УДК 517.54

**О. К. Бахтін** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ЗАДАЧА ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ

We study a problem of nonoverlapping domains with free poles on radial systems. Our main results strengthen and generalize several known results obtained in the investigation of this problem.

Вивчається проблема геометричної теорії функцій комплексної змінної про неперетинні області з вільними полюсами на променевих системах. Основні результати роботи посилюють та узагальнюють отримані раніше результати щодо цієї задачі.

**1. Вступ.** Екстремальні задачі про неперетинні області складають відомий напрямок геометричної теорії функцій комплексної змінної. Детальніше з історією цього питання можна ознайомитися в роботах [1 – 27] (див. також екстремальні задачі іншого вигляду, які пов'язані з теорією відображень, оцінками ємності та модуля на площині й у просторі [28 – 35]). Більшість таких задач зводиться до визначення максимуму добутку внутрішніх радіусів на системах попарно неперетинних областей, щодо задовольняють певні умови. Варто відмітити, що важливе значення при розв'язуванні таких задач має теорія квадратичних диференціалів, зокрема результати, які описують локальну і глобальну структуру їхніх траєкторій [1, 9, 11]. У даній статті посилено та узагальнено деякі результати цієї теорії.

Кожній екстремальній задачі, згідно з відомим принципом О. Тейхмюлера, відповідає певний квадратичний диференціал (див. [11, с. 49]). До середини 70-х років минулого століття основні екстремальні проблеми в задачах про неперетинні області були пов'язані з такими задачами, яким відповідають квадратичні диференціали з фіксованими полюсами.

У 1968 р. П. М. Тамразов [21] привернув увагу спеціалістів до дослідження екстремальних задач, яким відповідають квадратичні диференціали, полюси яких не фіксовані, а до певної міри є вільними. Як відомо, екстремальним задачам про неперетинні області відповідають квадратичні диференціали з полюсами другого порядку.

В роботі [5] цю ідею П. М. Тамразова було застосовано до екстремальних задач про неперетинні області, які отримали назву „екстремальні задачі про неперетинні області з вільними полюсами на колі".

В даній статті вивчаються дві відомі задачі про екстремальне розбиття комплексної площини. Для того щоб їх сформулювати, наведемо необхідні означення.

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty),\ \chi(t) = \dfrac{1}{2}(t + t^{-1}),\ t \in \mathbb{R}^+,$ —

функція Жуковського, $r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [1, 9, 10]). Внутрішній радіус області $B$ пов'язаний із узагальненою функцією Гріна $g_B(z,a)$ області $B$ (див. [1]) співввідношеннями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to a,$$
$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

**Задача 1** (В. М. Дубінін [9]). Показати, що максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k), \tag{1}$$

де $B_0,\ B_1,\ B_2,\ldots,B_n,\ n \geq 2,$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}},\ a_0 = 0,\ |a_k| = 1,\ k = \overline{1,n},$ і $\gamma \leq n,$ досягається для деякої конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k,$ які мають $n$-кратну симетрію.

Ця проблема вивчалась у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 15]). На даний час отримано лише окремі результати, повністю вона не розв'язана.

В 1988 р. у роботі [8] задачу 1 було розв'язано для значень параметра $\gamma = 1$ і значень натурального параметра $n \geq 2.$ А саме, було показано, що при умовах задачі 1 виконується нерівність

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq r(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k), \tag{2}$$

де $d_k,\ D_k,\ k = \overline{0,n},$ — полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Неважко показати, що при $\gamma > n$ екстремальна конфігурація не існує.

При $n = 2,3$ для однозв'язних областей нерівність (2) випливає з відомих результатів Г. М. Голузіна [6] і Г. В. Кузьміної [17].

У 1996 р. Л. В. Ковальов [15] отримав розв'язок задачі 1 при певних досить жорстких обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме для таких систем точок, для яких виконуються нерівності

$$0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n \geq 5.$$

У 2003 р. у роботі [19] отримано розв'язок задачі 1 при $\gamma \in (0,1]$ для однозв'язних областей іншим методом.

У монографії [1] показано, що аналог результату В. М. Дубініна [8] (теорема 4) справджується для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого номера $n_0(\gamma)$.

**2. Узагальнена задача В. М. Дубініна.** У зв'язку з дослідженням роботи [1] і введенням загальних $n$-променевих систем точок можна розглядати узагальнену задачу В. М. Дубініна, тобто замість одиничного кола розглядати $n$-променеву систему точок, яка підпорядкована певним умовам.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C}\colon k = \overline{1,n}\right\}$ назвемо ***n*-променевою**, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Введемо позначення $\Gamma_k = \Gamma_k(A_n) := \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Дана стаття базується на застосуванні кусково-відокремлюючого перетворення, яке було досліджено в [9, 10]. Нехай $\zeta = \pi_k(w)$ позначає однозначну гілку багатозначної аналітичної функції $-i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, яка здійснює однолисте і конформне відображення $\Gamma_k$ на праву півплощину $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо „керуючі" функціонали:

$$\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})},$$

$$\mathcal{M}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right] \prod_{k=1}^{n} |a_k|.$$

У монографії [1] було запропоновано метод „керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розміщення систем точок. Завдяки цьому вдалося узагальнити постановку задачі В. М. Дубініна. Таким чином, на основі вдосконалення методу дослідження у 2007 – 2018 рр. вдалося просунутись у розв'язанні цієї задачі (див., наприклад, [3, 4, 14, 24 – 26]).

