УДК 517.983

О. А. Бойчук, В. Л. Макаров, В. А. Ферук (Ін-т математики НАН України, Київ)

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ РЕЗОНАНСНИХ РІВНЯНЬ ТА ПОБУДОВА ЇХНІХ РОЗВ'ЯЗКІВ

We establish conditions for the existence and determine the general structure of solutions of resonant and iterative equations in a Banach space and their algorithmic realization.

Отримано умови існування та загальну структуру розв'язків резонансних і ітераційних рівнянь у банаховому просторі та їхню алгоритмічну реалізацію.

Лінійні операторні рівняння з нормально розв'язним оператором у гільбертових і банахових просторах становлять як теоретичний, так і практичний інтерес. Різні типи таких рівнянь і крайові задачі для них є дієвими засобами не лише теоретичних досліджень, але й математичного моделювання у різних галузях природознавства і техніки. До таких рівнянь належать, зокрема, резонансні рівняння [1 – 6], що застосовуються в ефективному FD-методі розв'язування операторних рівнянь і задач на власні значення [4] та виникають у теорії суперсиметричних операторів Казиміра та ді-спін алгебр [3, 5]. У даній роботі за допомогою апарату теорії узагальнено-оборотних операторів [7 – 11] встановлено умови існування і структуру розв'язків резонансних рівнянь у банаховому просторі. Проведено порівняння отриманих результатів із відомими результатами для ітераційних рівнянь [1] та резонансних рівнянь першого і другого роду із загальним диференціальним оператором для класичних ортогональних многочленів [6, 12, 13]. На основі робіт [1, 6, 12, 13] наведено шляхи алгоритмічної реалізації розв'язків цих рівнянь, що є важливим для побудови символьних комп'ютерних програм.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$, зі значеннями в деякому банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ і нормою $|||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахів простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$, зі значеннями в деякому банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ і нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, $D(L) \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $R(L) \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$.

Припустимо, що нуль-простір $N(L)$ і образ $R(L)$ оператора L доповнювальні в банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ відповідно, тобто існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$: $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ і $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_L$, які розбивають простори $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ у прямі суми замкнених підпросторів

$$\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) = N(L) \oplus X_L, \qquad \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) = Y_L \oplus R(L).$$

Розглянемо лінійне рівняння з нормально розв'язним оператором

$$(Lz)(t) = f(t) \tag{1}$$

за припущення, що неоднорідність $f(t)$ задовольняє рівняння

$$(Lf)(t) = 0$$

або, іншими словами, виконуються умови

$$N(L) \neq \varnothing, \quad f \in N(L) \subset R(L). \tag{2}$$

Рівняння (1), для яких виконуються умови (2), називаються резонансними [2].

2. Критерій розв'язності рівняння (1). Встановимо, використовуючи апарат теорії узагальнено-оборотних операторів, умови існування і загальний вигляд розв'язку рівняння (1) за умов (2). Оскільки, за припущенням, $N(L)$ і $R(L)$ доповнювальні в банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, то нормально розв'язний оператор L є узагальнено-оборотним оператором [8 – 10]. Для рівняння (1) із довільною правою частиною $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, тобто не лише за умови (2), але й коли умова (2) не виконується, справедлива така теорема [7; 10, с. 115].

Теорема 1. *Нормально розв'язне рівняння* (1) *має розв'язок для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \tag{3}$$

причому розв'язок $z(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *має вигляд*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \widehat{z})(t) + (L^- f)(t),$$

де $\widehat{z}(t)$ — *довільний елемент простору* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — *обмежений узагальнено-обернений оператор до* L.

Покажемо, що друга з умов (2), які характеризують резонансне рівняння (1), а саме умова $f \in N(L) \subset R(L)$, є частинним випадком умови розв'язності (3). Справді, зазначимо спочатку, що умова (3) рівносильна умові $f \in N(\mathcal{P}_{Y_L})$. Як показано у роботі [10, с. 57], область значень оператора L збігається з нуль-простором проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$, тобто $R(L) = N(\mathcal{P}_{Y_L})$. Отже, умова $f \in N(L) \subset R(L)$ набирає вигляду $f \in N(L) \subset N(\mathcal{P}_{Y_L})$. Тобто із того, що неоднорідність $f(t)$ задовольняє другу з умов (2), випливає, що вона задовольняє умову (3). Отже, якщо рівняння (1) є резонансним, то умова розв'язності (3) при умовах (2) виконується для всіх правих частин $f(t)$ і неоднорідне рівняння (1) завжди має розв'язок.

