УДК 517.53

А. П. Голуб, О. А. Пожарський, Л. О. Чернецька (Ін-т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА БАГАТОВИМІРНІ БАГАТОТОЧКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ТИПУ ПАДЕ

Dzyadyk's method of generalized moment representations is used to construct and study bivariate two-point Padé-type approximants.

Метод узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика застосовано до вивчення і побудови двовимірних двоточкових апроксимацій типу Паде.

В. К. Дзядик [1] у 1981 р. запропонував метод узагальнених моментних зображень (УМЗ), який дав можливість будувати і досліджувати апроксиманти Паде та їхні різноманітні узагальнення для широких класів аналітичних і спеціальних функцій [2]. Зокрема, за допомогою цього методу було розроблено підхід до побудови та дослідження дво- та багатоточкових апроксимант Паде [3, 4]. У статтях [5, 6] запропоновано поширення методу на випадок багатовимірних послідовностей і його застосування до питань побудови та дослідження апроксимант типу Паде функцій кількох змінних. Все це дає можливість застосовувати УМЗ також до вивчення багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде.

Різноманітні модифікації багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде розглядалися в роботах [7 – 10], а одновимірні багатоточкові апроксиманти Паде — в роботах [12, 13].

Означення 1. *Нехай функція $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$, є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}^d$, що містить точки $\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{R-1}$, $R > 1$, і розвивається в околах цих точок у степеневі ряди*

$$f(\boldsymbol{z}) \sim \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\boldsymbol{k}}^{(r)} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_r)^{\boldsymbol{k}}, \quad r = \overline{0, R-1},$$

де $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$. Будемо називати d-вимірною R-точковою апроксимантою типу Паде функції f раціональну функцію

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \left(\begin{matrix} \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{R-1} \\ \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{R-1} \end{matrix}; \boldsymbol{z} \right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z})},$$

де

$$P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{N}} p_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{D}} q_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}},$$

таку, що мають місце розвинення

$$f(\boldsymbol{z}) - \frac{P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z})} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \mathcal{E}_r} e_{\boldsymbol{k}}^{(r)} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_r)^{\boldsymbol{k}}$$

в околах точок $\boldsymbol{z}_r$, $r = \overline{0, R-1}$.

При розгляді таких множин точок із цілочисловими координатами, як $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{R-1} \subset \mathbb{Z}_+^d$, як правило, ставиться вимога виконання властивості включення: якщо вектор $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ належить області, то і кожен вектор $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_d)$ такий, що $m_i \leq k_i$, $i = \overline{1, d}$, також належить цій області.

В невироджених випадках при цьому справджується рівність

$$|\mathcal{N}| + |\mathcal{D}| = \sum_{r=0}^{R-1} |\mathcal{E}_i| + 1.$$

В окремому випадку $d = R = 2$ це означення можна сформулювати в такому вигляді.

Означення 2. *Нехай функція двох змінних f є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}^2$, що містить точки $(z_0, w_0) = (0, 0)$, (z_1, w_1), і розвивається в околі цих точок у степеневі ряди*

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{1}$$

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m}^{(1)} (z - z_1)^k (w - w_1)^m. \tag{2}$$

Будемо називати двовимірною двоточковою апроксимантою типу Паде функції f раціональну функцію

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \left(\begin{matrix} (0,0), (z_1, w_1) \\ \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \end{matrix} ; z, w \right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{\mathcal{D}}(z, w)},$$

де

$$P_{\mathcal{N}}(z, w) = \sum_{(k,m) \in \mathcal{N}} p_{k,m} z^k w^m, Q_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{(k,m) \in \mathcal{D}} q_{k,m} z^k w^m,$$

таку, що мають місце розвинення

$$f(z, w) - \frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{\mathcal{D}}(z, w)} = \begin{cases} \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \mathcal{E}_0} e_{k,m} z^k w^m & \textit{при} \quad (z, w) \to (0, 0), \\ \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \mathcal{E}_1} e_{k,m}^{(1)} (z - z_1)^k (w - w_1)^m & \textit{при} \quad (z, w) \to (z_1, w_1). \end{cases}$$

Означення 3 [5]**.** *Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2}$ справджується УМЗ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі $\mathcal{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2}$ такі, що*

$$s_{k+j, m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Введемо додаткове позначення

$$\Delta_{N_1, N_2} = ([0, N_1] \times [0, N_2]) \cap \mathbb{Z}_+^2, \quad N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

Для кожного формального степеневого ряду вигляду (1) позначимо

$$E(f) = \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : s_{k,m} = 0\},$$
$$\overline{E}(f) = \mathbb{Z}_+^2 \setminus E(f).$$

Для розвинення в околі точки (z_1, w_1) вигляду (2) позначимо

$$E^{(1)}(f) = \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : s_{k,m}^{(1)} = 0\},$$
$$\overline{E}^{(1)}(f) = \mathbb{Z}_+^2 \setminus E(f).$$

