УДК 517.5

**Р. Р. Салимов** (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
**Е. А. Севостьянов** (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

# О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОБРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕРМИНАХ ПРОСТЫХ КОНЦОВ

For a class of mappings satisfying upper modular estimates with respect to families of curves, we study the behavior of the corresponding inverse mappings. In the terms of prime ends, we prove that the families of these homeomorphisms are equicontinuous (normal) in the closure of a given domain.

Вивчається локальна поведінка обернених гомеоморфізмів для класу відображень, в якому виконуються верхні оцінки модуля сімей кривих. У термінах простих кінців просторових областей доведено, що сім'ї таких гомеоморфізмів одностайно неперервні (нормальні) в замиканні заданої області.

**1. Введение.** Основные определения и обозначения, использующиеся в настоящей статье, могут быть найдены в статьях [1, 2] и монографиях [3, 4].

В сравнительно недавней публикации авторов [5] установлено свойство равностепенной непрерывности для отображений, обратные к которым являются так называемыми $Q$-гомеоморфизмами — наиболее простейшими обобщениями квазиконформных отображений по О. Мартио (см. [3], гл. 4). Отметим, что речь идет здесь о равностепенной непрерывности с локально связными границами, однако для областей с более общими типами границ данный вопрос до сих пор не исследован. В данной работе мы несколько усилим упомянутые результаты, рассматривая более широкие типы областей, для которых указанные утверждения имеют место. При этом речь пойдет о равностепенной непрерывности упомянутых отображений в терминах простых концов, так как даже их непрерывное продолжение на границу в поточечном смысле, вообще говоря, не гарантируется.

Приведем некоторые определения и формулировки основных результатов работы. Всюду далее $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Следующие определения могут быть найдены в работе [2]. Пусть $\omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Непрерывное отображение $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ называется *$k$-мерной поверхностью* в $\mathbb{R}^n$. *Поверхностью* будет называться произвольная $(n-1)$-мерная поверхность $\sigma$ в $\mathbb{R}^n$. Поверхность $\sigma\colon \omega \to D$ называется *жордановой поверхностью* в $D$, если $\sigma(z_1) \neq \sigma(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Далее мы иногда будем использовать $\sigma$ для обозначения всего образа $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при отображении $\sigma$, $\overline{\sigma}$ вместо $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ и $\partial\sigma$ вместо $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхность $\sigma$ в $D$ называется *разрезом* области $D$, если $\sigma$ разделяет $D$, т. е. $D \setminus \sigma$ имеет больше одной компоненты, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ и $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ разрезов области $D$ называется *цепью*, если:

1) $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j} = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$;

2) $\sigma_{m-1}$ и $\sigma_{m+1}$ содержатся в различных компонентах $D \setminus \sigma_m$ для всех $m > 1$;

3) $\cap\, d_m = \varnothing$, где $d_m$ — компонента $D \setminus \sigma_m$, содержащая $\sigma_{m+1}$.

Согласно определению, цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ определяет цепь областей $d_m \subset D$ таких, что $\partial\, d_m \cap D \subset \sigma_m$ и $d_1 \supset d_2 \supset \ldots \supset d_m \supset \ldots$. Две цепи разрезов $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma_k'\}$ называются *эквивалентными*, если для каждого $m = 1, 2, \ldots$ область $d_m$ содержит все области $d_k'$, за исключением конечного числа, и для каждого $k = 1, 2, \ldots$ область $d_k'$ также содержит все области $d_m$, за исключением конечного числа. *Конец* области $D$ — это класс эквивалентных цепей разрезов $D$.

Пусть $K$ — конец области $D$ в $\mathbb{R}^n$, $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma'_m\}$ — две цепи в $K$, $d_m$ и $d'_m$ — области, соответствующие $\sigma_m$ и $\sigma'_m$. Тогда

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m},$$

и, таким образом, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m}$ , т. е. множество $I(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ зависит только от $K$ и не зависит от выбора цепи разрезов $\{\sigma_m\}$. Множество $I(K)$ называется *телом конца* $K$.

Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma$ (т. е. произвольная кривая $\gamma$ семейства $\Gamma$ имеет длину, не меньшую 1, в метрике $\rho$). В этом случае пишем $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых $\Gamma$ называется величина $M(\Gamma) = \inf_{\rho\in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\,dm(x)$. При этом если $\mathrm{adm}\Gamma = \varnothing$, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$. Кроме того, положим $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$.

Далее, как обычно, для множеств $A$, $B$ и $C$ в $\mathbb{R}^n$ $\Gamma(A,B,C)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих $A$ и $B$ в $C$.

Следуя [6], будем говорить, что конец $K$ является *простым концом*, если $K$ содержит цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} M\big(\Gamma(C,\sigma_m,D)\big) = 0$$

для некоторого континуума $C$ в $D$, где $M$ — модуль семейства $\Gamma(C,\sigma_m,D)$.

