакової висоти в решітці* $\mathrm{Sub}(S)$ *є ізоморфними.*

Лема 1. *Якщо група G є структурно-однорідною*, *то G є p-групою, де p — просте число.*

Доведення. Нехай $|G| = m$. Припустимо, що прості числа p_1 і p_2 $(p_1 \neq p_2)$ є дільниками числа m. За теоремою Коші група G містить підгрупи A і B, порядки яких відповідно p_1 і p_2. Оскільки $h(A) = h(B) = 1$ і за умовою група G є структурно-однорідною, то $A \cong B$. Суперечність. Таким чином, число m має лише один простий дільник. Позначимо його через p. Отже, $m = p^n$ для деякого натурального числа n.

Лему 1 доведено.

Зазначимо, що доведення леми 1 майже повністю збігається з доведенням леми 3 зі статті [8].

Наступна теорема містить повний список структурно-однорідних груп.

Теорема 1. *Група G є структурно-однорідною тоді і тільки тоді*, *коли G*:

(i) *або циклічна група порядку p^n, де p — просте число*;

(ii) *або група кватерніонів Q_8*;

(iii) *або елементарна абелева p-група*;

(iv) *або група Гайзенберга* $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ *над скінченним полем* $\mathbb{Z}_p$, *де* p — *просте непарне число.*

Доведення. Спочатку покажемо, що кожна з перелічених у теоремі груп має однорідну структуру.

(i) Нехай G — циклічна група порядку p^n, де p — просте число. Відомо, що в цьому випадку решітка підгруп $\mathrm{Sub}(G)$ є лінійно впорядкованою. Отже, існує лише одна підгрупа заданої висоти α, $0 \leq \alpha \leq n$. Звідси випливає, що циклічна група G є структурно-однорідною.

(ii) Група кватерніонів Q_8 містить чотири власні підгрупи: одну підгрупу порядку 2 і три циклічні підгрупи порядку 4 (див., наприклад, [12]). Ці три циклічні підгрупи в решітці $\mathrm{Sub}(Q_8)$ мають однакову висоту (яка дорівнює 2) і, зрозуміло, вони попарно ізоморфні. Отже, група Q_8 є структурно-однорідною.

(iii) У статті [7] доведено, що для елементарної абелевої p-групи G інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(G)$ є конгруенц-переставним, а отже (див. [13], теорема 4), множина ідеалів моноїда $L\,\mathrm{Aut}(G)$ лінійно впорядкована відносно включення. Тому, згідно з твердженням 2, елементарна абелева p-група є структурно-однорідною.

(iv) Аналогічно, позаяк інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p))$, де p — просте непарне число, є конгруенц-переставним (див. [8]), то група $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ є структурно-однорідною.

Тепер покажемо, що групи, вказані в теоремі, вичерпують усі скінченні структурно-однорідні групи. Отже, нехай скінченна група G є структурно-однорідною. Тоді, згідно з лемою 1, група G є p-групою, тобто $|G| = p^n$, де p — просте число.

Розглянемо два випадки.

Перший випадок. Група G містить точно одну підгрупу порядку p.

Тоді, згідно з теоремою 12.5.2 (див. [14]) група G є або циклічною, або узагальненою групою кватерніонів. Припустимо, що G — узагальнена група кватерніонів. Тоді (див. [14], теорема 12.5.1)

$$G = \left\langle a, b \colon a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, ba = a^{-1}b \right\rangle, \qquad p = 2, \quad n \geq 3.$$

Якщо $n \geq 4$, то група G містить циклічну підгрупу C_8 порядку 8. Крім того, група G містить групу кватерніонів Q_8. Підгрупи C_8 і Q_8 мають однакову висоту в решітці $\mathrm{Sub}(G)$, тому $C_8 \cong Q_8$. Суперечність. Отже, в першому випадку група G є або циклічною, або групою кватерніонів.

Другий випадок. Група G містить щонайменше дві підгрупи порядку p.