Нехай функція f має розвинення в околі точки $(z_0, w_0) = (0,0)$ вигляду (1) і при цьому для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ має місце УМЗ вигляду (3). Домножимо рівності (3) на $z^k w^m$ і підсумуємо їх по k від 0 до досить великого $\widetilde{k}$ та по m від 0 до досить великого $\widetilde{m}$. Зліва отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\widetilde{k}} \sum_{m=0}^{\widetilde{m}} s_{k+j,m+n} z^k w^m = z^{-j} w^{-n} \sum_{k=j}^{\widetilde{k}+j} \sum_{m=n}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m =$$
$$= z^{-j} w^{-n} \left\{ \sum_{k=0}^{\widetilde{k}+j} \sum_{m=0}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=n}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=j}^{\widetilde{k}+j} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m \right\}, \tag{4}$$

а справа будемо мати

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\widetilde{k}} \sum_{m=0}^{\widetilde{m}} x_{k,m} z^k w^m, y_{j,n} \right\rangle. \tag{5}$$

Нехай нам потрібно побудувати раціональну апроксиманту функції f зі знаменником $Q_{\mathcal{D}}$, де $\mathcal{D}$ — деяка множина індексів із $\mathbb{Z}_+^2$. Будемо вважати, що точка $(0,0)$ належить $\mathcal{D}$, щоб апроксиманта не мала особливості в точці $(z_0, w_0) = (0,0)$. Нехай $\mathcal{D} \subseteq \Delta_{N_1,N_2}$, де $N_1, N_2 \in \in \mathbb{Z}_+$, і

$$\mathcal{D}^* = \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : (N_1 - k, N_2 - m) \in \mathcal{D}\}.$$

Домножимо (4) і (5) на деякі коефіцієнти $c_{j,n}$ та підсумуємо по $(j,n) \in \mathcal{D}^*$. Для зручності введемо коефіцієнти

$$\chi_{j,n} = \chi_{j,n}(\mathcal{D}^*) = \begin{cases} 1, & (j,n) \in \mathcal{D}^*, \\ 0, & (j,n) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \mathcal{D}^*. \end{cases}$$

В результаті отримаємо

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{-j} w^{-n} \left\{ \sum_{k=0}^{\widetilde{k}+j}\sum_{m=0}^{\widetilde{m}+n} s_{k+j} z^k w^m - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=j}^{\widetilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m \right\} =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{\widetilde{k}}\sum_{m=0}^{\widetilde{m}} x_{k,m} z^k w^m, \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n} y_{j,n} \right\rangle,$$

або

$$z^{-N_1} w^{-N_2} \left\{ \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n \left(f(z,w) - \sum_{(k,m)\in\Omega_{j,n}} s_{k+j} z^k w^m \right) - \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m -$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=j}^{\widetilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m \right\} = \left\langle \sum_{k=0}^{\widetilde{k}}\sum_{m=0}^{\widetilde{m}} x_{k,m} z^k w^m, \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n} y_{j,n} \right\rangle,$$

де

$$\Omega_{j,n} = \{[0,\widetilde{k}+j]\times[\widetilde{m}+n+1,\infty)\cup[\widetilde{k}+j+1,\infty)\times[0,\widetilde{m}+n]\cup$$
$$\cup[\widetilde{k}+j+1,\infty)\times[\widetilde{m}+n+1,\infty)\}\cap\mathbb{Z}_+^2.$$

Введемо позначення

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n,$$

$$Y_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n} y_{j,n},$$

$$X(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_{k,m} z^k w^m$$

(за умови збіжності ряду).

Таким чином,

$$f(z,w) Q_{\mathcal{D}}(z,w) - \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\widetilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m -$$

$$-\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}\chi_{j,n} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=j}^{\widetilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m =$$

$$= \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n \sum_{(k,m)\in\Omega_{j,n}} s_{k+j} z^k w^m + z^{N_1} w^{N_2} \left\langle X(z,w) - \sum_{(k,m)\in\Omega_{0,0}} x_{k,m} z^k w^m, Y_{\mathcal{D}} \right\rangle.$$

Запишемо цю рівність у вигляді

$$f(z,w)Q_{\mathcal{D}}(z,w) - P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) - U_{N_1-1}(z,w) - V_{N_2-1}(z,w) =$$
$$= R(z,w) + z^{N_1} w^{N_2} \left\langle X(z,w), Y_{\mathcal{D}} \right\rangle. \tag{6}$$

При досить великих $\widetilde{k}$ і $\widetilde{m}$ залишок $R(z,w)$ міститиме лише змінні в дуже великих степенях, так що можна домогтися того, щоб

$$\overline{E}(R) \cap K_r = \varnothing,$$

де $K_r = \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k^2 + m^2 \le r^2\}$ для довільного наперед заданого $r > 0$.