Будем говорить, что граница области $D$ в $\mathbb{R}^n$ является *локально квазиконформной*, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность $U$, которую можно отобразить квазиконформным отображением $\varphi$ на единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что $\varphi(\partial D \cap U)$ является пересечением $\mathbb{B}^n$ с координатной гиперплоскостью. Говорим, что ограниченная область $D$ в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, если $D$ может быть квазиконформно отображена на область с локально квазиконформной границей. Из определения следует, что области с локально квазиконформной границей являются слабо плоскими (см. [2]), т. е. для каждой точки $x_0 \in \partial D$ выполнено такое условие: для каждой окрестности $U$ точки $x_0$ и для любого числа $P > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ такая, что

$$M\big(\Gamma(E,F,D)\big) \geq P \tag{1}$$

для любых континуумов $E$ и $F$ в $D$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$. В силу замечания 13.10 [3] произвольные $QED$-области имеют слабо плоские границы.

***Замечание* 1.** Как следует из теоремы 4.1 в [6], при квазиконформных отображениях $g$ области $D_0$ с локально квазиконформной границей на область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, существует естественное взаимно однозначное соответствие между точками $\partial D_0$ и простыми концами области $D$ и, кроме того, предельные множества $C(g,b)$, $b \in \partial D_0$, совпадают с телом $I(P)$ соответствующих простых концов $P$ в $D$.

Если $\overline{D}_P$ является пополнением регулярной области $D$ ее простыми концами, а $g_0$ — квазиконформным отображением области $D_0$ с локально квазиконформной границей на $D$, то оно естественным образом определяет в $\overline{D}_P$ метрику $\rho_0(p_1,p_2)=\left|\widetilde{g_0}^{-1}(p_1)-\widetilde{g_0}^{-1}(p_2)\right|$, где $\widetilde{g_0}$ — продолжение $g_0$ в $\overline{D_0}$, упомянутое выше.

Если $g_*$ является другим квазиконформным отображением некоторой области $D_*$ с локально квазиконформной границей на область $D$, то соответствующая метрика $\rho_*(p_1,p_2)= =\left|\widetilde{g_*}^{-1}(p_1)-\widetilde{g_*}^{-1}(p_2)\right|$ порождает ту же самую сходимость и, следовательно, ту же самую топологию в $\overline{D}_P$, что и метрика $\rho_0$, поскольку $g_0\circ g_*^{-1}$ является квазиконформным отображением между областями $D_*$ и $D_0$, которое по теореме 4.1 из [6] продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D_*}$ и $\overline{D_0}$.

В дальнейшем будем называть данную топологию в пространстве $\overline{D}_P$ *топологией простых концов* и понимать непрерывность отображений $F\colon \overline{D}_P\to\overline{D'}_P$ именно относительно этой топологии.

Отображение $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть *$Q$-отображением*, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\big(f(\Gamma)\big)\le\int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x) \tag{2}$$

для произвольного семейства кривых $\Gamma$ в области $D$ и каждой допустимой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$.

Пусть $(X,d)$ и $(X',d')$ — метрические пространства с расстояниями $d$ и $d'$ соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X\to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0\in \in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $d'\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon$ для всех $f\in \in\mathfrak{F}$ и всех $x\in X$ таких, что $d(x,x_0)<\delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из $x_0\in X$. Всюду далее, если не оговорено противное, $d$ — одна из метрик в пространстве простых концов относительно области $D$, упомянутых выше, а $d'$ — евклидова метрика.

Согласно [7], область $D$ в $\mathbb{R}^n$ будем называть *областью квазиэкстремальной длины* (сокращенно *$QED$-областью*), если $M\big(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)\big)\le AM\big(\Gamma(E,F,D)\big)$ для конечного числа $A\ge 1$ и всех континуумов $E$ и $F$ в $D$. Для областей $D,\ D'\subset\mathbb{R}^n,\ z_0,x_0\in D,\ z_0\ne x_0,\ z_0',x_0'\in D',\ z_0'\ne x_0'$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x)\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\notin D$, обозначим через $\mathfrak{H}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D\to D'$, $f(D)=D'$, удовлетворяющих соотношению (2) для произвольной $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$, таких, что $f(z_0)=z_0',\ f(x_0)=x_0'$. Обозначим через $E_D$ пространство простых концов области $D$. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Предположим, что область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, регулярна, а область $D'$ ограничена, имеет локально квазиконформную границу и одновременно является $QED$-областью, $Q\in L^1(D)$ и, кроме того, $I(P_1)\cap I(P_2)=\varnothing$ для любых различных простых концов $P_1,P_2\subset E_D$, где, как обычно, $I(P)$ обозначает тело простого конца $P\subset E_D$. Тогда каждый элемент $g$ семейства $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, состоящего из всех обратных гомеоморфизмов $\{g=f^{-1}\colon D'\to D\}$, где отображение $f\in\mathfrak{H}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, может быть продолжен по непрерывности до отображения $\overline{g}=\overline{f^{-1}}\colon\overline{D'}_P\to\overline{D}_P$, причем семейство $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D}_P,\overline{D'}_P)$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений $\overline{g}\colon \overline{D'}_P\to\overline{D}_P$, $g\in\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D'}_P$.*