**Задача 2.** Нехай виконано такі умови: $\gamma \in (0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неперетинних областей (тобто $B_p \cap B_j = \varnothing$ при $p \neq j$, $p, j = \overline{0,n}$) таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0,n}$. Показати, що максимум функціонала (1) досягається для деякої конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k$, які мають $n$-кратну симетрію.

Справджуються такі твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. Тоді для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{3}$$

*Знак рівності в* (3) *досягається, коли точки $a_k$ і області $B_k$, $k = \overline{0,n}$, є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{4}$$

Враховуючи, що для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола виконуються умови $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ і $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) = 1$, як наслідок отримуємо такий результат.

**Теорема 2.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. Тоді для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, виконується нерівність* (3).

*Знак рівності в* (3) *досягається, коли точки $a_k$ і області $B_k$, $k = \overline{0, n}$, є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (4).

**3. Застосування відокремлюючого перетворення для загальної оцінки $I_n(\gamma)$.** При доведенні теореми 1 істотно використовуються ідеї робіт [1, 15] і властивості відокремлюючого перетворення (див., наприклад, [9, 10]).

Аналогічно [1] розглянемо введену раніше систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Сім'я функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ є допустимою для відокремлюючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0, n}$, відносно кутів $\{\Gamma_k\}_{k=1}^n$. Позначимо через $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі; через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі; $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

З визначення функцій $\pi_k$ випливає, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{\Gamma_k}.$$

Доведемо перше з цих співвідношень. В околі точки $w = a_k$ величину $w$ можна записати у вигляді $w = a_k + (w - a_k)$. Тоді має місце такий розклад у ряд:

$$-i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i\left(e^{-i\theta_k}(a_k + (w - a_k))\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i\left(e^{-i\theta_k} a_k \left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i\left(|a_k|\left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1 + \frac{1}{a_k}\frac{1}{a_k}(w - a_k) + o(1)\right) =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} - i\frac{1}{\alpha_k}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{a_k}(w-a_k) + o(1).$$

Звідси отримуємо асимптотичну рівність

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| = \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}(w-a_k)(1+o(1)),$$

де

$$\frac{o(1)}{|w-a_k|} \to 0, \quad w \to a_k.$$

Це рівносильно шуканому співвідношенню еквівалентності. Два інших співвідношення одержуємо аналогічно. Тоді, використовуючи відповідні результати, а саме теорему 1.9 роботи [9] і теорему 2.3.14 [1], отримуємо нерівність

$$r\left(B_k, a_k\right) \leq \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{1/2}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leq \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{1/2}. \tag{6}$$

Умови реалізації знака рівності в нерівностях (5), (6) містяться у теоремі 1.9 [9].

Міркуючи, як і при доведенні теореми 5.2.1 [1], одержуємо нерівність для функціонала (1):

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Розглянемо функціонал

$$I_3(\sigma) = r^{\sigma^2}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2), \quad \sigma \in \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2$ — взаємно неперетинні області, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,2}$, $a_0 = 0$. Враховуючи (8), маємо

$$I_n(\gamma) \leq \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left[\prod_{k=1}^{n} I_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k\right)\right]^{1/2}. \tag{9}$$

У статті [8], мабуть, уперше повністю досліджено задачу про максимум функціонала (8) на трійках довільних попарно неперетинних областей $B_0,\ B_1,\ B_2$ розширеної комплексної площини таких, що $a_k \in B_k,\ k = \overline{0,2},\ a_0 = 0,\ a_k = (-1)^k i$, і отримано нерівність

$$r^{\sigma^2}(B_0, 0) r(B_1, i) r(B_2, -i) \le S(\sigma) =$$
$$= 2^{\sigma^2+6} \sigma^{\sigma^2} (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0,2]. \tag{10}$$

Знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області $B_0,\ B_1,\ B_2$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2.$$

Зауважимо, що функціонал (8) при $\sigma > 2$ є необмеженим.

Відомо [16], що функціонал

$$Y_3(t_1, t_2, t_3, D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3) =$$
$$= \frac{r^{t_1}(D_1, d_1) r^{t_2}(D_2, d_2) r^{t_3}(D_3, d_3)}{|d_1 - d_2|^{t_1+t_2-t_3} |d_1 - d_3|^{t_1-t_2+t_3} |d_2 - d_3|^{-t_1+t_2+t_3}}, \tag{11}$$

де $t_k \in \mathbb{R}^+,\ \{D_k\}_{k=1}^3$ — довільна система взаємно неперетинних областей таких, що $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = 1,2,3$, інваріантний відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$.