Тоді

$$P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,m}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n}, \tag{7}$$

$$U_{N_1-1}(z,w) = w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\widetilde{m}} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,N_2}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m+N_2-n},$$

$$V_{N_2-1}(z,w) = z^{N_1} \sum_{k=0}^{\widetilde{k}}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{N_1,m}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k+N_1-j,m-n}.$$

До чисельника апроксимації будемо відносити $P_{N_1-1,N_2-1}(z,w)$, а також певні частинні суми рядів $U_{N_1-1}(z,w)$ і $V_{N_2-1}(z,w)$.

Позначимо

$$u_{k,m} = \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,N_2}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m+N_2-n}, \tag{8}$$

$$v_{k,m} = \sum_{(j,n)\in\Delta_{N_1,m}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k+N_1-j,m-n}, \tag{9}$$

$$p_{k,m} = \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,m}\cap\mathcal{D}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n}.$$

Тоді, зафіксувавши певні функції $\varphi\colon [0, N_1-1]\cap\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ і $\psi\colon [0, N_2-1]\cap\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, будемо мати

$$f(z,w)Q_{\mathcal{D}}(z,w) - P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) - U^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) - V^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w) =$$

$$= f(z,w)Q_{\mathcal{D}}(z,w) - P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) - w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\varphi(k)} z^k w^m u_{k,m} -$$

$$-z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{\psi(m)} z^k w^m v_{k,m} = w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=\varphi(k)+1}^{\widetilde{m}} z^k w^m u_{k,m} +$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=\psi(m)+1}^{\widetilde{k}} z^k w^m v_{k,m} + R(z,w) + z^{N_1}w^{N_2}\left\langle X(z,w), Y_{\mathcal{D}}\right\rangle =$$

$$= \widetilde{U}^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) + \widetilde{V}^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w) + R(z,w) + z^{N_1}w^{N_2}\left\langle X(z,w), Y_{\mathcal{D}}\right\rangle. \qquad (10)$$

Якщо від $Y_{\mathcal{D}}$ вимагати виконання умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{\mathcal{D}}\rangle = 0 \qquad \forall (k,m) \in \mathcal{B} \subset \Delta_{N_1,N_2},$$

де $|\mathcal{B}| = |\mathcal{D}| - 1$, то

$$\overline{E}\left(f(z,w)Q_{\mathcal{D}}(z,w) - P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) - U^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) - V^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w)\right) \subset$$

$$\subset \overline{E}\left(\widetilde{U}^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w)\right) \bigcup \overline{E}\left(\widetilde{V}^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w)\right) \bigcup \overline{E}(R) \bigcup$$

$$\bigcup \left((k,m) \in [N_1,\infty) \times [N_2,\infty) \cap \mathbb{Z}^2_+ : (n - N_1, m - N_2) \subset \mathbb{Z}^2_+ \backslash \mathcal{B}\right).$$

Звідси випливає такий результат, що є узагальненням теорем 1 та $1'$ із [5].

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд f має вигляд* (1) *і для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2_+}$ має місце УМЗ вигляду* (3). *Тоді якщо для деякої множини індексів $\mathcal{D}^* \subseteq \Delta_{N_1,N_2}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$, такої, що $(N_1,N_2) \in \mathcal{D}^*$, існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n} y_{j,n}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{\mathcal{D}}\rangle = 0$$

при $(k,m) \in \mathcal{B} \subset \Delta_{N_1,N_2}$ і $c_{N_1,N_2} \neq 0$, то раціональна функція

$$[\mathcal{N}\backslash\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{D}} c_{N_1-k,N_2-m} z^k w^m,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) + U^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) + V^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w),$$

до того ж $P_{N_1-1,N_2-1}(z,w)$ *визначається формулою* (7), *а*

$$U^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) = w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\varphi(k)} z^k w^m u_{k,m}, \quad V^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w) = z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{\psi(m)} z^k w^m v_{k,m},$$

має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (1) *для всіх*

$$(j,n) \in \big((k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : k\in[0,N_1-1], m\in[0,N_2+\varphi(k)]\big)\cup$$
$$\cup\big((k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : m\in[0,N_2-1], k\in[0,N_1+\psi(m)]\big)\cup\{(N_1,N_2)+\mathcal{B}\} = \mathcal{E}.$$

У випадку збіжності ряду (1) похибка апроксимації має зображення

$$f(z,w) - [\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \widetilde{U}^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w) + \widetilde{V}^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w) + z^{N_1}w^{N_2}\left\langle X(z,w), Y_{\mathcal{D}}\right\rangle,$$

де $\widetilde{U}^{(\varphi)}_{N_1-1}(z,w)$ і $\widetilde{V}^{(\psi)}_{N_2-1}(z,w)$ визначаються формулою (10) при $\widetilde{k} = \widetilde{m} = \infty$.