Тоді хоча б одна підгрупа порядку p належить центру групи G. Позначимо її через A. Якщо підгрупа B така, що $|B| = p$ і $B \neq A$, то підгрупа AB містить p^2 елементів і, зрозуміло, не є циклічною. Далі, нехай a — довільний (відмінний від одиниці) елемент групи G, тоді $|\langle a \rangle| = p^k$. Припустимо, що $k \geq 2$, тоді група $\langle a \rangle$ містить циклічну підгрупу C порядку p^2. Оскільки (за умовою) група G є структурно-однорідною і $h(AB) = h(C) = 2$, то $AB \cong C$. Суперечність. Отже, довільний (відмінний від одиниці) елемент групи G має порядок p, тобто $\exp(G) = p$. Таким чином, згідно з твердженням 4 (див. [8]), інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(G)$ є конгруенц-переставним, а отже (див. твердження 3), група G є або елементарною абелевою p-групою, або групою Гайзенберга над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, де p — просте непарне число.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що серед чотирьох типів груп, перелічених у теоремі 1, лише для елементарної абелевої p-групи і групи Гайзенберга $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$, де p — просте непарне число, відповідні інверсні моноїди локальних автоморфізмів є конгруенц-переставними. Розглянемо для прикладу інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$, де $\mathbb{Z}_9$ — циклічна група відносно операції додавання за модулем 9. Вона містить три підгрупи: $\{0\}, \{0,3,6\}, \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Перелічимо всі дев'ять елементів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ідемпотент φ_1 не задовольняє умову 2 твердження 1, то інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$ не є конгруенц-переставним. Підтвердимо цей факт, так би мовити, вручну, використавши загальний метод конструювання двох непереставних конгруенцій (див. [5], теорема 2) на $L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$. Для цього моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$ розіб'ємо на три класи: $0 = \{0\}$, $A = \{\alpha, \varphi_1, \varphi_4, \varphi_7\}$, $B = \{\beta, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8\}$. Відносно операції глобального множення маємо $0 \cdot 0 = 0 \cdot A = A \cdot 0 = B \cdot 0 = 0 \cdot B = 0$, $A \cdot A = B \cdot B = A$, $A \cdot B = B \cdot A = B$. Отже, дане розбиття визначає конгруенцію, яку ми позначимо через Σ. Через Ω позначимо конгруенцію Ріса, що визначається ідеалом $\{0, \alpha, \beta\}$. Оскільки $(0, \alpha) \in \Omega$ і $(\alpha, \varphi_1) \in \Sigma$, то $(0, \varphi_1) \in \Omega \circ \Sigma$. Однак $(0, \varphi_1) \notin \Sigma \circ \Omega$. Дійсно, якщо припустити, що $(0, \varphi_1) \in \Sigma \circ \Omega$, то існує $\xi \in L\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$ такий, що $(0, \xi) \in \Sigma$ і $(\xi, \varphi_1) \in \Omega$. Якщо $(0, \xi) \in \Sigma$, то $0 = \xi$. Отже, $(0, \varphi_1) \in \Omega$. Одержали суперечність. Таким чином, $\Sigma \circ \Omega \neq \Omega \circ \Sigma$.

Кажуть, що напівгрупа A в деякому класі напівгруп $\mathfrak{C}$ визначається інверсним моноїдом $L\,\mathrm{Aut}(A)$, якщо з умови $L\,\mathrm{Aut}(A) \cong L\,\mathrm{Aut}(B)$ для деякої напівгрупи $B \in \mathfrak{C}$ випливає $A \cong B$.

У статті [11] доведено таку теорему.

Теорема 2. *Будь-яка скінченна p-група, всі власні підгрупи якої є комутативними, у класі всіх груп визначається своїм моноїдом локальних автоморфізмів.*

Структурно-однорідна група у класі всіх груп визначається своїм інверсним моноїдом локальних автоморфізмів, оскільки вона є p-групою, всі власні підгрупи якої є комутативними.

3. Структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи. Структурно-однорідні в'язки класифіковано в [7]. Сформулюємо відповідний результат.

Твердження 4 (див. [7], леми 5 – 8)**.** *В'язка S є структурно-однорідною тоді і лише тоді, коли S:*

(1) *або лінійно впорядкована напіврешітка*;

(2) *або примітивна напіврешітка*;

(3) *або напівгрупа лівих нулів*;

(4) *або напівгрупа правих нулів.*

Далі покажемо, що структурно-однорідна комутативна напівгрупа є або в'язкою, або нільнапігрупою, або ідеальним розширенням нетривіальної групи за допомогою нільнапівгрупи. Для цього доведемо таку лему.