При кожному $k = \overline{1,n}$ неважко вказати конформний автоморфізм $\zeta = T_k(z)$ площини комплексних чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такий, що $T_k(0) = 0,\ T_k\left(\omega_k^{(s)}\right) = (-1)^s i,\ D_k^{(q)} := T_k\left(\Omega_k^{(q)}\right),\ k = \overline{1,n},$ $s = 1, 2,\ q = 0, 1, 2.$

Із співвідношень (7), (11) отримуємо

$$I_n(\gamma) \le \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$
$$\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left[ \prod_{k=1}^n \left|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}\right|^{\gamma\alpha_k^2} \left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right|^{2-\gamma\alpha_k^2} \right]^{1/2}, \tag{12}$$

де

$$\left|\omega_k^{(1)}\right| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad \left|\omega_k^{(2)}\right| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},$$
$$\left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Враховуючи (11) і (12), одержуємо співвідношення

$$I_n(\gamma) \leq$$
$$\leq \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k |a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \left\{ \prod_{k=1}^{n} Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\right) \right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left[ \prod_{k=1}^{n} \left|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}\right|^{\gamma\alpha_k^2} \left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right|^{2-\gamma\alpha_k^2} \right]^{1/2}. \tag{14}$$

Праву частину нерівності (14) позначимо через $\Delta$. Тоді

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k |a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$
$$\times \left( \prod_{k=1}^{n} \left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right| \right) \left( \prod_{k=1}^{n} \frac{\left|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}\right|}{\left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right|} \right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \times$$
$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\right) \right\}^{1/2}.$$

Із співвідношень (13) безпосередньо випливає, що

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \left( \prod_{k=1}^{n} \left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right| \right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} |a_k| =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| = 2^n \prod_{k=1}^{n} \chi\left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|.$$

Аналогічно

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\left|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}\right|}{\left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right|} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}} =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}} \right)^{-1} = \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \right)^{-1} |a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}} =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right)^{-1} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)} =$$
$$= 2^{-n} \left[ \prod_{k=1}^{n} \chi\left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{-1} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)},$$

де $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_0 := \alpha_n$. Далі безпосередньо одержуємо

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\omega_k^{(1)}\omega_k^{(2)}\right|}{\left|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}\right|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Таким чином, підсумовуючи викладене вище, отримуємо рівність

$$\Delta = 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|\times$$

$$\times 2^{-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)}\right)\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\left\{\prod_{k=1}^{n}Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)}\right)\right\}^{1/2}. \qquad (15)$$

Тоді, внаслідок вказаної вище конформної інваріантності функціонала (11), одержуємо рівності

$$Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)}\right) =$$

$$= Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,D_k^{(0)},D_k^{(1)},D_k^{(2)},0,-i,i\right),$$

де $k=\overline{1,n}$, і

$$Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,D_k^{(0)},D_k^{(1)},D_k^{(2)},0,-i,i\right) =$$

$$= \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},-i\right)r\left(D_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}.$$

Звідси

$$\Delta = 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},-i\right)r\left(D_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{1/2}.$$

З останньої рівності і нерівностей (12), (15) остаточно отримуємо оцінку для функціонала (1):

$$I_n(\gamma) \leq 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{1/2}.$$

З урахуванням умов теореми 2

$$I_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{1/2}. \tag{16}$$

При $\gamma \in (0,1]$ із нерівності (16) з урахуванням (10) можна отримати оцінку

$$I_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Для довільного $\gamma > 1$ нерівність (17), власне кажучи, не є правильною. А саме, оскільки $\alpha_k \in (0,2)$ і $\gamma > 1$, то деякі із виразів $\alpha_k^2\gamma$ можуть задовольняти співвідношення $\alpha_k^2\gamma > 4$. А в цьому випадку функціонал

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)$$

є необмеженим (тобто для $\alpha_k$, при яких $\alpha_k^2\gamma > 4$, знайдеться така послідовність трійок областей $\left(D_p^{(0)}, D_p^{(1)}, D_p^{(2)}\right)$, що значення цього функціонала прямуватимуть до нескінченності при $p \in \in \infty$). Якщо всі $\alpha_k^2\gamma < 4$, то формула (17) є правильною. Таким чином, випадок, коли деякі з величин $\alpha_k^2\gamma > 4$, потребує додаткового вивчення.

**4. Груба нерівність для оцінки $I_n(\gamma)$.** Для подальшого дослідження нам необхідно отримати оцінку функціонала (1), яка дозволить вивчити випадок $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Має місце такий результат.