Для областей $D,\ D'\subset\mathbb{R}^n,\ z_0,x_0\in D,\ z_0\ne x_0,\ z_0',x_0'\in D',\ z_0'\ne x_0'$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x)\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D\to D'$, $f(D)=D'$, $f\in W^{1,n}_{\rm loc}(D)$,

$f^{-1} \in W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D')$, для которых $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D$ ($K_I(x,f)$ — внутренняя дилатация отображения $f$ в точке $x$) и таких, что $f(z_0) = z_0'$, $f(x_0) = x_0'$. В качестве следствия из теоремы 1 на основании теорем 8.1 и 8.6 [3] имеем следующее.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *семейство обратных отображений* $g = f^{-1}$, $f \in \in \mathfrak{R}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D'}_P$, *если* $Q \in L^1(D)$.

**2. Леммы о непрерывном продолжении обратных отображений.** Как обычно, *жордановой дугой* будем называть гомеоморфизм $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, где $I$ — отрезок в $\mathbb{R}$. В дальнейшем, если недоразумение невозможно, кривая $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и ее носитель $|\alpha| = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \exists\, t \in [a,b]\colon \alpha(t) = x\big\}$ отождествляются. (Однако иногда для того, чтобы подчеркнуть эту разницу, мы также используем в тексте обозначение $|\alpha|$.) Следуя следствию 1.5.IV [8] и определению топологической размерности (см. [8], определение III, [1], гл. III), получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Если топологическая размерность множества* $A$, *лежащего в области* $D \subset \mathbb{R}^n$, *не превышает* $n-2$, *то* $A$ *не разбивает область* $D$, *т. е. множество* $D \setminus A$ *является связным.*

Следующее утверждение сформулировано и доказано в [2] (лемма 1).

**Лемма 2.** *Каждый простой конец* $P$ *регулярной области* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, *содержит цепь разрезов* $\sigma_m$, *лежащую на сферах* $S_m$ *с центром в точке* $x_0 \in \partial D$ *и с евклидовыми радиусами* $r_m \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится определение кольцевого $Q$-отображения в точке $x_0$ (см. [3], гл. 7). Хотя основные результаты статьи не содержат в явном виде утверждений, касающихся кольцевых $Q$-отображений, отдельные результаты, приводимые ниже, полезно установить в максимальной степени общности. (Такой подход позволит в дальнейшем указать приложения к классам Соболева и Орлича–Соболева; см., например, [2].) Пусть $x_0 \in \overline{D}$, тогда отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым* $Q$*-отображением в точке* $x_0$. Для некоторого $r_0 = r(x_0)$ и произвольных сферического кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, центрированного в точке $x_0$, радиусов $r_1$, $r_2$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$, и любых сфер $S_i = S(x_0, r_i)$ отображение $f$ удовлетворяет соотношению $M\big(f(\Gamma(S_1,S_2,D))\big) \le \displaystyle\int_A Q(x)\cdot\eta^n\big(|x-x_0|\big)\,dm(x)$ для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \ge 1. \tag{3}$$

Из определений видно, что произвольное $Q$-отображение является также и кольцевым $Q$-отображением в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$. Следующие два утверждения доказаны в работе [2] в пространстве $\mathbb{R}^n$ для несколько иных классов отображений (см. лемму 4 и теорему 1), а также на плоскости в случае тех же классов (см. лемму 6.1 и теорему 6.1 в [1]). Доказательство этих утверждений не содержит существенных отличий от упомянутых случаев, однако для полноты изложения приведем их полностью.

**Лемма 3.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ — *регулярные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $P_1$ *и* $P_2$ — *разные простые концы областей* $D$ *и* $\sigma_m$, $m = 1, 2, \ldots,$ — *цепь разрезов простого конца* $P_1$ *из леммы* 2, *лежащая на сферах* $S(z_1, r_m)$, $z_1 \in I(P_1)$, *с ассоциированными областями* $D_m$. *Предположим, что функция* $Q$ *интегрируема по сферам*

$$D(r) = \big\{x \in D\colon |x - z_1| = r\big\} = D \cap S(z_1, r)$$

*для некоторого множества $E$ чисел $r \in (0, d)$ положительной линейной меры, где $d = r_{m_0}$ и $m_0$ — минимальное из чисел таких, что область $D_{m_0}$ не содержит последовательностей точек, сходящихся к $P_2$. Если $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом $D$ на $D'$ в точке $z_1$, а $\partial D'$ — слабо плоской (т. е. выполнено условие (1)), то*

$$C(f, P_1) \cap C(f, P_2) = \varnothing.$$

Заметим, что в силу метризуемости пополнения $\overline{D}_P$ области $D$ простыми концами (см. приведенное выше замечание) число $m_0$ в лемме 3 всегда существует.