Лема 2. *Якщо комутативна напівгрупа S є структурно-однорідною і містить щонайменше два ідемпотенти, то кожний елемент напівгрупи S є ідемпотентом.*

Доведення. Нехай елементи a і b є різними ідемпотентами напівгрупи S. Тоді існують $x, y \in E(S)$ такі, що $x < y$ $\big($тут $<$ є звичайним канонічним порядком на $E(S)\big)$. Висота напіврешітки $\{x, y\}$ у решітці $\mathrm{Sub}(S)$ дорівнює 2. $\big($Нагадаємо, що найменшим елементом решітки $\mathrm{Sub}(S)$ є порожня піднапівгрупа $\varnothing$.$\big)$

Далі, нехай z — довільний елемент напівгрупи S. Розглянемо циклічну піднапівгрупу $\langle z \rangle$. Відомо, що будь-яка скінченна циклічна напівгрупа містить ядро K, яке є групою. Припустимо, що $|\langle z \rangle| \geq 2$. Розглянемо можливі випадки.

1. Ядро напівгрупи $\langle z \rangle$ є одноелементним.

У цьому випадку $\langle z \rangle$ є нільнапівгрупою. Довільна нетривіальна нільнапівгрупа містить двохелементну піднапівгрупу. Позначимо її через A. Очевидно, що $h(A) = 2$. Оскільки напівгрупа S є структурно-однорідною і $h(A) = h(\{x, y\}) = 2$, то $A \cong \{x, y\}$. Суперечність.

2. Ядро K напівгрупи $\langle z \rangle$ є нетривіальним.

Зрозуміло, що група K містить підгрупу B простого порядку. Оскільки в решітці $\mathrm{Sub}(S)$ $h(B) = h(\{x, y\}) = 2$, то $A \cong \{x, y\}$. Суперечність.

Отже, для довільного елемента z циклічна піднапівгрупа $\langle z \rangle$ є одноелементною, тобто z — ідемпотент.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Якщо комутативна напівгрупа є структурно-однорідною, то вона є або в'язкою, або групою, або розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи.*

Доведення. Якщо напівгрупа S містить щонайменше два ідемпотенти, то, згідно з попередньою лемою, кожний елемент напівгрупи S є ідемпотентом.

Нехай тепер напівгрупа S є уніпотентною. Позначимо через K ядро напівгрупи S, тобто найменший (відносно включення) ідеал напівгрупи S. Відомо, що K є простою напівгрупою. Проста скінченна напівгрупа є регулярною. Як відомо, регулярна напівгрупа з єдиним ідемпотентом є групою. Якщо $K \neq S$, то S є розширенням групи K за допомогою нільнапівгрупи.

Лему 3 доведено.

Далі ми неодноразово (явно чи неявно) будемо використовувати таку лему.

Лема 4 (див. [9], лема 4)**.** *Нехай S — нільнапівгрупа. Якщо піднапівгрупа A_k містить $k+1$ елемент, то $h(A_k) = k$.*

Лема 5. *Якщо нільнапівгрупа S є структурно-однорідною, то індекс нільпотентності довільного елемента не перевищує* 4.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто існує елемент $x \in S$ такий, що $n = nd(x) \geq 5$. Очевидно, що $B = \{x^{n-2}, x^{n-1}, 0\}$ є триелементною піднапівгрупою з нульовим множенням. Якщо n — непарне число, то піднапівгрупа $C = \{x^{\frac{n-1}{2}}, x^{n-1}, 0\}$ є циклічною. Оскільки $|B| = |C|$, то, згідно з лемою 4, $h(B) = h(C)$. Звідси $B \cong C$. Суперечність. Якщо n — парне число, то піднапівгрупа $D = \{x^{\frac{n-2}{2}}, x^{n-2}, 0\}$ є циклічною. Позаяк $|B| = |D|$, то $h(B) = h(D)$. Звідси $B \cong D$. Знову одержали суперечність.

Лему 5 доведено.

***3.1. Структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, в яких найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 2.** Спочатку зауважимо, що напівгрупа S з нульовим множенням є структурно-однорідною, оскільки множина ідеалів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є лінійно впорядкованою відносно включення (див. твердження 2).

У подальших викладках важливу роль відіграватиме напівгрупа K, що задана таблицею Келі.