**Лема 1.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такої, що $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$, $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, виконується нерівність*

$$I_n(\gamma) \leq (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

*де* $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

***Доведення.*** Як зазначено раніше, у статті [15] доведено гіпотезу В. М. Дубініна при $n \geq 5$ і $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leq 2,\ k = \overline{1,n}$. Результати роботи [15] посилено та узагальнено в публікаціях [24 – 26]. Для того щоб провести подальші міркування, нам необхідно дослідити випадок, коли виконується співвідношення $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2,\ \alpha_0 = \max_k \alpha_k$. Для цього ми використаємо метод, запропонований при доведенні теореми 5.2.3 монографії [1]. Згідно з цим методом отримуємо

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = \big(r^2(B_0,0)\, r(B_1,a_1)\, r(B_2,a_2)\big)^{\frac{\gamma}{2n}} \times$$

$$\times \big(r^2(B_0,0)\, r(B_2,a_2)\, r(B_3,a_3)\big)^{\frac{\gamma}{2n}} \ldots \big(r^2(B_0,0)\, r(B_n,a_n)\, r(B_1,a_1)\big)^{\frac{\gamma}{2n}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Неважко показати, що при кожному $k = \overline{1,n}$ можна побудувати такий конформний автоморфізм $\widetilde{w} = T(w)$ комплексної площини, при якому точка $a_0 = 0$ перейде в точку $0$, $a_k$ — в $i$, $a_{k+1}$ — в $-i$; $T(B_0) = \widetilde{B_0}$, $T(B_k) = \widetilde{B_k}$, $T(B_{k+1}) = \widetilde{B_{k+1}}$. Такий конформний автоморфізм завжди існує і до того ж єдиний.

Використовуючи інваріантність функціонала (11) для значень параметрів $t_1 = 2,\ t_2 = t_3 = 1$, отримуємо співвідношення

$$\frac{r^2(B_0,a_0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})}{|a_0-a_k|^2|a_0-a_{k+1}|^2|a_k-a_{k+1}|^0} = \frac{r^2(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})}{|a_k|^2|a_{k+1}|^2} =$$

$$= \frac{r^2(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_1},i)r(\widetilde{B_2},-i)}{|-i|^2|i|^2}.$$

Використовуючи нерівність (10) і результати робіт [1, 8], приходимо до висновку, що

$$r^2(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_1},i)r(\widetilde{B_2},-i) \leq r^2(E_0,0)r(E_1,i)r(E_2,-i) \approx 0,4374,$$

де $E_0,\ E_1,\ E_2$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2,$$

де $\sigma = \sqrt{2}$.

Таким чином, маємо

$$r^2(B_0,a_0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1}) \leq 0,4374|a_k|^2|a_{k+1}|^2, \quad k = \overline{1,n}.$$

Із умови $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leq 1$ випливає, що $\prod_{k=1}^{n}|a_k| \leq 1$. Тоді виконуються нерівності

$$I_n(\gamma) \leq (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|^4\right)^{\frac{\gamma}{2n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leq$$

$$\leq (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Згідно з теоремою 5.1.1 [1], справедливою є оцінка

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{M}^{(0)}(A_n).$$

Звідси, враховуючи умови леми 1, отримуємо співвідношення

$$I_n(\gamma) \leq (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{18}$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, то, використовуючи нерівність Коші між середнім геометричним і середнім арифметичним, приходимо до висновку, що

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leq \alpha_0 \prod_{k=1, k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leq \alpha_0 \left(\frac{\sum_{k=1,k\neq k_0}^{n} \alpha_k}{n-1}\right)^{n-1} = \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1},$$

де $\alpha_0 := \alpha_{k_0} := \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k$. Таким чином, із співвідношення (18) одержуємо нерівність для функціонала (1):

$$I_n(\gamma) \leq (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{19}$$

Лему 1 доведено.

Значення функціонала $I_n(\gamma)$, яке задається на конфігурації, що визначається квадратичним диференціалом (4), відіграє фундаментальну роль у подальших розрахунках, тому проведемо обчислення цієї величини більш детально у наступному пункті.

Для подальших міркувань нам необхідно підрахувати значення величини $I_n^0(\gamma)$ на системі кругових областей квадратичного диференціала (4), тобто обчислити величину

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $D_k$ і $d_k$ — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (4). Відомо [11], що система кругових областей квадратичного диференціала утворює систему неперетинних однозв'язних областей, причому $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1,n},\ d_0 = 0.$

**Лема 2.** *Справджується рівність*

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{20}$$

***Доведення.*** Із результатів робіт [1, 8, 9, 15] і властивостей відокремлюючого перетворення маємо

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Виконуючи нескладні перетворення, одержуємо

$$A = \left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2} = 2^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B = \left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2} = 2^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$M = \left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2} = \left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}},$$

$$N = \left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2} = \left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}.$$

Таким чином, отримуємо

$$MN = \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}$$

і у підсумку

$$AB = 2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}MN = 2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}.$$

Тоді

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \frac{2^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}+2\right)\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} = \left(\frac{2}{n}\right)^n \frac{2^n\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}2^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Отже, остаточно приходимо до виразу (20).

Уперше значення для $I_n^0(\gamma)$ отримано у статті [8] при $\gamma = 1$, для довільного $\gamma$ — в роботі [15]. Форму виразу $I_n^0(\gamma)$, яка використовується в даній статті, було запропоновано в [1].

Лему 2 доведено.