***Доказательство.*** Выберем $\varepsilon \in (0, d)$ так, что $E_0 := \big\{r \in E : r \in (\varepsilon, d)\big\}$ имеет положительную линейную меру. Такой выбор возможен в силу полуаддитивности линейной меры и исчерпания $E = \cup E_m$, где $E_m = \big\{r \in E : r \in (1/m, d)\big\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $S_1 = S(z_1, \varepsilon)$, $S_2 = S(z_1, d)$. Заметим, что функция $\eta(t) = \dfrac{1}{Itq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}$, $I = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{d} \dfrac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$, удовлетворяет соотношению (3) при $r_1 = \varepsilon$ и $r_2 = d$, поэтому из определения кольцевого $Q$-отображения и теоремы Фубини следует, что

$$M\big(f(\Gamma(S_1, S_2, D))\big) \le \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} < \infty. \tag{4}$$

Предположим, что $C_1 \cap C_2 \ne \varnothing$, где $C_i = C(f, P_i)$, $i = 1, 2$. По построению существует $m_1 > m_0$ такое, что $\sigma_{m_1}$ лежит на сфере $S(z_1, r_{m_1})$ с $r_{m_1} < \varepsilon$. Пусть $D_0 = D_{m_1}$, $D_* \subseteq D \setminus D_{m_0}$ — область, ассоциированная с цепью разрезов простого конца $P_2$, и $y_0 \in C_1 \cap C_2$.

Заметим, что можно выбрать $r_0 > 0$ так, что $S(y_0, r_0) \cap f(D_0) \ne \varnothing$ и $S(y_0, r_0) \cap f(D_*) \ne \varnothing$. Действительно, так как $y_0 \in C_1 \cap C_2$, то, в частности, $y_0 \in \overline{f(D_0)}$, откуда следует, что в произвольной окрестности $U = B(y_0, r_1)$ точки $y_0$ имеется точка $x_1 \in B(y_0, r_1) \cap f(D_0)$. Точно так же $y_0 \in \overline{f(D_*)}$ и, значит, в этой же окрестности $U$ найдется точка $x_2 \in B(y_0, r_1) \cap f(D_*)$. Пусть $r_0 := \min\{|y_0 - x_1|, |y_0 - x_2|\}$. Заметим, что по построению $f(D_0) \cap B(y_0, r_0) \ne \varnothing \ne f(D_0) \setminus B(y_0, r_0)$ и $f(D_*) \cap B(y_0, r_0) \ne \varnothing \ne f(D_*) \setminus B(y_0, r_0)$. Тогда в силу теоремы 1 [9] (гл. 5, § 46) $S(y_0, r_0) \cap f(D_*) \ne \varnothing \ne S(y_0, r_0) \cap f(D_0)$, что и требовалось установить.

Обозначим $\Gamma = \Gamma(\overline{D_0}, \overline{D_*}, D)$. Тогда согласно принципу минорирования из (4) следует, что

$$M\big(f(\Gamma)\big) \le M\big(f(\Gamma(S_1, S_2, D))\big) < \infty.$$

Пусть $M_0 > M\big(f(\Gamma)\big)$ — конечное число. Из условия слабой плоскости $\partial D'$ следует, что найдется $r_* \in (0, r_0)$ такое, что

$$M(\Gamma(E, F, D')) \ge M_0$$

для всех континуумов $E$ и $F$ в $D'$, пересекающих сферы $S(y_0, r_0)$ и $S(y_0, r_*)$. Однако эти сферы могут быть соединены непрерывными кривыми $c_1$ и $c_2$ в областях $f(D_0)$ и $f(D_*)$ и, в частности, для этих кривых

$$M_0 \le M\big(\Gamma(c_1, c_2, D')\big) \le M\big(f(\Gamma)\big).$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \cap C_2 \ne \varnothing$.

Лемма 3 доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $D$ и $D'$ — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Если $f$ — кольцевой $Q$-гомеоморфизм $D$ на $D'$ в каждой точке $x_0 \in \partial D$ и $Q \in L(D)$, то $f^{-1}$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{D'}_P$ на $\overline{D}_P$.*

***Доказательство.*** По теореме Фубини (см., например, [10]) множество

$$E(x_0) = \big\{r \in (0, d(x_0)) : Q|_{D(x_0,r)} \in L(D(x_0, r))\big\} \quad \forall x_0 \in \partial D,$$

где $d(x_0) = \sup_{x\in D}|x - x_0|$ и $D(x_0, r) = D \cap S(x_0, r)$, имеет положительную линейную меру, поскольку $Q \in L(D)$. Согласно сделанным во введении замечаниям, без ограничения общности можем считать, что область $D'$ имеет слабо плоскую границу. (Если это не так, то следует рассмотреть вспомогательное квазиконформное отображение $g$ области $D'$ на область $D''$ с локально квазиконформной границей. Такое отображение существует по определению регулярной области. В частности, $D''$ имеет слабо плоскую границу, что непосредственно видно из определения локально квазиконформной границы. Отображение $\varphi := g \circ f$ так же, как и $f$, будет кольцевым $Q$-гомеоморфизмом на $D$. Установив заключение теоремы для $\varphi$, мы установим тем самым и заключение теоремы 2, использовав соотношение $f^{-1} = \varphi^{-1} \circ g$.)