$\star$	**0**	**a**	**x**	**y**
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
x	0	0	0	a
y	0	0	a	0

Лема 6. *Якщо S є комутативною нільнапівгрупою, яка відмінна від напівгрупи з нульовим множенням, і для довільного елемента $x \in S$ має місце рівність $x^2 = 0$, то S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна нільнапівгрупі K.*

Доведення. За умовою існує елемент $a \neq 0$ такий, що $xy = a$ для деяких $x, y \in S$. Зрозуміло, що елементи 0, a, x, y є попарно різними. Оскільки $xy = a$, то $xa = x^2y = 0$. Аналогічно $ya = 0$. Отже, множина $\{0, a, x, y\}$ утворює напівгрупу, яка, очевидно, ізоморфна нільнапівгрупі K.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, для якої індекс нільпотентності довільного елемента не перевищує* 2. *Якщо напівгрупа відмінна від напівгрупи з нульовим множенням, то $|S^2| = 2$.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $|S^2| \geq 4$. Позначимо S^2 через R. Розглянемо можливі випадки.

Перший випадок. $R^2 = \{0\}$, тобто R є напівгрупою з нульовим множенням.

Оскільки $|S^2| \geq 4$, то існують три ненульові елементи $u, v, w \in S^2$. Піднапівгрупа $\{0, u, v, w\}$ є напівгрупою з нульовим множенням. Оскільки $h(\{0, u, v, w\}) = h(K) = 3$, то $\{0, u, v, w\} \cong K$. Позаяк напівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, то одержали суперечність.

Другий випадок. $R^2 \neq \{0\}$.

Отже, існують $x, y \in R$ такі, що $xy = z \neq 0$. Оскільки $x \in S^2$, то існують елементи u і v такі, що $uv = x$. Розглянемо множину $\{0, u, x, z\}$. Покажемо, що елементи 0, u, x, z попарно різні. По-перше, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $u \neq 0$. Припустимо, що $u = x$, тоді $uv = u$. З останньої рівності легко випливає $u = 0$. Суперечність. Припустимо, що $u = z$. Оскільки $uv = x$, то $zv = xyv = x$. Позаяк $y^2 = 0$, то $vxy^2 = xy = z = 0$. Суперечність. Якщо припустити, що

$x = z$, то $x = xy$. Звідси $xy = xy^2 = 0$. Суперечність. Отже, елементи 0, u, x, z є попарно різними. Далі, $ux = u^2v = 0$, $uz = uxy = 0y = 0$, $xz = xxy = 0$. Отже, $\{0, u, x, z\}$ — напівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $h(\{0, u, x, z\}) = h(K) = 3$, то $\{0, u, x, z\} \cong K$. Позаяк піднапівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, то одержали суперечність. Таким чином, $|S^2| \leq 3$.

Тепер припустимо, що $|S^2| = 3$. Нехай $S^2 = \{0, a, b\}$. Виберемо елемент $x \notin S^2$. Розглянемо множину $\{0, a, b, x\}$. По-перше, чотири елементи $0, a, b, x$ є попарно різними. Оскільки $b \in S^2$, то існують елементи $z, t \in S$ такі, що $zt = b$. Припустимо, що $bx = a$, тоді $(zt)x = z(tx) = a$. Якщо припустити, що $tx = a$, то $za = a$. Звідси $a = 0$. Суперечність. Якщо припустити, що $tx = b$, то $zb = a$, а отже, $z(zt) = (z^2)t = a = 0$. Суперечність. Таким чином, $bx = 0$.

Розглянемо тепер елемент ax. Оскільки $a \in S^2$, то $a = gf$ для деяких $g, f \in S$. Припустимо, що $ax = a$, тоді $ax^2 = ax = a = 0$. Суперечність. Тепер припустимо, що $ax = b$, тоді $(gf)x = g(fx) = b$. Якщо $fx = b$, то $gb = b$. Звідси легко випливає, що $b = 0$. Суперечність. Якщо ж припустити, що $fx = a$, то $b = ga = g(gf) = g^2f = 0$. Суперечність. Отже, $ax = 0$. Крім того, очевидно, що $ab = 0$. Таким чином, $\{0, a, b, x\}$ — піднапівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $h(\{0, a, x, z\}) = h(K) = 3$, то $\{0, a, x, z\} \cong K$. Позаяк піднапівгрупа K не є напівгрупою з нульовим множенням, то одержуємо суперечність.

Таким чином, $|S^2| = 2$.

Лему 7 доведено.

Щойно ми довели рівність $|S^2| = 2$. Отже, $S^2 = \{0, a\}$.

Лема 8. *Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, для кожного елемента x якої має місце рівність $x^2 = 0$. Якщо нільнапівгрупа S відмінна від напівгрупи з нульовим множенням, то для будь-яких $u, v \in S - \{0, a\}$, де $u \neq v$, виконується рівність $uv = a$.*

Доведення. Зрозуміло, що $\{0, a, u, v\}$ є піднапівгрупою напівгрупи S, причому

$$h(\{0, a, u, v\}) = h(K).$$

Отже, $\{0, a, u, v\} \cong K$. Звідси легко випливає, що $uv = a$.