На основі формули (6) можна будувати і двоточкові двовимірні апроксиманти типу Паде. Будемо припускати, що функція f вигляду (1) є аналітичною в бікрузі $K_{R_1,R_2} = \{(z,w) : |z| < R_1, |w| < R_2\}$. В такому випадку ряд (2) також буде збігатися принаймні при $|z - z_1| < |R_1 - z_1|$, $|w - w_1| < |R_2 - w_1|$. Покладемо $\widetilde{k} = \widetilde{m} = \infty$. Тоді $R(z,w) \equiv 0$ і формула (6) набирає вигляду

$$f(z,w)Q_{\mathcal{D}}(z,w) - P_{N_1-1,N_2-1}(z,w) =$$
$$= U_{N_1-1}(z,w) + V_{N_2-1}(z,w) + z^{N_1}w^{N_2}\left\langle X(z,w), Y_{\mathcal{D}}\right\rangle, \tag{11}$$

де P_{N_1-1,N_2-1} має вигляд (7), а

$$U_{N_1-1}(z,w) = w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\infty} z^k w^m u_{k,m}, \quad V_{N_2-1}(z,w) = z^{N_1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m v_{k,m}.$$

Покладемо також $\mathcal{D} = \Delta_{N_1,N_2}$. З формули (11) випливає, що

$$E\left(fQ_{\mathcal{D}} - P_{N_1-1,N_2-1}\right) \supset \Delta_{N_1-1,N_2-1}.$$

Розвинемо U_{N_1-1}, V_{N_2-1} і третій доданок із правої частини (11) у ряди в околі точки (z_1,w_1):

$$U_{N_1-1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\infty} z^k w^{m+N_2} u_{k,m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\infty} (z - z_1 + z_1)^k (w - w_1 + w_1)^{m+N_2} u_{k,m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(z-z_1)^l z_1^{k-l}\sum_{r=0}^{N_2+m}\binom{N_2+m}{r}(w-w_1)^r w_1^{N_2+m-r} u_{k,m} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1}(z-z_1)^l z_1^{-l}\sum_{k=l}^{N_1-1}\binom{k}{l}z_1^k\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{N_2-1}\binom{N_2+m}{r}(w-w_1)^r w_1^{N_2+m-r}+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=N_2}^{N_2+m}\binom{N_2+m}{r}(w-w_1)^r w_1^{N_2+m-r}\right\}u_{k,m}=$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1}(z-z_1)^l z_1^{-l}\sum_{k=l}^{N_1-1}\binom{k}{l}z_1^k\left\{\sum_{r=0}^{N_2-1}(w-w_1)^r w_1^{N_2-r}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{N_2+m}{r}w_1^m+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}(w-w_1)^{N_2+r}w_1^{-r}\sum_{m=r}^{\infty}\binom{N_2+m}{N_2+r}w_1^m\right\}u_{k,m}.$$

Позначимо через $u_{l,r}^{(1)}$ коефіцієнт при $(z-z_1)^l(w-w_1)^r$ у розвиненні U_{N_1-1}. Тоді при $l\in$ $\in[0,N_1-1],\ r\geq 0$ отримаємо

$$u_{l,r}^{(1)}=z_1^{-l}w_1^{N_2-r}\sum_{k=l}^{N_1-1}\binom{k}{l}z_1^k\sum_{m=(r-N_2)_+}^{\infty}\binom{N_2+m}{r}w_1^m u_{k,m},$$

де

$$(\alpha)_+=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha<0,\\ \alpha, & \text{якщо } \alpha\geq 0.\end{cases}$$

Аналогічно

$$V_{N_2-1}(z,w)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{N_2-1}(z-z_1)^l(w-w_1)^r v_{l,r}^{(1)},$$

де

$$v_{l,r}^{(1)}=z_1^{N_1-l}w_1^{-r}\sum_{k=(l-N_1)_+}^{\infty}\binom{N_1+k}{l}z_1^k\sum_{m=r}^{N_2-1}\binom{m}{r}w_1^m v_{k,m}.$$

Розкладемо третій доданок:

$$z^{N_1}w^{N_2}\left\langle X(z,w),Y_{\mathcal{D}}\right\rangle=\left\langle\sum_{l,r=0}^{\infty}x_{l,r}^{(1)}(z-z_1)^l(w-w_1)^r,Y_{\mathcal{D}}\right\rangle,$$

де

$$x_{l,r}^{(1)}=z_1^{N_1-l}w_1^{N_2-r}\sum_{k=(l-N_1)_+}^{\infty}\sum_{m=(r-N_2)_+}^{\infty}\binom{N_1+k}{l}\binom{N_2+m}{r}z_1^k w_1^m x_{k,m}.$$

Для того щоб

$$E^{(1)}\left(fQ_{\mathcal{D}}-P_{N_1-1,N_2-1}\right)\supset\Delta_{N_1,N_2}\setminus\{(N_1,N_2)\},$$

необхідно, щоб

$$u_{l,r}^{(1)} + v_{l,r}^{(1)} + \left\langle x_{l,r}^{(1)}, Y_{\mathcal{D}} \right\rangle = 0$$

при

$$(l, r) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1, N_2)\}.$$

Звідси випливають умови на коефіцієнти полінома $Y_{\mathcal{D}}$.