**5. Дослідження випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$.** В цьому пункті ми наведемо всі необхідні нерівності для аналізу випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$.

Нехай

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)}{r^\gamma(D_0,0)\prod_{k=1}^n r(D_k,d_k)}, \tag{21}$$

$$\tau_n(\gamma) = (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}. \tag{22}$$

**Лема 3.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, виконується нерівність*

$$\Lambda_n(\gamma) \leq \tau_n(\gamma).$$

***Доведення.*** З урахуванням співвідношень (19)–(21) маємо оцінку

$$\Lambda_n(\gamma) \leq \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}, \tag{23}$$

де $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}} > \dfrac{2}{n}$.

Розглянемо поліном (див. рис. 1)

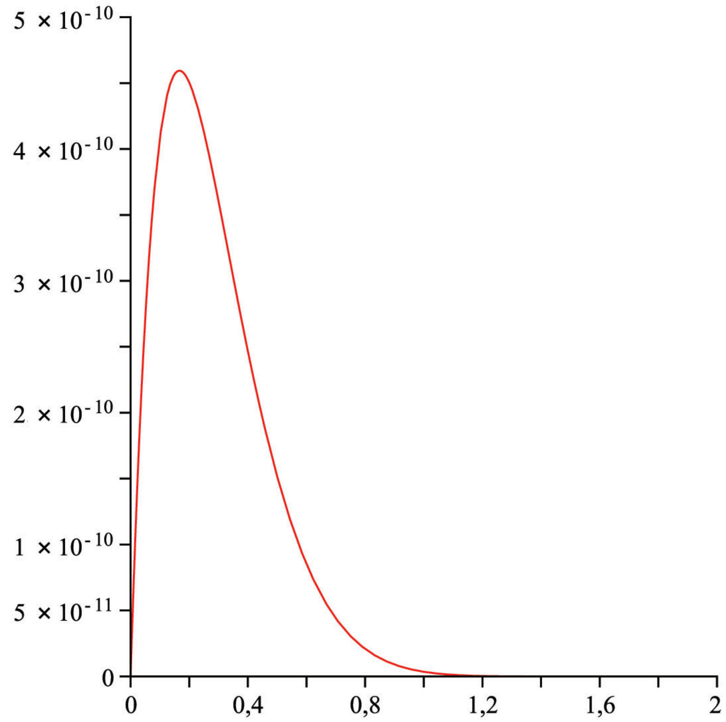


Рис. 1. Графік функції $y = x(2-x)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}$, $n = 12$.

$$P_n(x) = x(2-x)^{n-1}, \quad x \in (0,2].$$

Поліном $P_n(x)$ монотонно зростає на проміжку $\left(0, \dfrac{2}{n}\right)$ від значення $P_n(0) = 0$ до $P_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$ і монотонно спадає на проміжку $\left(\dfrac{2}{n}, 2\right)$ від значення $P_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$ до $P_n(2) = 0$. Таким чином, $P_n(x)$ має єдиний максимум у точці $x = \dfrac{2}{n}$ на проміжку $(0,2)$. Тоді зрозуміло, що на відрізку $\dfrac{2}{\sqrt{\gamma}} \leq x \leq 2$, $\gamma \in (1,n)$, виконується нерівність

$$x(2-x)^{n-1} \leq 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \tag{24}$$

Тепер із (23) з урахуванням нерівності (24) отримуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leq \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2 \cdot 2^{n-1}\dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2 - \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\dfrac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\left(\dfrac{4}{n}\right)^{\gamma+1}\left(\dfrac{4}{n}\right)^{-\frac{\gamma}{n}}\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{25}$$

Далі маємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leq$$

$$\leq \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot 4^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)} n^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1} \left(\frac{4}{n}\right)^{-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} =$$

$$= (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot 4^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times 4^{1-n+\gamma-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Отже,

$$\Lambda_n(\gamma) \leq \tau_n(\gamma).$$

Лему 3 доведено.

**6. Монотонність $\boldsymbol{\tau_n(\gamma)}$ по $\boldsymbol{\gamma}$.** В даному пункті ми дослідимо важливу властивість уведених у (22) функцій $\tau_n(\gamma)$, а також, з урахуванням цієї властивості, доведемо, що $\tau_n(\gamma) < 1$ при всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$.

**Лема 4.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq n$. Тоді виконується нерівність*

$$\tau_n(\gamma_1) < \tau_n(\gamma_2),$$

*де $\tau_n(\gamma)$ визначено у* (22).

***Доведення.*** Позначимо чисельник правої частини нерівності (25) через $m_n(\gamma)$:

$$m_n(\gamma) = (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тоді справджуються співвідношення

$$\ln(m_n(\gamma)) = \frac{\gamma}{2} \ln 0,4374 +$$

$$+ \left(1-\frac{\gamma}{n}\right) \left[n \ln 4 - \frac{1}{2} \ln \gamma + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1) \ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma = \frac{\ln 0,4374}{2} - \ln 4 + \frac{1}{2n} \ln \gamma - \frac{n-1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{n-1}{n} \ln(n-1) +$$

$$+ \left(1-\frac{\gamma}{n}\right) \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right).$$

Оскільки виконуються нерівності

$$0 < \frac{1}{2}\ln 0,4374 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{11}{12}\ln 11 < \frac{1}{2}\ln 0,4374 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \geq 0, \quad \left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right) \geq 0,$$

то легко бачити, що $m_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних у лемі параметрах $n,\ \gamma$.