Конструкція 1

На підставі двох останніх лем ми маємо можливість конструювати структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, для яких індекс нільпотентності довільного елемента не перевищує 2 і які відмінні від напівгрупи з нульовим множенням.

Нехай $A = \{0, a\}$ — двохелементна множина, а X — довільна скінченна множина така, що $\{0, a\} \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 2$. На множині $A \cup X$ визначимо бінарну операцію $*$ таким чином:

$u * u = 0$ для будь-якого $u \in A \cup X$;

$0 * u = u * 0 = a * u = u * a = 0$ для будь-якого $u \in A \cup X$;

якщо $x, y \in X$ і $x \neq y$, то $x * y = a$.

Легко перевірити асоціативність операції $*$. Напівгрупа $(A \cup X, *)$ є комутативною нільнапівгрупою (відмінною від напівгрупи з нульовим множенням), причому $nd(x) = 2$ для будь-якого $x \in X$.

Щойно сконструйована нільнапівгрупа є структурно-однорідною. Щоб це показати, перелічимо спочатку всі її піднапівгрупи: $\{0\}, \{0, u\}$ (де $u \in \{a\} \cup X$), $\{0, a\} \cup Z$, де Z пробігає всі підмножини множини X, які містять щонайменше два елементи. Тепер вже легко перевірити, що підгрупи однакового порядку (а отже, однакової висоти в $\mathrm{Sub}(A \cup X)$) є ізоморфними.

Якщо $|X| = n$, то число піднапівгруп нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ дорівнює $1 + n + 2^n$. Число елементів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ дорівнює $1 + (n+1)^2 + 2n^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot k!$. Група автоморфізмів нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ ізоморфна симетричній групі S_n.

3.2. Структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, в яких найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює 3.

Лема 9. *Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 3.

Якщо $nd(x) = nd(y) = 3$, то $x^2 = y^2$.

Доведення. Множину $\{u \in S : u^2 = 0\}$ позначимо через A. Зрозуміло, що A є піднапівгрупою напівгрупи S. Покажемо, що $|A| \leq 2$. Припустимо протилежне, тобто $|A| \geq 3$. Тоді існує піднапівгрупа B така, що $B \subseteq A$ і $|B| = 3$. Індекс нільпотентності будь-якого елемента піднапівгрупи B не перевищує 2. Отже, $B \ncong \{0, x, x^2\}$. Суперечність. Таким чином, $|A| \leq 2$. Оскільки $\{0, x^2\} \subseteq A$, то $A = \{0, x^2\}$. Аналогічно $A = \{0, y^2\}$, тобто $A = \{0, x^2\} = \{0, y^2\}$. Звідси $x^2 = y^2$.

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 3.

Якщо $nd(x) = nd(y) = 3$, то $nd(xy) \leq 2$.

Доведення. Позначимо xy через z, а x^2 через b. Припустимо, що $nd(z) = 3$. Тоді, згідно з попередньою лемою, $y^2 = z^2 = b$. Позаяк $xy = z$, то $xz = x^2 y = y^2 \cdot y = 0$. Аналогічно доводимо, що $yz = 0$. Далі, $(xy)z = z^2 = b$. З іншого боку, $x(yz) = x0 = 0$, тобто $(xy)z \neq \neq x(yz)$. Суперечність.

Лему 10 доведено.

Лема 11. *Якщо S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 3, *то S містить точно один елемент a такий, що $nd(a) = 2$.*

Доведення. Нехай елемент x такий, що $nd(x) = 3$. Позначимо x^2 через a. Очевидно, що $nd(a) = 2$. Множину $\{u \in S : u^2 = 0\}$ позначимо через A. Тоді $A = \{0, x^2\} = \{0, a\}$ (див. доведення леми 9). Тобто елемент a єдиний, індекс нільпотентності якого дорівнює 2.

Лему 11 доведено.

Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює 3. Позначимо через X множину $\{x \in S : nd(x) = 3\}$. Для довільного $z \in X$ має місце рівність $za = az = zz^2 = z^2 z = 0$. Крім того, $a^2 = 0$. Отже, $S^2 = \{0, a\}$.