***Зауваження* 1.** Оскільки умова $f \in N(L) \subset R(L)$, яка характеризує резонансне рівняння (1), є частинним випадком умови розв'язності $(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$, то, очевидно, існують рівняння типу (1) із нормально розв'язними операторами, для яких виконується умова $(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$, проте не виконується умова $f \in N(L) \subset R(L)$. До таких рівнянь, наприклад, як показано у [8, с. 35; 9; 10, с. 38], відносяться рівняння зі звідно-оборотними операторами [14], тобто рівняння із замкненими щільно визначеними операторами $L\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B})$, для яких має місце розбиття $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}) = N(L) \oplus R(L)$. Зокрема, якщо $\mathbf{B}$ є простором $C^0[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій, які мають у точках a і b відповідно ліву і праву нульові похідні, то оператор $A = \dfrac{d^2}{dt^2}$ з областю визначення $D(A) = \left\{ f \in C^0[a,b] : \dfrac{d^2 f}{dt^2} \in C^0[a,b] \right\}$ є звідно-оборотним оператором [14, с. 31].

У випадку, коли рівняння (1) є резонансним, теорема 1 набирає такого вигляду.

Теорема 2. *Нормально розв'язне резонансне рівняння* (1) *для довільного* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *що задовольняє умови* (2), *має розв'язок* $z(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *вигляду*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \widehat{z})(t) + (L^- f)(t).$$

Якщо оператор L діє у банахових просторах, які мають топологічні базиси Шаудера, то теореми 1 і 2 можна сформулювати по-іншому. Нехай $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$, зі значеннями в деякому сепарабельному банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ і нормою $|||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахів простір неперервних обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$, зі значеннями в деякому сепарабельному банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ і нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $L\colon \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, $D(L) \subset \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $R(L) \subset \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$. Відомо, що банахові простори $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ мають базиси Шаудера.

Позначимо через μ і ν розмірності нуль-просторів $N(L)$ і $N(L^*)$ оператора L і спряженого до нього оператора L^*. Значення μ і ν можуть бути скінченними або нескінченними. Нехай $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\mu}$ і $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\nu}$ — повні системи лінійно незалежних базисних векторів нуль-просторів $N(L)$ і $N(L^*)$ відповідно, $X_\mu(t) = \big[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\mu(t)\big]$ і $\Phi(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_\nu(\cdot))$ — матриці, що складаються із систем $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\mu}$ і $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\nu}$ відповідно. Тоді теореми 1 і 2 наберуть такого вигляду.

Теорема 3. *Нормально розв'язне рівняння* (1) *має розв'язок для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умови*

$$(\Phi f)(\cdot) = 0,$$

причому розв'язок $z(t) \in \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *має вигляд*

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L^- f)(t),$$

де c_μ *— довільний елемент, що належить евклідовому* $\mathbf{R}^\mu$ *або банаховому* $\mathbf{B}_\mu$ *простору,* L^- *— обмежений узагальнено-обернений оператор до* L.

Теорема 4. *Нормально розв'язне резонансне рівняння* (1) *для довільного* $f(t) \in \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *що задовольняє умови* (2), *має розв'язок* $z(t) \in \mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *вигляду*

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L^- f)(t).$$

3. Резонансні рівняння і класичні ортогональні многочлени. Нехай A_n — диференціальний оператор другого порядку гіпергеометричного або виродженого гіпергеометричного типу, що визначає класичні ортогональні многочлени [6]

$$(A_n z_n)(t) = \sigma(t)\frac{d^2 z_n(t)}{dt^2} + \tau(t)\frac{dz_n(t)}{dt} + \lambda(n)z_n(t), \qquad t \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

де $\sigma(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, $\tau(t) = b_1t + b_0$, $\lambda(n) = -nb_1 - n(n-1)a_2$, a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 — деякі параметри. Цей оператор для різних значень параметрів визначає класичні ортогональні многочлени Якобі, Ерміта, Лагерра [15, с. 166].