Нехай $\gamma \in (1; n\,]$. Беручи до уваги, що функція

$$(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2^n\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фіксованому $n$ монотонно зростає по $\gamma$ на проміжку $(1; n\,]$, а функція $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на тому ж проміжку, оскільки

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right) < 0$$

при кожному фіксованому $n$, отримуємо

$$\tau_n(\gamma_1) < \tau_n(\gamma_2).$$

Лему 4 доведено.

Безпосередньо із леми 4 випливає таке твердження.

**Лема 5.** *Нехай* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 12,\ \gamma_0 \in (1, n]$ *і* $\tau_n(\gamma_0) = 1$. *Тоді виконується нерівність*

$$\tau_n(\gamma) < 1$$

*для всіх* $\gamma \in (1, \gamma_0)$.

Справджується такий результат.

**Лема 6.** *Нехай* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 12,$ *і* $\gamma \in (1, \gamma_n],\ \gamma_n = n^{0,5}$. *Тоді виконується нерівність*

$$\tau_n(\gamma) < 1.$$

***Доведення.*** Розглянемо величину $\tau_n(\gamma)$:

$$\tau_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

де

$$y_1(n) = (0,4374)^{n^{0,5}}\left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1}\left[1-\frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}}, \quad y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$y_3(n) = \left(1-n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

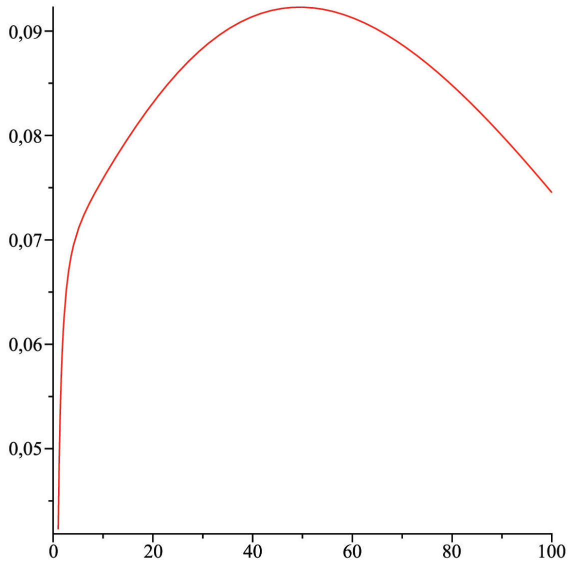


Рис. 2. Графік функції $y_1(n)$.

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}}.$$

Як показує аналіз, функція $y_1(n)$ монотонно зростає (див. рис. 2) на проміжку $n \in [31, 49]$, а на проміжку $n \in [50, \infty)$ монотонно спадає і досягає максимуму $y_1(49) \approx 0,0922852$, тому виконується нерівність

$$y_1(n) < y_1(49) \leq 0,0923, \quad n \in [31, 49].$$

Значення функції $y_1(n)$ на проміжку $[31, 48]$ наведено в табл. 1.

*Таблиця* 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| $y_1(n)$ | 0,0888 | 0,0892 | 0,0896 | 0,0899 | 0,0902 | 0,0905 | 0,0908 | 0,0910 | 0,0912 |
| $n$ | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| $y_1(n)$ | 0,0914 | 0,0916 | 0,0918 | 0,0919 | 0,0920 | 0,0921 | 0,0922 | 0,0922 | 0,0922 |

Тепер розглянемо функцію $y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}}$. Вона спадає на проміжку $n \in (6, \infty)$. Таким чином, $y_2(n) < 1,444611$, $n > 6$. Отже, приходимо до висновку, що

$$y_2(n) < y_2(31) \leq 1,3613, \quad n \in [31, 49].$$

Далі, значення функції $y_3(n)$ на проміжку $[31, 48]$ наведено в табл. 2. Очевидно, що

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}} < y_3(49) \leq 0,8664, \quad n \in [31, 49].$$

Розглянемо функцію $y_4(n)$. Запишемо її у вигляді

*Таблиця* 2

| $n$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_3(n)$ | 0,8343 | 0,8368 | 0,8391 | 0,8414 | 0,8435 | 0,8456 | 0,8475 | 0,8494 | 0,8512 |
| $n$ | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| $y_3(n)$ | 0,8530 | 0,8547 | 0,8563 | 0,8579 | 0,8594 | 0,8609 | 0,8623 | 0,8637 | 0,8651 |

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75} n^{-0,75} 2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75})2n^{0,25}}.$$