Лема 12. *Нехай $x, y \in X$ і $x \neq y$. Якщо $u, v \in X$ і $u \neq v$, то $xy = uv$.*

Доведення. Вище ми вже зазначили, що $S^2 = \{0, a\}$. Отже, $\{0, a, x, y\}$ і $\{0, a, u, v\}$ — піднапівгрупи нільнапівгрупи S. Оскільки $h(\{0, a, x, y\}) = h(\{0, a, u, v\}) = 3$, то $\{0, a, x, y\} \cong \cong \{0, a, u, v\}$. Нехай $\xi \colon \{0, a, x, y\} \longrightarrow \{0, a, u, v\}$ — ізоморфізм. Очевидно, що $(0)\xi = 0$ і $(a)\xi = a$, до того ж $(x)\xi \in \{u, v\}$ і $(y)\xi \in \{u, v\}$. Припустимо, що $xy = a$. Тоді $(xy)\xi = (a)\xi = = a = (x)\xi(y)\xi = uv$. Аналогічно, якщо $xy = 0$, то $uv = 0$.

Лему 12 доведено.

Конструкція 2A

На підставі чотирьох останніх лем ми маємо можливість конструювати структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, в яких найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює 3.

Нехай $A = \{0, a\}$ — двохелементна множина, а X — довільна непорожня скінченна множина така, що $\{0, a\} \cap X = \varnothing$. На множині $A \cup X$ визначимо бінарну операцію $*$ таким чином:

$0 * u = u * 0 = a * u = u * a = 0$ для будь-якого $u \in A \cup X$;

якщо $x, y \in X$, то $x * y = a$.

Легко перевірити асоціативність операції $*$. Напівгрупа $(A \cup X, *)$ є комутативною нільнапівгрупою, причому $nd(x) = 3$ для будь-якого $x \in X$.

Щойно сконструйована нільнапівгрупа є структурно-однорідною. Щоб це показати, перелічимо спочатку всі її піднапівгрупи: $\{0\}, \{0, a\}, \{0, a\} \cup Z$, де Z пробігає всі непорожні підмножини множини X. Тепер вже легко перевірити, що піднапівгрупи однакового порядку (а отже, однакової висоти в $\mathrm{Sub}(A \cup X)$) є ізоморфними.

Якщо $|X| = n$, то число піднапівгруп нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ дорівнює $1 + 2^n$. Число елементів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ дорівнює $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot k! + 1$. Група автоморфізмів нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ ізоморфна симетричній групі S_n.

Конструкція 2B

Нехай $A = \{0, a\}$ — двохелементна множина, а X — довільна непорожня скінченна множина така, що $\{0, a\} \cap X = \varnothing$. На множині $A \cup X$ визначимо бінарну операцію $\star$ таким чином:

$0 \star u = u \star 0 = a \star u = u \star a = 0$ для будь-якого $u \in A \cup X$;

якщо $x \in X$, то $x^2 = a$;

якщо $x, y \in X$ і $x \neq y$, то $x \star y = 0$.

Легко перевірити асоціативність операції $\star$. Напівгрупа $(A \cup X, \star)$ є комутативною нільнапівгрупою, причому $nd(x) = 3$ для будь-якого $x \in X$.

Щойно сконструйована нільнапівгрупа є структурно-однорідною. Зазначимо, що $\mathrm{Sub}(A \cup \cup X, *) \cong \mathrm{Sub}(A \cup X, \star)$. Проте $(A \cup X, *) \ncong (A \cup X, \star)$.

Розглянемо нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ з конструкції 2A і $(A \cup X, \star)$ з конструкції 2B у випадку, коли $X = \{x, y\}$. Легко встановити, що

$$\mathrm{Sub}(A \cup X, *) = \mathrm{Sub}(A \cup X, \star) = \big\{\{0\}, \{0, a\}, \{0, a, x\}, \{0, a, y\}, \{0, a, x, y\}\big\}.$$

Крім того,

$$L\,\mathrm{Aut}(A \cup X, *) = L\,\mathrm{Aut}(A \cup X, \star) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ 0 & a & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ 0 & a & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & y \\ 0 & a & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & y \\ 0 & a & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & x & y \\ 0 & a & x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & x & y \\ 0 & a & y & x \end{pmatrix} \right\}.$$

Оскільки $(A \cup X, *) \ncong (A \cup X, \star)$, то робимо висновок, що нільнапівгрупа $(A \cup X, *)$ не визначається своїм інверсним моноїдом локальних автоморфізмів.