Заметим, что для произвольного $\zeta_0 \in \partial D'$ множество $C(f^{-1}, \zeta_0)$ состоит из одной точки $\xi_0 \in E_D$, где $E_D$ — пространство простых концов области $D$. В самом деле, если есть не менее двух последовательностей $x_k \to \zeta_0$ при $k \to \infty$ и $y_k \to \zeta_0$ при $k \to \infty$ таких, что $f^{-1}(x_k) \to P_1 \in E_D$ и $f^{-1}(y_k) \to P_2 \in E_D$ при $k \to \infty$, $P_1 \neq P_2$, то $\zeta_0 \in C(f, P_1) \cap C(f, P_2)$, что противоречит утверждению леммы 3.

Таким образом, мы имеем продолжение $f^{-1}$ на $\overline{D'}$ такое, что $C(f^{-1}, \partial D') \subset \overline{D}_P \setminus D$. Покажем, что $C(f^{-1}, \partial D') = \overline{D}_P \setminus D$. Действительно, если $P_0$ — простой конец в $D$, то найдется последовательность $x_n \to P_0$ при $n \to \infty$. Вследствие компактности $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ можно считать, что $x_n \to x_0 \in \partial D$ и $f(x_n) \to \zeta_0 \in \partial D'$ при $n \to \infty$. Последнее означает, что $P_0 \in C(f^{-1}, \zeta_0)$.

Покажем наконец, что продолженное отображение $g\colon \overline{D'} \to \overline{D}_P$ непрерывно в $\overline{D'}$. Действительно, пусть $\zeta_n \to \zeta_0$ при $n \to \infty$, $\zeta_n, \zeta_0 \in \overline{D'}$. Если $\zeta_0$ — внутренняя точка области $D'$, доказываемое утверждение очевидно. Пусть $\zeta_0 \in \partial D'$, тогда выберем $\zeta_n^* \in D'$ так, что $|\zeta_n - \zeta_n^*| < 1/n$ и $\rho(g(\zeta_n), g(\zeta_n^*)) < 1/n$, где $\rho$ — одна из метрик, указанных в замечании 1. По построению $g(\zeta_n^*) \to g(\zeta_0)$, поскольку $\zeta_n^* \to \zeta_0$ и, значит, $g(\zeta_n) \to g(\zeta_0)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** I. Не ограничивая общности рассуждений, согласно замечанию 1 можно считать, что $\overline{D'}_P = \overline{D'}$.

Поскольку область $D'$ является $QED$-областью, каждый обратный гомеоморфизм $f^{-1}$ имеет непрерывное продолжение на границу $D'$ в силу теоремы 2. Осталось показать равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$ в $\overline{D'}$.

II. Покажем сначала, что $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'}\setminus\{z_0', x_0'\}$. Предположим противное, т. е. найдется $y_0 \in \overline{D'}$, $x_0' \neq y_0 \neq z_0'$, и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют $y_m \in \overline{D'}$ с $|y_m - y_0| < 1/m$ и элемент $f_m^{-1} \in \mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$, для которых

$$\rho(f_m^{-1}(y_m), f_m^{-1}(y_0)) \geq \varepsilon_0, \tag{5}$$

где $\rho$ — одна из метрик из замечания 1. Так как $f_m^{-1}$ непрерывным образом продолжаются на $\overline{D'}$, найдутся последовательности $z_m, x_m \in D'$ такие, что

$$|z_m - y_m| < 1/m, \qquad |x_m - y_0| < 1/m, \quad m \to \infty,$$

и при этом

$$\rho\big(f_m^{-1}(y_m), f_m^{-1}(z_m)\big) < 1/m, \qquad \rho\big(f_m^{-1}(x_m), f_m^{-1}(y_0)\big) < 1/m. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что

$$\rho\big(f_m^{-1}(z_m), f_m^{-1}(x_m)\big) \geq \varepsilon_1, \tag{7}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — некоторое фиксированное число. Поскольку $\overline{D}_P$ является компактом, то можно считать, что для некоторых $P_0^1, P_0^2 \in \overline{D}_P$ выполнены условия

$$f_m^{-1}(z_m) \to P_0^1, \qquad f_m^{-1}(x_m) \to P_0^2, \quad m \to \infty. \tag{8}$$