Оскільки $\left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geq 10$, то

$$y_4(n) \leq (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення і

$$y_4(n) < y_4(31) \leq 2,1249, \quad n \in [31, 49].$$

Досліджуючи функцію $y_5(n) = \left(\dfrac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}$ за стандартною схемою, переконуємося, що вона спадає на проміжку $n \in (8, \infty)$. Таким чином,

$$y_5(n) < y_5(31) \leq 1,5419, \quad n \in [31, 49].$$

Для функції $y_6(n)$ справджується співвідношення

$$y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq 2,6905, \quad n \in [31, 49].$$

Отже,

$$\tau_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n) \leq$$

$$\leq 0,0923 \cdot 1,3613 \cdot 0,8664 \cdot 2,1249 \cdot 1,5419 \cdot 2,6905 \approx$$

$$\approx 0,959625 < 1,$$

тобто

$$\tau_n(n^{0,5}) < 1, \quad n \in [31, 49].$$

Аналогічним чином на проміжку $n \in [50, \infty)$ отримуємо

$$y_1(n) < y_1(50) \leq 0,0923, \quad n \in [50, \infty).$$

Далі розглянемо функцію $y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}}$. Вона спадає на проміжку $n \in (6, \infty)$. Таким чином, $y_2(n) < 1,444611$, $n > 6$. Звідси приходимо до висновку, що

$$y_2(n) < y_2(50) \leq 1,3187, \quad n \in [50, \infty).$$

Очевидно, що

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}} \leq 1, \quad n \in [50, \infty).$$

Тепер розглянемо функцію $y_4(n)$. Запишемо її у вигляді

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75} n^{-0,75} 2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75}) 2n^{0,25}}.$$

Оскільки $\left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geq 10$, то

$$y_4(n) \leq (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення і

$$y_4(n) < y_4(50) \leq 1,8103, \quad n \in [50, \infty).$$

Досліджуючи функцію $y_5(n) = \left(\dfrac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}$ за стандартною схемою, переконуємося, що вона спадає на проміжку $n \in (8, \infty)$. Таким чином,

$$y_5(n) < y_5(50) \leq 1,4199, \quad n \in [50, \infty).$$

Для функції $y_6(n)$ справджується співвідношення

$$y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq 2,72, \quad n \in [50, \infty).$$

Підсумовуючи викладене вище, отримуємо

$$\tau_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n) \leq$$

$$\leq 0,0923 \cdot 1,3187 \cdot 1 \cdot 1,8103 \cdot 1,4199 \cdot 2,72 \approx$$

$$\approx 0,850991 < 1,$$

тобто

$$\tau_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{для } n \in [50, \infty).$$

З іншого боку, безпосередні обчислення показують, що $\tau_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [12, 30]$ (див. табл. 3). Звідси та з лем 4, 5 випливає, що $\tau_n(\gamma) < 1$ для всіх $n \geq 12$ і $\gamma \in (1, n^{0,5}]$.

Лему 6 доведено.

**7. Завершення доведення теореми 1.** Із урахуванням всіх попередніх лем ми отримали, що у випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$ і $\gamma \in (1, n^{0,5}]$ екстремальні конфігурації відсутні при всіх $n \geq 12$. Залишається дослідити випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ і $\gamma \in (1, n^{0,5}]$, $n \geq 12$. У цьому випадку твердження теореми легко отримати із результату статті [24]. Достатньо лише перевірити, що умови, які були накладені на параметр $\gamma$, задовольняють умови теореми. Оскільки нерівність $n^{0,5} \leq$ $\leq 0,1215n^2$ виконується при $n \geq 5$, то із роботи [24] випливає нерівність