***3.3. Структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, в яких найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 4.**

Лема 13. *Нехай* S — *структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 4.

Якщо $nd(x) = nd(y) = 4$, *то* $x^2 = y^2$ *і* $x^3 = y^3$.

Доведення. Множину $\{u \in S : nd(u) \leq 2\}$ позначимо через A. Зрозуміло, що A є піднапівгрупою напівгрупи S. Покажемо, що $|A| \leq 3$. Припустимо протилежне, тобто $|A| \geq 4$. Тоді існує піднапівгрупа B така, що $B \subseteq A$ і $|B| = 4$. Індекс нільпотентності будь-якого елемента піднапівгрупи B не перевищує 2. Отже, $B \ncong \{0, x, x^2, x^3\}$, що суперечить умові. Таким чином, $|A| \leq 3$. Оскільки $\{0, x^2, x^3\} \subseteq A$, то $A = \{0, x^2, x^3\} = \{0, y^2, y^3\}$. Припустимо, що $x^2 = y^3$ і $x^3 = y^2$. Тоді $xy^2 = x \cdot x^3 = x^4 = 0$ і $x^3 = x \cdot y^3 = xy^2 \cdot y = 0$. Оскільки $nd(x) = 4$, то одержуємо суперечність. Отже, $x^2 = y^2$ і $x^3 = y^3$.

Лему 13 доведено.

Лема 14. *Нехай* S — *структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює* 4.

Якщо $nd(u) = nd(v) = 4$, *то* $uv = u^2$.

Доведення. Як і в попередній лемі, через A позначимо множину $\{x \in S : nd(x) \leq 2\}$. Згідно з попередньою лемою, $A = \{0, u^2, u^3\}$. Позаяк $uvuv = u^2v^2 = u^2u^2 = u^4 = 0$, то $uv \in A$. Звідси або $uv = 0$, або $uv = u^3$, або $uv = u^2$. Якщо припустити, що $uv = 0$, то $u^2v = 0$. Замінюючи u^2 на v^2 (див. лему 13), одержуємо $v^3 = 0$. Проте за умовою $nd(v) = 4$. Суперечність. Якщо припустити, що $uv = u^3$, то $u^2v = u^4 = 0$. Звідси (замінюючи u^2 на v^2) одержуємо $v^3 = 0$. Суперечність. Залишається єдина можливість: $uv = u^2$.

Лему 14 доведено.

Нехай S — структурно-однорідна комутативна нільнапівгрупа, в якій найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює 4. Позначимо через X множину $\{x \in S : nd(x) = 4\}$. Якщо $x \in X$, то через A позначимо множину $\{0, x^3, x^2\} = \{0, a, b\}$, де $x^3 = a, x^2 = b$. Використовуючи дві останні леми, одержуємо:

$0z = z0 = az = za = z^3z = za = zz^3 = 0$ для будь-якого $z \in X$;

$A^2 = \{0\}$;

$uv = b$ для довільних $u, v \in X$;

$zb = bz = zz^2 = z^2z = z^3 = a$ для будь-якого $z \in X$.

Конструкція 3

Останні дві леми дозволяють конструювати структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи, в яких найбільший індекс нільпотентності елемента дорівнює 4.

Отже, нехай $A = \{0, a, b\}$. Позначимо через X довільну непорожню скінченну множину, причому $X \cap A = \varnothing$. На множині $A \cup X$ визначимо бінарну операцію $*$ таким чином:

$0 * y = y * 0 = a * y = y * a = 0$ для будь-якого $y \in A \cup X$;

$A * A = \{0\}$;

якщо $x_i, x_k \in X$, то $x_i * x_k = x_k * x_i = b$;

якщо $x \in X$, то $x * b = b * x = a$.

Перевіримо асоціативність операції $*$ на множині $A \cup X$. Нехай $u, v, w \in A \cup X$. Якщо серед елементів u, v, w є 0 або елемент a, то $(uv)w = u(vw) = 0$. Якщо $y, z \in X$, то $(yz)b = y(zb) = (yb)z = y(bz) = z(by) = (zb)y = z(yb) = (zy)b = b(yz) = (by)z = b(zy) = (bz)y = 0$. Якщо $x, y, z \in X$, то $(xy)z = x(yz) = a$. Отже, операція $*$ має властивість асоціативності. Отримана напівгрупа є скінченною комутативною нільнапівгрупою. Легко перевірити, що $nd(x) = 4$ для будь-якого $x \in X$.