Дослідимо структуру загального розв'язку резонансного рівняння з оператором A_n:

$$(A_n z_n)(t) = f(t), \quad f \in N(A_n) \subset R(A_n). \tag{5}$$

Відомо, що однорідне рівняння (5) $(f(t) = 0)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ має два лінійно незалежних розв'язки: класичний ортогональний многочлен $\widehat{P}_n(t) \in N(A_n)$, який ще називають функцією першого роду, і відповідну функцію другого роду $\widehat{Q}_n(t) \in N(A_n)$, що не є многочленом

[15, с. 170 – 196]. Розглянемо неоднорідні рівняння

$$(A_n z_n)(t) = \widehat{P}_n(t), \qquad t \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$(A_n z_n)(t) = \widehat{Q}_n(t), \qquad t \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

і називатимемо їх резонансними рівняннями першого та другого роду відповідно [6]. Для конструктивного знаходження їхніх частинних розв'язків суттєвим є таке твердження [1].

Теорема 5. *Нехай A — лінійний оператор, що діє з банахового простору X в X, і зв'язна множина $\Sigma(A)$, яка лежить у комплексній площині, є спектром A. Якщо $\lambda \in \Sigma(A)$, $f(\lambda) \in \in N(A-\lambda I)$ — сильно диференційовна функція, то частинний розв'язок резонансного рівняння*

$$(A - \lambda I)u = f(\lambda) \tag{8}$$

можна взяти у вигляді

$$u(\lambda) = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}.$$

Запропонований у [1] підхід до знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь (8) можна також ефективно застосувати до деяких типів рівнянь, що не є резонансними. Зокрема, справедливою є така теорема.

Теорема 6. *Нехай $A\colon X \to X$ — лінійний оператор, що діє з банахового простору X в X, і зв'язна множина $\Sigma(A)$, яка лежить у комплексній площині, є спектром A. Якщо $\lambda \in \Sigma(A)$, $f(\lambda) \in N(A-\lambda I)$ — сильно диференційовна j разів функція, то частинний розв'язок рівняння*

$$(A - \lambda I)u = \frac{d^j f(\lambda)}{d\lambda^j}$$

можна взяти у вигляді

$$u(\lambda) = \frac{1}{j+1}\frac{d^{j+1} f(\lambda)}{d\lambda^{j+1}}.$$

Якщо $(\lambda+\mu) \in \Sigma(A)$, то частинний розв'язок рівняння

$$(A - \lambda I)u = b\frac{d^j f(\lambda+\mu)}{d\lambda^j}$$

можна взяти у вигляді

$$u = \sum_{l=0}^{j+1} a_l \frac{d^l f(\lambda+\mu)}{d\lambda^l}, \qquad a_l = \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{j+1-l} \frac{(j+1)!}{l!}\frac{b}{\mu}.$$

Зауважимо, що наведені у теоремах 5, 6 розв'язки можуть не належати області визначення відповідного оператора, проте вони відіграють істотну роль при побудові символьних алгоритмів. Проілюструємо це на прикладі.

***Приклад* 1.** Розглянемо типову задачу, що виникає у FD-методі: знайти розв'язок рівняння

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (n\pi)^2 u(x) = -\lambda^{(1)}\sqrt{2}\sin(n\pi x) + x\sqrt{2}\sin(n\pi x), \quad x \in (0,1),$$

який задовольняє умови

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

Тут

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad D(A) = \big\{u(x) \in W_2^2(0,1) \colon u(0) = 0, u(1) = 0\big\},$$

$\lambda^{(1)}$ — невідомий параметр і права частина рівняння містить резонансну складову (перший доданок).

Використовуючи теорему 5, частинний розв'язок диференціального рівняння, згідно з символьним методом, шукаємо у вигляді

$$u(x) = \frac{\lambda^{(1)} x}{\sqrt{2} n\pi} \cos(n\pi x) + a_1 x \sin(n\pi x) + b_2 x^2 \cos(n\pi x)$$

і вимагаємо, щоб цей вираз тотожно задовольняв диференціальне рівняння. Як наслідок, одержуємо

$$2(\pi n a_1 + b_2)\cos(n\pi x) - 4(\pi n b_2 + \sqrt{2}/4) x \sin(n\pi x) \equiv 0.$$

Звідси знаходимо

$$b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4n\pi}, \qquad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{(2n\pi)^2}.$$

Використовуючи крайову умову в точці 1 (крайова умова в точці 0, очевидно, виконується), отримуємо

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{2}.$$

Поставлену задачу повністю розв'язано. При цьому ми не використовували умову розв'язності, яка пов'язана з операцією інтегрування, а це є суттєвим для символьного алгоритму.