З (8), (9) при $\mathcal{D} = \Delta_{N_1,N_2}$ маємо

$$u_{k,m} = \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,N_2}\bigcap_{N_1,N_2}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m+N_2-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{\min\{k,N_1\}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m+N_2-n},$$

$$v_{k,m} = \sum_{(j,n)\in\Delta_{N_1,m}\bigcap_{N_1,N_2}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k+N_1-j,m-n} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{\min\{m,N_2\}} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k+N_1-j,m-n}.$$

Таким чином, при $(l, r) \in \Delta_{N_1,N_2}$ отримуємо

$$u_{l,r}^{(1)} = z_1^{-l} w_1^{N_2-r} \sum_{k=l}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{l} \binom{N_2+m}{r} z_1^k w_1^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m+N_2-n} =$$

$$= z_1^{-l} w_1^{N_2-r} \sum_{n=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_1-1} c_{N_1-j,N_2-n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=\max\{l,j\}}^{N_1-1} \binom{k}{l} \binom{N_2+m}{r} z_1^k w_1^m s_{k-j,m+N_2-n} =$$

$$= z_1^{-l} w_1^{N_2-r} \sum_{n=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_1-1} c_{N_1-j,N_2-n} \xi_{j,n}^{(l,r)} = z_1^{-l} w_1^{N_2-r} \sum_{n=0}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1-1} c_{j,n} \xi_{N_1-j,N_2-n}^{(l,r)},$$

де

$$\xi_{j,n}^{(l,r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=\max\{l,j\}}^{N_1-1} \binom{k}{l} \binom{N_2+m}{r} z_1^k w_1^m s_{k-j,m+N_2-n}. \tag{12}$$

Аналогічно

$$v_{l,r}^{(1)} = z_1^{N_1-l} w_1^{-r} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n} \eta_{N_1-j,N_2-n}^{(l,r)},$$

де

$$\eta_{j,n}^{(l,r)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\max\{r,n\}}^{N_2-1} \binom{N_1+k}{l} \binom{m}{r} z_1^k w_1^m s_{k+N_1-j,m-n}. \tag{13}$$

Отже, потрібно, щоб для $(l, r) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1, N_2)\}$

$$z_1^{-l} w_1^{N_2-r} \sum_{n=0}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1-1} c_{j,n} \xi^{(l,r)}_{N_1-j,N_2-n} +$$

$$+ z_1^{N_1-l} w_1^{-r} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n} \eta^{(l,r)}_{N_1-j,N_2-n} + \left\langle x^{(1)}_{l,r}, \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} y_{j,n} \right\rangle = 0. \qquad (14)$$

Теорема 2. *Нехай функція f, аналітична в бікрузі $K_{R_1,R_2}, |z_1| < R_1, |w_1| < R_2$, в околі точки $(0,0)$ розвивається у степеневий ряд вигляду* (1), *для послідовності коефіцієнтів якого $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ справджується УМЗ вигляду* (3), *і при цьому існує узагальнений поліном вигляду*

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} y_{j,n}$$

з ненульовим старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2} \neq 0$, для якого виконуються співвідношення (14), *де $\xi^{(l,r)}_{j,n}$ і $\eta^{(l,r)}_{j,n}$ визначаються формулами* (12) *і* (13). *Тоді раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \begin{pmatrix} (0,0),(z_1,w_1) \\ \mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1 \end{pmatrix}; z, w \Bigg) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n},$$

розвивається в околі точки $(0,0)$ в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (1) *при $(k,m) \in \Delta_{N_1-1,N_2-1} = \mathcal{E}_0$, а в околі точки (z_1,w_1) в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції f у цій точці при $(k,m) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\} = \mathcal{E}_1$.*

Таким чином, побудовано двоточкові апроксиманти типу Паде з $\mathcal{N} = \Delta_{N_1-1,N_2-1}$, $\mathcal{D} = \Delta_{N_1,N_2}$, $\mathcal{E}_0 = \Delta_{N_1-1,N_2-1}$, $\mathcal{E}_1 = \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\}$. Але при цьому узагальнені поліноми $Y_{\mathcal{D}}$ визначаються не умовами біортогональності, як у випадку одноточкових апроксимацій, а однорідними системами лінійних алгебраїчних рівнянь (14). У випадку, коли ми будемо визначати $Y_{\mathcal{D}}$ з умов біортогональності

$$\left\langle x^{(1)}_{l,r}, Y_{\mathcal{D}} \right\rangle = 0, \quad (l,r) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\}, \qquad (15)$$

до чисельника апроксимації потрібно віднести також частинні суми

$$U^{(1)}_{N_1-1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} u^{(1)}_{k,m} (z-z_1)^k (w-w_1)^m \qquad (16)$$

і

$$V^{(1)}_{N_2-1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} v^{(1)}_{k,m} (z-z_1)^k (w-w_1)^m, \qquad (17)$$

у зв'язку з чим зміниться область коефіцієнтів чисельника $\mathcal{N} = \Delta_{N_1-1,2N_2-1} \cup \Delta_{2N_1-1,N_2-1}$.