Щойно сконструйована нільнапівгрупа є структурно-однорідною. Щоб це показати, перелічимо спочатку всі її піднапівгрупи: $\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, a, b\}, \{0, a, b\} \cup Z$, де Z пробігає усі непорожні підмножини множини X. Тепер вже легко перевірити, що підгрупи однакового порядку (а отже, однакової висоти в $\mathrm{Sub}(A \cup X)$) є ізоморфними. Якщо $|X| = n$, то число піднапівгруп нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ дорівнює $3 + 2^n$. Число елементів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ дорівнює $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot k! + 6$. Група автоморфізмів нільнапівгрупи $(A \cup X, *)$ ізоморфна симетричній групі S_n.

Для прикладу перелічимо всі 13 елементів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ у випадку, коли $X = \{x, y\}$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x \\ 0 & a & b & x \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x \\ 0 & a & b & y \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & y \\ 0 & a & b & y \end{pmatrix}, \quad \beta_5 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & y \\ 0 & a & b & x \end{pmatrix},$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & a & b & x & y \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & a & b & y & x \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що множина ідеалів моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ лінійно впорядкована відносно включення. Проте умова 2 твердження 1 для ідемпотента β_2 не виконується. Отже, інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ не є конгруенц-переставним. Покажемо це безпосередньо, використавши загальний метод (див. [5], теорема 2) конструювання двох непереставних конгруенцій. Для цього розіб'ємо інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ на п'ять класів: $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$, $C = \{\gamma\}$, $D = \{\delta\}$, $E = \{\epsilon\}$. Легко перевірити, що дане розбиття інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ визначає конгруенцію, яку ми позначимо через Σ. Фактор-напівгрупу по цій конгруенції подамо у вигляді таблиці Келі.

$\diamond$	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	A	A	A	A	A
B	A	B	C	B	B
C	A	C	B	C	C
D	A	B	C	E	D
E	A	B	C	D	E

Позначимо через Ω конгруенцію Ріса, що визначається ідеалом $I_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_1, \gamma\}$. Оскільки $(\alpha_1, \beta_1) \in \Omega$ і $(\beta_1, \beta_2) \in \Sigma$, то $(\alpha_1, \beta_2) \in \Omega \circ \Sigma$. Припустимо, що $(\alpha_1, \beta_2) \in \in \Sigma \circ \Omega$. Тоді існує $\xi \in L\,\mathrm{Aut}(A \cup X)$ такий, що $(\alpha_1, \xi) \in \Sigma$ і $(\xi, \beta_2) \in \Omega$. Позаяк $(\xi, \beta_2) \in \Omega$, то $\xi = \beta_2$. Отже, $(\alpha_1, \beta_2) \in \Sigma$. Одержали суперечність. Таким чином, $\Omega \circ \Sigma \neq \Sigma \circ \Omega$.

Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Скінченна комутативна нільнапівгрупа S є структурно-однорідною тоді і тільки тоді, коли S*:

(1) *або напівгрупа з нульовим множенням*;

(2) *або нільнапівгрупа, опис якої дано в конструкції* 1;

(3) *або нільнапівгрупа, опис якої дано в конструкції* 2A;

(4) *або нільнапівгрупа, опис якої дано в конструкції* 2B;

(5) *або нільнапівгрупа, опис якої дано в конструкції* 3.

Зауважимо, що серед чотирьох типів нільнапівгруп, що перелічені в теоремі 3, лише напівгрупа з нульовим множенням, а також нільнапівгрупа, яка визначається конструкцією 1, є такими, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставним (див. [10]).

Література

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 286 с; Т. 2. – 422 с.
2. *Либих А. Л.* Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп // Исследования по алгебре. – 1973. – Вып. 3. – С. 25 – 33.
3. *Goberstein S. M.* Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids // Glasg. Math. J. – 1990. – **32**. – P. 189 – 195.
4. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical finite transformation semigroups. An introduction. – Springer-Verlag, 2009. – xii + 314 p.
5. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
6. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
7. *Дереч В. Д.* Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи і скінченної в'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1218 – 1226.
8. *Дереч В. Д.* Повна класифікація скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставною напівгрупою // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1571 – 1578.
9. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 610 – 624.
10. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 176 – 184.
11. *Абухамда А. Х.* Индуктивные изоморфизмы некоторых классов групп // Мат. исследования. – 1975. – **1(35)**. – С. 3 – 19.
12. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
13. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
14. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.

Одержано 14.08.17