*Таблиця* 3

| $n$ | $y_1(n)$ | $y_2(n)$ | $y_3(n)$ | $y_4(n)$ | $y_5(n)$ | $y_6(n)$ | $\tau_n\left(n^{0,45}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0,0774681 | 1,4314177 | 0,7413863 | 3,2030253 | 1,7232493 | 1,9755106 | 0,8964409 |
| 13 | 0,0782372 | 1,4271714 | 0,7510127 | 3,0568729 | 1,7132898 | 2,0019350 | 0,8792146 |
| 14 | 0,0789887 | 1,4228456 | 0,7595747 | 2,9327093 | 1,7029409 | 2,0257159 | 0,8636551 |
| 15 | 0,0797230 | 1,4185110 | 0,7672595 | 2,8257772 | 1,6923972 | 2,0472672 | 0,8495195 |
| 16 | 0,0804396 | 1,4142135 | 0,7742110 | 2,7326114 | 1,6817928 | 2,0669174 | 0,8365996 |
| 17 | 0,0811382 | 1,4099829 | 0,7805414 | 2,6506264 | 1,6712202 | 2,0849312 | 0,8247248 |
| 18 | 0,0818182 | 1,4058380 | 0,7863401 | 2,5778530 | 1,6607436 | 2,1015239 | 0,8137494 |
| 19 | 0,0824791 | 1,4017904 | 0,7916792 | 2,5127640 | 1,6504071 | 2,1168736 | 0,8035511 |
| 20 | 0,0831203 | 1,3978467 | 0,7966177 | 2,4541563 | 1,6402406 | 2,1311282 | 0,7940282 |
| 21 | 0,0837413 | 1,3940102 | 0,8012045 | 2,4010688 | 1,6302637 | 2,1444123 | 0,7850906 |
| 22 | 0,0843418 | 1,3902814 | 0,8054801 | 2,3527240 | 1,6204889 | 2,1568314 | 0,7766648 |
| 23 | 0,0849212 | 1,4271714 | 0,8094790 | 2,3084860 | 1,6109231 | 2,1684756 | 0,7911419 |
| 24 | 0,0854793 | 1,3831434 | 0,8132305 | 2,2678296 | 1,6015695 | 2,1794224 | 0,7610960 |
| 25 | 0,0860158 | 1,3797296 | 0,8167593 | 2,2303167 | 1,5924286 | 2,1897388 | 0,7538503 |
| 26 | 0,0865303 | 1,3764154 | 0,8200873 | 2,1955792 | 1,5834988 | 2,1994832 | 0,7469053 |
| 27 | 0,0870228 | 1,3731976 | 0,8232330 | 2,1633051 | 1,5747770 | 2,2087067 | 0,7402249 |
| 28 | 0,0874931 | 1,3700725 | 0,8262129 | 2,1332284 | 1,5662591 | 2,2174541 | 0,7337784 |
| 29 | 0,0879410 | 1,3670369 | 0,8290413 | 2,1051208 | 1,5579405 | 2,2257650 | 0,7275368 |
| 30 | 0,0883666 | 1,3640871 | 0,8317307 | 2,0787851 | 1,5498159 | 2,2336747 | 0,7214772 |

$$I_n(\gamma) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в останній нерівності досягається при тих же умовах, що і в теоремі 1.

Теорему 1 доведено.

Використовуючи лему 2 та теорему 2, можна отримати такий результат.

***Наслідок* 1.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, і $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. Тоді для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

*де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, — полюси і кругові області квадратичного диференціала* (4).

Наслідок 1 є новим результатом для $n \in [12, 125]$ (див. [27]).

## Література


1. *Бахтин А. К.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 308 с.
2. *Бахтин А. К.* Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 25 – 33.

3. *Бахтин А. К., Вьюн В. Е., Таргонский А. Л.* Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 3. – С. 38 – 46.
4. *Бахтин А. К., Денега И. В.* Об одной проблеме В. Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту математики України. – 2013. – **10**, № 4-5. – С. 396 – 406.
5. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. *Дубинин В. Н.* О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 24 – 31.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
9. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – С. 3 – 76.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 401 с.
11. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
12. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – **286**. – С. 103 – 114.
13. *Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 11 – 14.
14. *Заболотний Я. В.* Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. НАН України. – 2016. – № 3. – С. 7 – 13.
15. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96 – 98.
16. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37 – 43.
17. *Кузьмина Г. В.* Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 3. – С. 41 – 103; № 5. – С. 1 – 50.
18. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253 – 275.
19. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52 – 67.
20. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
21. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.
22. *Bakhtin A.* Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, № 1. – P. 1 – 15.
23. *Bakhtin A.* Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – **234**, № 1. – P. 1 – 13.
24. *Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I.* $N$-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii J. Math. – 2017. – **38**, № 2. – P. 229 – 235.
25. *Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I.* Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 5. – P. 584 – 590.
26. *Vyhivska L.* Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains // Zb. Prats Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2017. – **14**, № 1. – P. 82 – 89.
27. *Zabolotnii Ya., Dvorak I.* Some evaluation of maximum of the product of conformal radii for pairwise non-overlapping domains // J. Math. Sci. – 2017. – **38**, № 3. – P. 554 – 559.
28. *Afanas'eva E. S.* Generalized quasi-isometries on smooth Riemannian manifolds // Math. Notes. – 2017. – **102**, № 1-2. – P. 12 – 21.

29. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Singularities of discrete open mappings with controlled $p$-module // J. Anal. Math. – 2015. – **127**. – P. 303 – 328.
30. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // J. Math. Sci. – 2015. – **210**, № 1. – P. 22 – 51.
31. *Klishchuk B. A., Salimov R. R.* Lower bounds for the area of the image of a circle // Ufa Math. J. – 2017. – **9**, № 2. – P. 55 – 61.
32. *Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* Toward the theory of Orlicz – Sobolev classes // St.Petersburg Math. J. – 2014. – **25**, № 6. – P. 929 – 963.
33. *Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* On convergence analysis of space homeomorphisms // Sib. Adv. Math. – 2013. – **23**, № 4. – P. 263 – 293.
34. *Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* Analogs of Ikoma – Schwartz lemma and Liouville theorem for mappings with unbounded characteristic // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 10. – P. 1551 – 1565.
35. *Sevost'yanov E. A.* On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 10. – P. 1610 – 1623.

Одержано 11.06.19