Теорема 3. *Нехай функція* f, *аналітична в бікрузі* $K_{R_1,R_2}, |z_1| < R_1, |w_1| < R_2$, *в околі точки* $(0,0)$ *розвивається у степеневий ряд вигляду* (1), *для послідовності коефіцієнтів якого* $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ *справджується УМЗ вигляду* (3), *і при цьому існує узагальнений поліном вигляду*

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} y_{j,n}$$

із ненульовим старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2} \neq 0$, *для якого виконуються умови біортогональності* (15). *Тоді раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \begin{pmatrix} (0,0),(z_1,w_1) & \\ \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 & ; z, w \end{pmatrix} = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n} + U^{(1)}_{N_1-1}(z,w) + V^{(1)}_{N_2-1}(z,w),$$

до того ж $U^{(1)}_{N_1-1}$, $V^{(1)}_{N_2-1}$ *визначаються формулами* (16), (17), *розвивається в околі точки* $(0,0)$ *в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду* (1) *при* $(k,m) \in \Delta_{N_1-1,N_2-1} = \mathcal{E}_0$, *а в околі точки* (z_1,w_1) *в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції* f *у цій точці при* $(k,m) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\} = \mathcal{E}_1$.

Цим самим побудовано двоточкові апроксиманти типу Паде функції f з $\mathcal{N} = \Delta_{N_1-1,2N_2-1} \cup \cup \Delta_{2N_1-1,N_2-1}$, $\mathcal{D} = \Delta_{N_1,N_2}$, $\mathcal{E}_0 = \Delta_{N_1-1,N_2-1}$, $\mathcal{E}_1 = \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\}$.

Розглянемо тепер випадок наближення так званих псевдодвовимірних функцій (див., наприклад, [11]), що мають розвинення вигляду

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \widetilde{s}_{k+m} z^k w^m = \frac{z\widetilde{f}(z) - w\widetilde{f}(w)}{z-w},$$

де

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k z^k.$$

Нехай для послідовності $\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ має місце УМЗ вигляду

$$\widetilde{s}_{k+j} = \langle \widetilde{x}_k, \widetilde{y}_j \rangle, \ k,m \in \mathbb{Z}_+.$$

У такому випадку для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$, де $s_{k,m} = \widetilde{s}_{k+m}$, $(k,m) \in \in \mathbb{Z}_+^2$, має місце двовимірне УМЗ вигляду

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k,m,j,n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $x_{k,m} = \widetilde{x}_{k+m}$, $y_{j,n} = \widetilde{y}_{j+n}$, $k,m,j,n \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай $\mathcal{D} \subset \Delta_{N,N}$ — множина індексів, симетрична відносно діагоналі квадрата $\Delta_{N,N}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $(0,0) \in \mathcal{D}$, і для будь-якого $k \in [0,p]$, $0 \le p \le 2N$, існує точка $(k_1,k_2) \in \mathcal{D}$ така, що $k_1 + k_2 = k$. Тоді множина індексів $\mathcal{D}^\star$ буде також симетричною, $(N,N) \in \mathcal{D}^\star$ і для будь-якого $k \in [2N-p, 2N]$ існує така точка $(k_1,k_2) \in \mathcal{D}^\star$, що $k_1 + k_2 = k$.

Згідно з теоремою 1, ми можемо побудувати апроксиманту Паде функції f

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}] = \frac{P_{\mathcal{N}}}{Q_{\mathcal{D}}}.$$

Для цього нам потрібно побудувати узагальнений поліном

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^\star} c_{j,n} y_{j,n},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{\mathcal{D}} \rangle = 0, \quad (k,m) \in \{(k,m) \colon k+m \le p-1\}.$$

При цьому поліном $Y_{\mathcal{D}}$ буде збігатися з поліномом

$$\widetilde{Y}_{\mathcal{D}} = \sum_{j=2N-p}^{2N} \widetilde{c}_j \widetilde{y}_j,$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle \widetilde{x}_k, \widetilde{Y}_{\mathcal{D}} \rangle = 0, \quad k \in [0, p-1].$$

Припустимо, що такий поліном існує і $\widetilde{c}_{2N} \ne 0$. Тоді

$$\sum_{j+n=l} c_{j,n} = \widetilde{c}_l, \quad l = \overline{2N-p, 2N}.$$

Множину індексів $\mathcal{N}$ виберемо таким чином:

$$\mathcal{N} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+ : j \in [0, N-1], 0 \le n \le 2N+p-j-1\} \cup$$
$$\cup \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+ : n \in [0, N-1], 0 \le j \le 2N+p-n-1\}.$$

Тоді отримаємо такий результат.