Якщо у рівнянні (1) оператор L є лінійним диференціальним оператором n-го порядку, то теорема 4 набирає більш конкретного вигляду, що враховує властивості цього оператора [8, c. 169; 9; 10, c. 367]. Зокрема, у розглядуваному випадку диференціальний оператор A_n є диференціальним оператором другого порядку і лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (5) ($f(t) = 0$) є функції $\widehat{P}_n(t)$ та $\widehat{Q}_n(t)$ [15]. Отже, нуль-простір $N(A_n)$ оператора A_n є двовимірним ($\mu = 2$) і $(\mathcal{P}_{N(A_n)}\widehat{z})(t) = X_\mu(t)c_\mu = c_1\widehat{P}_n(t) + c_2\widehat{Q}_n(t)$, де c_1, c_2 — довільні сталі, а узагальнено-обернений оператор A_n^-, згідно з результатами [8, c. 168; 9; 10, c. 366] має вигляд

$$(A_n^- w)(t) = \int\limits_a^b K(t,s) w(s) ds, \tag{9}$$

де

$$K(t,s) = \operatorname{sign}(t-s) \frac{\Big(\widehat{Q}_n(s) - \widehat{Q}'_n(s)\Big)\widehat{P}_n(t) + \Big(\widehat{P}'_n(s) - \widehat{P}_n(s)\Big)\widehat{Q}_n(t)}{2\sigma(s)\Big(\widehat{P}'_n(s)\widehat{Q}_n(s) - \widehat{P}_n(s)\widehat{Q}'_n(s)\Big)},$$

$$\widehat{P}'_n(s) = \frac{d\widehat{P}_n(s)}{ds}, \qquad \widehat{Q}'_n(s) = \frac{d\widehat{Q}_n(s)}{ds}.$$

Використавши теорему 6.1 [8, c. 169], [9] і теорему 9.4.1 [10, c. 367], отримаємо для рівнянь (6), (7) таке твердження.

Неоднорідні резонансні рівняння першого і другого роду (6) *і* (7) *завжди мають двопараметричну сім'ю розв'язків* $z_n(t)$ *вигляду*

$$z_n(t) = c_1\widehat{P}_n(t) + c_2\widehat{Q}_n(t) + (A_n^-\widehat{P}_n)(t)$$

і

$$z_n(t) = c_1\widehat{P}_n(t) + c_2\widehat{Q}_n(t) + (A_n^-\widehat{Q}_n)(t)$$

відповідно, де $c_1,\ c_2$ — *довільні сталі і узагальнено-обернений оператор* A_n^- *має вигляд* (9).

Використавши результати теорії нормально розв'язних крайових задач [7 – 10], ми отримали загальний вигляд розв'язку резонансних рівнянь (6), (7), що є сумою загального розв'язку однорідного рівняння (5) і частинного розв'язку відповідного неоднорідного рівняння. Частинні розв'язки рівнянь (6), (7) визначаються за допомогою узагальнено-оберненого оператора A_n^- (9), що у даному випадку є інтегральним оператором з матрицею Коші. Звичайно, такий вигляд частинних розв'язків рівнянь (6), (7) не єдиний. Зокрема, у [6] обґрунтовано алгоритм знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь (6), (7), що використовує загальну теорему 5 про зображення частинних розв'язків резонансних рівнянь у банахових просторах [1].

Теоретичний підхід, в якому використовується апарат теорії узагальнено-оборотних операторів, дозволяє отримати загальний вигляд розв'язку не лише у випадку резонансних рівнянь, тобто коли права частина $f(t)$ рівняння (5) належить нуль-простору $N(A_n)$ оператора A_n : $f \in N(A_n) \subset R(A_n)$, але й для всіх правих частин $f(t)$ рівняння (5), що належать образу $R(A_n)$ оператора A_n : $f \in R(A_n)$. Однак із точки зору алгоритмічної реалізації підхід, запропонований у роботах [1, 6, 12, 13], щодо побудови символьного алгоритму розв'язування резонансних рівнянь є більш перспективним у практичних застосуваннях.