В частности, из (6) и (8) в силу неравенства треугольника следует, что

$$f_m^{-1}(y_0) \to P_0^2 \in \overline{D}_P, \quad m \to \infty.$$

В силу неравенства (7)

$$\rho(P_0^1, P_0^2) \geq \varepsilon_1/2.$$

Не ограничивая общности можно считать, что при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены включения $f_m^{-1}(z_m) \in D_m$ и $f_m^{-1}(x_m) \in D_m'$, где $D_m$ и $D_m'$ — последовательности областей, соответствующие $P_0^1, P_0^2 \in \overline{D}_P$ (в случае, когда $P_0^1$ либо $P_0^2$ — внутренние точки области $D$, в качестве области $D_m$ либо $D_m'$ берем последовательности открытых шаров, стягивающихся к $P_0^1$ либо $P_0^2$ соответственно). Можно считать, что $x_0 \neq P_0^1$, $z_0 \neq P_0^2$ и $D_k \cap D_l' = \varnothing$ при всех $k, l \in \mathbb{N}$. Более того, поскольку по условию теоремы тела простых концов $P_0^1$ и $P_0^2$ не пересекаются, можно считать, что

$$\overline{D_i} \cap \overline{D_i'} = \varnothing \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Заметим, что (9) справедливо и в случае, когда в качестве хотя бы одного из $P_0^i$ берется внутренняя точка области $D$.

III. Построим последовательность кривых $\alpha_m$ следующим образом. Кривую $\alpha_1$ определим как произвольную дугу, соединяющую точки $x_0$ и $f_1^{-1}(z_1) \in D_1$ в области $D$. Затем соединим точки $f_1^{-1}(z_1)$ и $f_2^{-1}(z_2)$ внутри области $D_1$ некоторой дугой $\gamma_1$ и определим $\alpha_2$ как объединение $\alpha_1$ и $\gamma_1$. И так далее. На некотором $m$-м шаге построим кривую $\alpha_m$, которая будет определяться как кривая $\alpha_{m-1}$, объединенная с дугой $\gamma_{m-1}$, где $\gamma_{m-1}$ — произвольная дуга, соединяющая точки $f_{m-1}^{-1}(z_{m-1})$ и $f_m^{-1}(z_m)$ в области $D_{m-1}$. И так далее. Ясно, что

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|$$

имеет топологическую размерность 1 как счетное объединение замкнутых 1-мерных множеств (см. [8], теорема III 2, гл. III, разд. 3). В таком случае по лемме 1 множество $A$ не разделяет $D$ и никакую подобласть $D_* \subset D$. Более того, $A$ является замкнутым относительно $D$, так что множество $D \setminus A$ является областью. В самом деле, если последовательность $x_k \in A$ и $x_k \to x_0 \in D$ при $k \to \infty$, то возможны два случая: 1) либо найдутся $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $m_0 \in \mathbb{N}$: $x_k \in |\alpha_{m_0}|$ при всех $k \geq k_0$; 2) либо для некоторых возрастающих последовательностей натуральных чисел $k_l$, $m_l$, $l = 1, 2, \ldots$, найдутся элементы $x_{k_l} \in A \setminus |\alpha_{m_l}|$. В первом случае $x_0 \in A$, ибо $|\alpha_{m_0}|$ замкнуто, как конечное объединение замкнутых множеств, а второй случай невозможен, поскольку тогда должно быть $x_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{D_m} \subset \partial D$.

IV. Построим последовательность кривых $\beta_m$ следующим образом. Кривую $\beta_1$ определим как произвольную дугу, соединяющую точки $z_0$ и $f_1^{-1}(x_1) \in D_1'$ в области $D \setminus A$. Затем соединим точки $f_1^{-1}(x_1)$ и $f_2^{-1}(x_2)$ в $D_1' \setminus A$ некоторой дугой $\delta_1$ и определим $\beta_2$ как объединение $\beta_1$ и $\delta_1$. И так далее. На некотором $m$-м шаге построим кривую $\beta_m$, которая будет определяться как кривая $\beta_{m-1}$, объединенная с дугой $\delta_{m-1}$, где $\delta_{m-1}$ — произвольная дуга, соединяющая точки $f_{m-1}^{-1}(x_{m-1})$ и $f_m^{-1}(x_m)$ в области $D_{m-1}' \setminus A$. И так далее.

V. Заметим, что найдется такая постоянная $C > 0$, что

$$\operatorname{dist}\big(|\alpha_m|, |\beta_m|\big) \geq C \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где

$$|\gamma| := \{x \in D : \exists\, t : \gamma(t) = x\}.$$

Действительно, как легко видеть, $|\beta_m| \cap D_k = \varnothing$ и $|\alpha_m| \cap D_k' = \varnothing$ при всех $m \in \mathbb{N}$, всех $k \geq k_0$ и некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Таким образом, $|\alpha_m| \subset |\alpha_{k_0-1}| \cup \overline{D_{k_0}}$, а $|\beta_m| \subset |\beta_{k_0-1}| \cup \overline{D_{k_0}'}$, причем в силу соотношения (9) множества $C_1 := |\alpha_{k_0-1}| \cup \overline{D_{k_0}}$ и $C_2 := |\beta_{k_0-1}| \cup \overline{D_{k_0}'}$ являются непересекающимися компактными подмножествами в $\mathbb{R}^n$, а значит, отстоят друг от друга на расстоянии не меньше некоторого $C > 0$. Тем более $|\alpha_m|$ и $|\beta_m|$ отстоят друг от друга не меньше, чем на $C$, что и доказывает соотношение (10).