Теорема 4. *Нехай функція f має вигляд*

$$f(z,w) = \frac{z\widetilde{f}(z) - w\widetilde{f}(w)}{z-w}, \tag{18}$$

де

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k z^k,$$

а для послідовності $\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ має місце УМЗ вигляду

$$\widetilde{s}_{k+j} = \langle \widetilde{x}_k, \widetilde{y}_j \rangle, \quad k,j \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

Припустимо, що для деякого $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+$ *множина індексів* $\mathcal{D} \subset \Delta_{N,N}$ *є симетричною відносно діагоналі „квадрата" $\Delta_{N,N}$ і такою, що для будь-якого $k \in [0,p]$, $0 \le p \le 2N$, існує така точка $(k_1,k_2) \in \mathcal{D}$, що $k_1 + k_2 = k$.*

Нехай існує узагальнений поліном

$$\widetilde{Y}_{N,p} = \sum_{j=2N-p}^{2N} \widetilde{c}_j \widetilde{y}_j, \quad \widetilde{c}_{2N} \neq 0,$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle \widetilde{x}_k, \widetilde{Y}_{N,p} \rangle = 0, \quad k \in [0, p-1].$$

Тоді раціональна функція

$$[\mathcal{N} \backslash \mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{D}} c_{N-k,N-m} z^k w^m,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,m}\cap\mathcal{D}} c_{N-j,N-n}\widetilde{s}_{k-j+m-n} +$$

$$+ w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{2N+p-k-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,N}\cap\mathcal{D}} c_{N-j,N-n}\widetilde{s}_{k-j+m+N-n} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{2N+p-m-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{N,m}\cap\mathcal{D}} c_{N-j,N-n}\widetilde{s}_{k+N-j+m-n},$$

а коефіцієнти $c_{j,n}, (j,n) \in \mathcal{D}^\star$ задовольняють співвідношення

$$\sum_{j+n=l} c_{j,n} = \widetilde{c}_l, \ c_{j,n} = c_{n,j},$$

має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (18) *для всіх $(j,n) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+m \le 2N+p-1\} = \mathcal{E}$.*

Теорема 4 при $p = 2N$ є певним узагальненням теореми 2 з [5]. Якщо покласти $p = N$, $\mathcal{D} = \{(k,m)\colon k+m \le N\}$, $c_{j,n} = \dfrac{\widetilde{c}_{j+n}}{2N-j-n+1}$, $N \le j+n \le 2N$, отримаємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай функція f має вигляд* (18), *а для послідовності $\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ має місце УМЗ вигляду* (19). *Припустимо, що для деякого $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+$ існує узагальнений поліном*

$$\widetilde{Y}_N = \sum_{j=N}^{2N} \widetilde{c}_j \widetilde{y}_j, \quad \widetilde{c}_{2N} \neq 0,$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle \widetilde{x}_k, \widetilde{Y}_N \rangle = 0, \quad k \in [0, N-1].$$

Тоді раціональна функція

$$[\mathcal{N} \backslash \mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{0 \le k+m \le N} \frac{\widetilde{c}_{2N-k-m}}{k+m+1} z^k w^m = \frac{1}{w-z} \sum_{p=0}^{N} \frac{\widetilde{c}_{2N-p}}{p+1} \left(w^{p+1} - z^{p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{w-z} \int_z^w \sum_{p=0}^{N} \widetilde{c}_{2N-p} t^p dt,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{p=0}^{\min\{N,k+m\}} \lambda_p(k,m) \frac{\widetilde{c}_{2N-p}}{p+1} \widetilde{s}_{k+m-p} +$$

$$+ w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-k-1} z^k w^m \sum_{p=0}^{N} \lambda_p(k) \frac{\widetilde{c}_{2N-p}}{p+1} \widetilde{s}_{k+m+N-p} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-m-1} z^k w^m \sum_{p=0}^{N} \lambda_p(m) \frac{\widetilde{c}_{2N-p}}{p+1} \widetilde{s}_{k+m+N-p},$$

до того ж

$$\lambda_p(k,m) = \begin{cases} p+1 & \textit{при} \quad 0 \le p \le \min\{k,m\}, \\ \min\{k,m\}+1 & \textit{при} \quad \min\{k,m\} < p \le \max\{k,m\}, \\ k+m+1-p & \textit{при} \quad \max\{k,m\} < p \le k+m, \end{cases}$$

$$\lambda_p(k) = \begin{cases} p+1 & \textit{при} \quad 0 \le p \le k, \\ k+1 & \textit{при} \quad k < p \le N, \end{cases}$$

має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (18) *для всіх* $(j,n) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+m \le 3N-1\} = \mathcal{E}$.