4. Ітераційні рівняння. Нехай X — комплексний сепарабельний банахів простір, $A\colon X \to X$ — лінійний оператор з областю визначення $D(A)$, щільною у X. Розглянемо далі оператор $A-\lambda I$, де λ — комплексне число, I — одиниця у просторі лінійних операторів $L(X)$. Позначимо через $\rho(A)$ резольвентну множину оператора A, а через $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ саму резольвенту цього оператора [16, с. 276].

Розглянемо питання відшукання такого елемента $u \in X$, який є розв'язком ітераційного рівняння

$$Lu = f, \tag{10}$$

де

$$L = (A-\lambda I)^n, \tag{11}$$

f — відомий елемент з X, $n \in \mathbb{N}$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 7. *Нехай* $\lambda \in \rho(A)$, *тоді розв'язок ітераційного рівняння* (10) *має вигляд*

$$u = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n R_\lambda(A)f. \tag{12}$$

Доведення. З умов теореми випливає, що $R_\lambda(A)$ є регулярною операторнозначною функцією, а отже, для неї буде правильним співвідношення

$$\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n R_\lambda(A) = R_\lambda(A)^n. \tag{13}$$

Згідно з рівністю (13) та структурою оператора L (11), отримуємо

$$Lu = L\left(\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n R_\lambda(A)f\right) = LR_\lambda(A)^n f = f.$$

Отже, елемент $u \in X$, що визначається співвідношенням (12), є розв'язком рівняння (10), що й потрібно було довести.

На основі тотожності Гільберта для резольвенти неважко переконатись у тому, що справедливою є така теорема.

Теорема 8. *Нехай числа* λ_i *належать* $\rho(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *і серед них немає однакових, тоді розв'язок рівняння*

$$\prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)u = f$$

задається формулою

$$u = R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)f,$$

де $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — *поділена різниця операторнозначної функції* $R_\lambda(A)$.

При доведенні останньої теореми, як проміжний результат, одержуємо узагальнення резольвентної тотожності Гільберта

$$R_{\lambda_1}(A) - R_{\lambda_2}(A) = (\lambda_1 - \lambda_2)R_{\lambda_1}(A)R_{\lambda_2}(A),$$

яке має вигляд

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = R_{\lambda_1}(A)R_{\lambda_2}(A)\ldots R_{\lambda_n}(A)$$

і легко встановлюється шляхом безпосередньої перевірки [1].

Зазначимо, що якщо числа $\lambda_i \in \rho(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, рівні між собою, то теорема 8 збігається з теоремою 7.

***Зауваження* 2.** Нехай у рівнянні (10) A — самоспряжений диференціальний оператор. Тоді, розглядаючи частинний розв'язок рівняння (10), як дію деякого оператора на функцію $f(x)$ з ядром, що є фундаментальним розв'язком вказаного рівняння, записуємо наслідок теореми 8, строге обґрунтування якого можна надати, спираючись на роботу [17]. Частинний розв'язок диференціального рівняння (10) в області Ω зображується формулою

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G^n(x, y; \lambda)f(y)dy, \quad y \in \Omega \subset \mathbb{R}^m,$$

де функція $G^n(x, y; \lambda)$ (матриця Гріна оператора $(A - \lambda I)^n$),

$$G^n(x, y; \lambda) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n-1} G^1(x, y; \lambda),$$

є фундаментальним розв'язком рівняння (10), тобто

$$LG^n(x, y; \lambda) = \delta_{x,y}.$$

Припустимо, що оператор L є нормально розв'язним. Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора A, що є доповненням до резольвентної множини $\rho(A)$ у просторі $\mathbb{C}$. Спектр $\sigma(A)$ неперервного лінійного оператора у банаховому просторі, в загальному випадку, може складатися із точкового $\sigma_p(A)$, неперервного $\sigma_c(A)$ та залишкового $\sigma_r(A)$ спектрів [16, с. 276; 18, с. 356 – 358]. Припустимо, що оператор A має лише точковий спектр, тобто [18, с. 357; 19, с. 37]

$$\sigma(A) \equiv \sigma_p(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \colon N(A - \lambda I) \neq 0\big\}. \tag{14}$$

Згідно з (14), точковий спектр $\sigma_p(A)$ складається із власних значень оператора A, а нуль-простір $N(A - \lambda I)$ — із власних векторів оператора A.