VI. Пусть $\Gamma_m$ — семейство кривых, соединяющих множества $\alpha_m$ и $\beta_m$ в $D$, тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

является допустимой для семейства $\Gamma_m$, и кроме того, так как $f_m$ являются $Q$-гомеоморфизмами в $D$, то

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leq \frac{1}{C^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) := c(C) < \infty, \tag{11}$$

поскольку $Q \in L^1(D)$.

VII. В рассматриваемом случае $z_m, x_0' \in f_m(\alpha_m)$, и поскольку по построению $z_m \to y_0 \neq$ $\neq x_0'$, то найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что $\operatorname{diam}(f_m(\alpha_m)) \geq \delta_1 > 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Аналогично, $x_m, z_0' \in f_m(\beta_m)$, и поскольку по построению $x_m \to y_0 \neq z_0'$, то найдется постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что $\operatorname{diam}(f_m(\beta_m)) \geq \delta_2 > 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, заметим, что $\operatorname{dist}(f_m(\alpha_m), f_m(\beta_m)) \to 0$ при $m \to \infty$. Согласно свойству сближающихся континуумов (см. теорему 2.3 и замечание 2.8 в [3]),

$$M(\Gamma(f_m(\alpha_m), f_m(\beta_m), \mathbb{R}^n)) \to \infty, \quad m \to \infty. \tag{12}$$

Поскольку $D'$ является $QED$-областью, то из (12) следует, что $M(f_m(\Gamma_m)) \to \infty$ при $m \to$ $\to \infty$, что противоречит соотношению (11). Полученное противоречие свидетельствует о том, что семейство отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D})_P, \overline{D'}_P)$ равностепенно непрерывно в точке $y_0$.

VIII. Для завершения доказательства нам осталось показать, что семейство отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$ также является равностепенно непрерывным в точках $x_0'$ и $z_0'$. Рассмотрим для определенности случай точки $x_0'$ (случай точки $z_0'$ рассматривается аналогично). Предположим противное, т. е. найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют

$x_m \in D'$ с $|x_m - x_0'| < 1/m$ и элемент $f_m^{-1} \in \mathfrak{H}^{-1}_{z_0, x_0, z_0', x_0', Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$ такие, что

$$\left|f_m^{-1}(x_m) - x_0\right| \geq \varepsilon_0.$$

Поскольку пространство $\overline{D}_P$ компактно, мы можем считать, что для некоторого $P_0 \in \overline{D}_P$, $P_0 \neq x_0$, выполнено

$$\rho(f_m^{-1}(x_m), P_0) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Пусть $D_m,\ m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность областей, соответствующих простому концу $P_0$ (если это точка в области $D$, то, как и прежде, в качестве последовательности $D_m$ используем шаровые окрестности, сжимающиеся в точку). Можно считать, что $f_m^{-1}(x_m) \in D_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Поскольку по условию область $D$ регулярна, то она квазиконформно отображается на некоторую область $D_0$ с локально квазиконформной границей, которая по теореме Лиувилля не может совпадать с $\mathbb{R}^n$, а также, вследствие локальной квазиконформности границы, с $\mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ для некоторой точки $b \in \mathbb{R}^n$. В силу взаимно однозначного соответствия между $\partial D_0$ и $E_D$ найдутся не менее двух простых концов $P_1, P_2 \subset E_D,\ P_1 \neq P_2$. Выберем в качестве $P_1 \subset E_D$ произвольный простой конец, не совпадающий с $P_0$. В качестве вспомогательной последовательности $y_m$ рассмотрим произвольную последовательность, сходящуюся к $P_1$.

В силу компактности $\overline{D}_P$ можно считать, что последовательность $y_m$ сходится к некоторой граничной точке $\zeta_0 \in \partial D$. Поскольку $f_1$ — гомеоморфизм, то $C(f_1, \zeta_0) \subset \partial D'$. Вследствие компактности $\overline{D'}$ найдется подпоследовательность номеров $m_k^1$ такая, что $f_1(y_{m_k^1})$ сходится к некоторой граничной точке $\xi_1 \in \partial D'$. Тогда найдется номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $\operatorname{dist}(f_1(y_{m^1_{k_1}}), \partial D') < 1$. Положим $l_1 := m^1_{k_1}$. Рассмотрим последовательность $y_m,\ m > l_1$. Поскольку $f_2$ — гомеоморфизм, то $C(f_2, \zeta_0) \subset \partial D'$. В силу компактности $\overline{D'}$ найдется подпоследовательность номеров $m_k^2$ такая, что $f_2(y_{m_k^2})$ сходится к некоторой граничной точке $\xi_2 \in \partial D'$. Тогда найдется номер $k_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $\operatorname{dist}\left(f_2(y_{m^2_{k_2}}), \partial D'\right) < 1/2$. Положим $l_2 := m^2_{k_2}$. И так далее. В результате бесконечного процесса получаем последовательность $y_{l_k}$ такую, что $\operatorname{dist}\left(f_k(y_{l_k}), \partial D'\right) < 1/k$. Положим $z_k := y_{l_k}$. Тогда

$$\operatorname{dist}(f_k(z_k), \partial D') < 1/k, k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

причем последовательность $z_k$ также сходится к простому концу $P_1$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $z_i \in D_i'$ и выполнено условие (9).