Тепер перейдемо до побудови двоточкових апроксимант типу Паде функцій вигляду (18) при $\mathcal{D} = \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+m \le N\}$ в точках $(0,0)$ та $(z_1, z_1), z_1 \ne 0$.

Очевидно, знову на підставі формули (11) $E(fQ_{\mathcal{D}} - P_{N-1,N-1}) \supset \Delta_{N-1,N-1}$. Аналогічно, для того щоб $E^{(1)}(fQ_{\mathcal{D}} - P_{N-1,N-1}) \supset \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+m \le N-1\}$, потрібно, щоб при $0 \le k+m \le N-1$ виконувалися рівності

$$z_1^{N-l-r} \sum_{(j,n) \in \Delta_{N-1,N} \cap \mathcal{D}^*} c_{j,n} \xi_{N-j,N-n}^{(l,r)} + z_1^{N-l-r} \sum_{(j,n) \in \Delta_{N,N-1} \cap \mathcal{D}^*} c_{j,n} \eta_{N-j,N-n}^{(l,r)} +$$

$$+\left\langle x_{l,r}^{(1)}, \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n}\widetilde{y}_{j+n}\right\rangle = 0, \tag{20}$$

де

$$\xi_{j,n}^{(l,r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=\max\{l,j\}}^{N-1} \binom{k}{l}\binom{N+m}{r} z_1^{k+m}\widetilde{s}_{k+m+N-j-n}, \tag{21}$$

$$\eta_{j,n}^{(l,r)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\max\{r,n\}}^{N-1} \binom{m}{r}\binom{N+k}{l} z_1^{k+m}\widetilde{s}_{k+m+N-j-n}, \tag{22}$$

$$x_{l,r}^{(1)} = \sum_{r,m=0}^{\infty} \binom{k+l}{l}\binom{m+r}{r} z_1^{k+m}\widetilde{x}_{k+m+l+r}.$$

Теорема 5. *Нехай функція f має вигляд* (18), *а для послідовності $\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ має місце УМЗ вигляду* (19) *і при цьому існує узагальнений поліном вигляду*

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{(j,n)\in\mathcal{D}^*} c_{j,n}\widetilde{y}_{j+n},$$

для якого виконуються співвідношення (20), *де $\xi_{j,n}^{(l,r)}$ і $\eta_{j,n}^{(l,r)}$ визначаються формулами* (21) *і* (22).

Тоді раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f\left(\begin{matrix}(0,0),(z_1,z_1)\\ \mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1\end{matrix}; z,w\right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{D}} c_{N-k,N-m} z^k w^m,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{(j,n)\in\Delta_{k,m}\cap\mathcal{D}} c_{N-j,N-n}\widetilde{s}_{k+m-j-n},$$

розвивається в околі точки $(0,0)$ в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду Тейлора функції f при $(k,m)\in\Delta_{N-1,N-1}=\mathcal{E}_0$, а в околі точки (z_1,z_1) в ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції f у цій точці при $(k,m)\in\in\left\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : k+m\le N-1\right\}=\mathcal{E}_1$.

Література

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – **6**. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
3. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981. – С. 16 – 56. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
4. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та багатоточкові апроксимації Паде // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 991 – 995.

5. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1035 – 1058.
6. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1166 – 1174.
7. *Abouir J., Cuyt A.* Multivariate partial Newton – Padé and Newton – Padé type approximants // J. Approxim. Theory. – 1993. – **72**, № 3. – P. 301 – 316.
8. *Antoulas A. C., Ionita A. C., Lefteriu S.* On two-variable rational interpolation // Linear Algebra and Appl. – 2012. – **436**. – P. 2889 – 2915.
9. *Akal C., Lukashov A.* Newton – Padé approximations for multivariate functions // Appl. Math. and Comput. – 2018. – **334**. – P. 367 – 374.
10. *Cuyt A., Verdonk B.* General order Newton – Padé approximants for multivariate functions // Numer. Math. – 1984. – **43**, № 2. – P. 293 – 307.
11. *Cuyt A., Tan J., Zhou P.* General order multivariate Padé approximants for pseudo–multivariate functions // Math. Comput. – 2006. – **75**, № 254. – P. 727 – 741.
12. *Jedynak R., Gilewicz J.* Approximation of smooth functions by weighted means of n-point Padé approximants // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 10. – С. 1410 – 1419.
13. *Hebhoub F. and Yushchenko L.* Padé approximants in complex points revisited // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2011. – **2011**. – Article ID 324865. – 7 p.

Одержано 27.03.19