Як наслідок із теореми 3, для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливим є такий критерій розв'язності ітераційного рівняння (10).

Теорема 9. *Ітераційне рівняння* (10) *має розв'язок для тих і лише тих $f \in X$, які задовольняють умову*

$$\Phi f = 0,$$

і має розв'язок $u \in X$ вигляду

$$u = X_\mu c_\mu + L^- f,$$

де Φ, X_μ — матриці, що складаються із повних систем лінійно незалежних базисних векторів $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\nu}$ і $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ нуль-просторів $N(L^*)$ і $N(L)$ відповідно, c_μ — довільний елемент, що належить евклідовому $\mathbf{R}^\mu$ або банаховому $\mathbf{B}_\mu$ простору, L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до L.

Можливі два випадки: 1) $\lambda \in \rho(A)$; 2) $\lambda \in \sigma(A)$. Розглянемо спочатку випадок $\lambda \in \rho(A)$, тобто $N(A - \lambda I) = 0$. Нуль-простір $N(L)$ оператора L, як відомо, складається з усіх розв'язків рівняння

$$Lu = 0, \tag{15}$$

тому, згідно зі структурою оператора L (11), $N(L) = 0$. Враховуючи конструкцію узагальнено-оберненого оператора L^- [10, с. 63], отримуємо $L^- = L^{-1} = R_\lambda(A)^n$. Тобто якщо оператор L є нормально розв'язним, то теорема 7 є наслідком із теореми 9.

Розглянемо тепер другий випадок, тобто $\lambda \in \sigma(A) = \sigma_p(A)$. У цьому випадку, згідно з означенням спектра $\sigma_p(A)$ (14) і структурою оператора L (11), маємо $N(A - \lambda I) \subset N(L)$ і, отже, $N(L) \neq 0$. Дослідимо структуру нуль-простору $N(L)$ оператора L, тобто дослідимо питання розв'язності рівняння (15). Нехай $\{\eta_i\}_{i=1}^{r}$ — повна система лінійно незалежних власних векторів оператора A. Згідно з викладеним вище, система $\{\eta_i\}_{i=1}^{r}$ є підмножиною повної системи лінійно незалежних базисних векторів $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ нуль-простору $N(L)$.

Дослідження питання відшукання розв'язків рівняння (15) можна звести до відповідного питання для системи двох рівнянь, одне з яких є резонансним. Справді, за допомогою заміни $(A - \lambda I)^{n-1} u = v \neq 0$ рівняння (15) можна записати у вигляді двох рівнянь

$$(A - \lambda I) v = 0, \qquad (A - \lambda I)^{n-1} u = v, \tag{16}$$

друге з яких є резонансним. Тобто для розв'язання рівняння (15) нам потрібно відшукати всі пари векторів (v, u), що задовольняють систему рівнянь (16).

Нехай оператор $\widetilde{L}$ — звуження оператора L на множину F, $F = N(L) \ominus N(A - \lambda I)$ і $\{\xi_i\}_{i=1}^{d}$ — повна система лінійно незалежних базисних векторів нуль-простору $N(\widetilde{L})$ оператора $\widetilde{L}$. Справедливим є таке твердження [8 – 10].

Теорема 10. *Система рівнянь* (16), *а отже і рівняння* (15), *що характеризує ядро* $N(L)$ *оператора* L, *завжди має множину розв'язків* u, *що складається із множини власних векторів* v *оператора* A

$$v = W_r c_r$$

і множини розв'язків u *вигляду*

$$u = H_d c_d + \widetilde{L}^{-} v, \tag{17}$$

де W_r, H_d — *матриці, що складаються із повних систем лінійно незалежних базисних векторів* $\{\eta_i\}_{i=1}^{r}$ *і* $\{\xi_i\}_{i=1}^{d}$ *нуль-просторів* $N(A)$ *і* $N(\widetilde{L})$ *відповідно,* c_r *і* c_d — *довільні елементи, що належать евклідовим просторам* $\mathbf{R}^r$ *і* $\mathbf{R}^d$ *або банаховим просторам* $\mathbf{B}_r$ *і* $\mathbf{B}_d$ *відповідно,* $\widetilde{L}^{-}$ — *обмежений узагальнено-обернений оператор до* $\widetilde{L}$.