Построим, как и в пунктах III и IV, последовательности кривых $\alpha_m$ и $\beta_m$ следующим образом. Кривую $\alpha_1$ определим как произвольную дугу, соединяющую точки $x_0$ и $z_1$ в $D$. Затем соединим точки $z_1$ и $z_2$ внутри области $D_1'$ некоторой дугой $\gamma_1$ и определим $\alpha_2$ как объединение $\alpha_1$ и $\gamma_1$. И так далее. На некотором $m$-м шаге построим кривую $\alpha_m$, которая будет определяться как кривая $\alpha_{m-1}$, объединенная с дугой $\gamma_{m-1}$, где $\gamma_{m-1}$ — произвольная дуга, соединяющая точки $z_{m-1}$ и $z_m$ в области $D'_{m-1}$. И так далее. Как и прежде, положим

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|,$$

при этом $A$ имеет топологическую размерность 1, как счетное объединение замкнутых 1-мерных множеств (см. [8], теорема III, [2], гл. III, разд. 3). В таком случае по лемме 1 множество $A$ не разделяет $D$ и никакую подобласть $D_* \subset D$.

Построим также последовательность кривых $\beta_m$ следующим образом. Кривую $\beta_1$ определим как произвольную дугу, соединяющую точки $z_0$ и $f_1^{-1}(x_1) \in D_1$ в области $D \setminus A$ так, чтобы $|\alpha_1| \cap |\beta_1| = \varnothing$, что возможно в силу леммы 1. Затем соединим точки $f_1^{-1}(x_1)$ и $f_2^{-1}(x_2)$ внутри области $D_1 \setminus A$ некоторой дугой $\delta_1$ и определим $\beta_2$ как объединение $\beta_1$ и $\delta_1$. И так далее. На некотором $m$-м шаге построим кривую $\beta_m$, которая будет определяться как кривая $\beta_{m-1}$, объединенная с дугой $\delta_{m-1}$, где $\delta_{m-1}$ — произвольная дуга, соединяющая точки $f_{m-1}^{-1}(x_{m-1})$ и $f_m^{-1}(x_m)$ в области $D_{m-1} \setminus A$. И так далее.

Пусть $\Gamma_m$ — семейство кривых, соединяющих множества $\alpha_m$ и $\beta_m$ в $D$. Аналогично тому, как это сделано в пункте V, доказывается справедливость соотношения вида (10), откуда следует оценка вида (11).

Заметим, что в таком случае $f_k(z_k),\ x_0' \in f_k(\alpha_k)$ и в силу (13) найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что $\mathrm{diam}\,(f_k(\alpha_k)) \geq \delta_1 > 0$ при всех $k \geq k_0$. Аналогично, $x_k, z_0' \in f_k(\beta_k)$ и, поскольку по построению, $x_k \to x_0' \neq z_0'$, найдется постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что $\mathrm{diam}\,(f_k(\beta_k)) \geq \delta_2 > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, заметим, что $\mathrm{dist}\,\big(f_k(\alpha_k), f_k(\beta_k)\big) \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно свойству сближающихся континуумов (см. теорему 2.3 и замечание 2.8 в [3]),

$$M\big(\Gamma\big(f_k(\alpha_k), f_k(\beta_k), \mathbb{R}^n\big)\big) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{14}$$

Поскольку $D'$ является $QED$-областью, то из (14) следует, что $M(f_k(\Gamma_k)) \to \infty$ при $k \to \infty$, а это противоречит соотношению (11). Полученное противоречие свидетельствует о том, что семейство отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0, x_0, z_0', x_0', Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$ равностепенно непрерывно в точке $x_0$.

Теорема 1 доказана.

В настоящей статье рассматривается случай $n \geq 3$. Случай $n = 2$ требует поисков иного подхода, поскольку методы доказательства основного результата существенно опираются на лемму 1. Понятно, что эта лемма нарушается, вообще говоря, при $n = 2$. Вопрос о равностепенной непрерывности не только обратных $Q$-гомеоморфизмов, но и *обратных кольцевых $Q$-гомеоморфизмов,* является открытым: семейства кривых, использующиеся в доказательстве теоремы 1, шире семейств кривых, соединяющих концентрические сферы.

## Литература


1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вісн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 27 – 66.
2. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории простых концов для пространственных областей // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 467 – 479.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach. – New York etc.: Springer, 2012.
5. *Севостьянов Е. А.* О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Мат. труды. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178 – 204.
6. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13 – 40.
7. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **24**. – P. 181 – 206.
8. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
9. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
10. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.


Получено 26.02.17