Отже, згідно із зображенням (17), дослідження структури нуль-простору $N(L)$ оператора L (11), що фігурує в ітераційному рівнянні (10), можна провести за допомогою методів розв'язності рівнянь із нормально розв'язним оператором. Разом з тим при побудові конструктивного алгоритму розв'язування ітераційного рівняння (10) суттєву роль відіграє формула (12).

***Зауваження* 3.** Якщо простір X є скінченновимірним векторним простором над полем комплексних чисел, то оператор L є фредгольмовим, а отже, нормально розв'язним [8 – 10] і має лише точковий спектр [16, с. 276; 18, с. 357]. У цьому випадку дослідження структури нуль-простору $N(L)$ оператора L рівносильне відшуканню кореневих векторів оператора L, які відіграють важливу роль при побудові жорданової форми матриці лінійного оператора та дослідженні функцій від таких операторів [20]. Рівняння типу (15), де оператор L має вигляд $Lu = (A - \lambda I)^n u$, , $n \in \mathbb{N}$, A — скінченновимірна квадратна комплекснозначна матриця, виникають, зокрема, при дослідженні аналітичних функцій від квадратних додатно визначених матриць [21].

Підсумовуючи отримані у даній роботі результати, зазначимо наступне. З теоретичної точки зору умова $f \in N(L) \subset R(L)$, яка характеризує резонансне рівняння (1), є частинним випадком умови розв'язності $(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$. Тобто твердження про загальний вигляд розв'язку резонансного рівняння (1) (теорема 2) є наслідком із критерію розв'язності рівняння (1) з довільним нормально розв'язним оператором (теорема 1). З алгоритмічної точки зору при розв'язуванні конкретних задач, що містять резонансні рівняння або ітераційні рівняння, для побудови символьних комп'ютерних програм реалізації [22] доцільно використовувати теорему 5.

Література

1. *Макаров В. Л.* Разностные схемы с точными и явными спектрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1976.
2. *Макаров В. Л., Аразмырадов Т.* О построении частных решений резонансных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1255 – 1261.
3. *Backhouse N. B.* The resonant Legendre equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – **117**, № 2. – P. 310 – 317.
4. *Макаров В. Л.* FD-метод — експоненційна швидкість збіжності // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 1997. – № 82. – С. 69 – 74.
5. *Backhouse N. B.* Resonant equations and special functions // J. Comput. and Appl. Math. – 2001. – **133**, № 1-2. – P. 163 – 169.
6. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Резонансні рівняння і класичні ортогональні многочлени // Доп. НАН України. – 2018. – **11**. – С. 3 – 10.
7. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 3. – С. 317 – 326.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.

9. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – 2nd ed. – Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2016. – 314 p.
10. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Нормально разрешимые краевые задачи. – Киев: Наук., думка, 2019. – 628 с.
11. *Ben Israel, Greville T. N. E.* Generalized inverses. Theory and applications. – New York: Wiley Intersci., 1974. — 395 p.
12. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 2. – С. 190 – 209.
13. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 4. – С. 455 – 470.
14. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 218 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
16. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Наук. думка, 1990. – 600 с.
17. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 799 с.
18. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
19. *Пирковский А. Ю.* Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. – М.: МЦНМО, 2010. – 176 с.
20. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2001. – 544 с.
21. *Lindqvist B. H.* Asymptotic properties of powers of nonnegative matrices, with applications // Linear Algebra and Appl. – 1989. – **114-115**. – P. 555 – 588.
22. *Makarov V. L., Romaniuk N. M.* Symbolic algorithm of the functional-discrete method for a Sturm – Liouville problem with a polynomial potential // Comput. Method Appl. Math. – 2017. – **18**, № 4. – P. 703 – 715.

Одержано 03.06.19