УДК 517.925.51; 681.5.03

О. Г. Мазко, Т. О. Котов (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ І ЗВАЖЕНЕ ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

We establish necessary and sufficient conditions for the existence of dynamic regulators guaranteeing the prescribed estimation of the weighted damping level of bounded disturbances and the asymptotic stability of linear descriptor systems. An algorithm of construction of these regulators in the problems of robust stabilization and generalized H_∞-optimization is proposed for the descriptor systems with controlled and observed outputs. The main computational procedures of the algorithm are reduced to the solution of linear matrix inequalities with additional rank restrictions. The efficiency of the algorithm is demonstrated with the help of an illustrative example of descriptor stabilization system with bounded disturbances.

Встановлено необхідні й достатні умови існування динамічних регуляторів, що забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння обмежених збурень і асимптотичну стійкість лінійних дескрипторних систем. Запропоновано алгоритм побудови таких регуляторів у задачах робастної стабілізації й узагальненої H_∞-оптимізації дескрипторних систем із керованими і спостережуваними виходами. Основні обчислювальні процедури алгоритму зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Ефективність алгоритму продемонстровано на ілюстративному прикладі дескрипторної системи стабілізації з обмеженими збуреннями.

1. Вступ. Дескрипторні неперервні і дискретні системи виникають при дослідженні динаміки складних керованих об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [1 – 5]). Рівняння руху неперервних дескрипторних систем не розв'язані відносно старших похідних, тобто є диференціально-алгебраїчними. Це обумовлює складність аналітичного дослідження проблем стійкості й керування для таких систем. Відомі методи побудови та дослідження розв'язків класу лінійних дескрипторних систем базуються на застосуванні теорії канонічних форм матричних в'язок та узагальнених обернених матриць [2, 6, 7].

Сучасні напрямки досліджень лінійних і нелінійних систем керування складають методи теорії H_∞-оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги і мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних і дискретних систем керування з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень (див., наприклад, [6, 8 – 10]). У [11, 12] застосовано загальніші критерії якості, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень, обумовлених ненульовими значеннями початкового вектора. Введення вагових коефіцієнтів в узагальнених критеріях якості дає можливість встановити пріоритети між компонентами виходу, зовнішніх і початкових збурень [13 – 16]. Методи синтезу H_∞-керування базуються на використанні верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь і нерівностей (твердження типу „bounded real lemmas" [17 – 19]). Для класу лінійних дескрипторних систем аналогічні твердження встановлено у [20 – 23].

Дана робота є продовженням досліджень [13, 16], присвячених задачам синтезу стабілізуючих регуляторів для лінійних систем із керованими і спостережуваними виходами, які забезпечують бажану оцінку рівня впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів. Розглядаються зважені критерії якості дескрипторних систем щодо вектора керованого виходу і проводиться їхнє оцінювання методом квадратичних функцій Ляпунова. Запропоновано нові необхідні й достатні умови існування і відповідний алгоритм побудови зваженого H_∞-керування у вигляді динамічного зворотного зв'язку за спостережуваним виходом. Отримані умови виконання заданих верхніх оцінок для даних критеріїв якості мають вигляд лінійних матричних нерівностей (ЛМН) при додаткових рангових обмеженнях.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n\times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A; $\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\}$ — опуклий багатогранник (політоп) із вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P = \left(\int_0^\infty w^\top P w\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$.

2. Означення та допоміжні твердження. Розглянемо лінійну дескрипторну систему зі збуреннями
$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$
де $x\in\mathbb{R}^n$, $w\in\mathbb{R}^s$ і $z\in\mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, причому в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ є *регулярною*, тобто $\det F(\lambda)\not\equiv 0$ $(\lambda\in\mathbb{C})$. Канонічна форма Вейєрштрасса регулярної в'язки матриць має вигляд [7]

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array}\right], \tag{2.2}$$

де власні значення матриці A_1 утворюють спектр $\sigma(F)$, N — нільпотентна матриця індексу ν, а L і R — деякі невироджені матриці. При цьому $\rho = \operatorname{rank}\, E = r + \operatorname{rank}\, N \leq n$.

У випадку $\rho < n$ систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1w, \qquad N\dot{x}_2 = x_2 + B_2w, \qquad z = C_1x_1 + C_2x_2 + Dw, \tag{2.3}$$

де $x_1\in\mathbb{R}^r$, $x_2\in\mathbb{R}^{n-r}$,

$$x = R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = R\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \qquad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix}.$$

При цьому дана система має r скінченних *динамічних мод*, $n-\rho$ *нединамічних мод* і $\rho - r$ *імпульсивних мод* [24]. Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ при відсутності імпульсивних мод ($\rho = r$) називається *неімпульсивною*. У цьому випадку $\nu = 1$, тобто $N = 0$, і динамічна підсистема в (2.3) має вигляд

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1w, \qquad z = C_1x_1 + D_1w, \qquad x_1(0) = x_{01}, \tag{2.4}$$

де $D_1 = D - C_2B_2$.

В'язка матриць $F(\lambda)$ є *стійкою*, якщо $\sigma(F)\subset\mathbb{C}^- = \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і неімпульсивна.

Лема 2.1. *Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ є неімпульсивною тоді і лише тоді, коли існує розв'язок Z системи матричних рівнянь*

$$AZE = EZA, \qquad Z = ZEZ, \qquad E = EZE. \tag{2.5}$$

Доведення. Згідно з (2.2) застосуємо вирази

$$Z = R\begin{bmatrix} Z_0 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} L, \qquad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \qquad LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}.$$

Тоді співвідношення (2.5) можна звести до системи матричних рівнянь відносно Z_i, $i = \overline{0,3}$:

$$A_1 Z_0 = Z_0 A_1, \qquad Z_1 = N Z_1 A_1, \qquad Z_2 N = N Z_2, \qquad A_1 Z_3 N = Z_3,$$
$$Z_0 = Z_0^2 + Z_3 N Z_1, \qquad Z_1 = Z_1 Z_0 + Z_2 N Z_1,$$
$$Z_2 = Z_1 Z_3 + Z_2 N Z_2, \qquad Z_3 = Z_0 Z_3 + Z_3 N Z_2,$$
$$Z_0 = I_r, \qquad N Z_1 = 0, \qquad N Z_2 N = N, \qquad Z_3 N = 0.$$

Із нільпотентності матриці N випливає, що блоки Z_1, Z_2 і Z_3 повинні бути нульовими. Тоді, очевидно, $N = 0$. Навпаки, якщо $N = 0$, то система (2.5) має єдиний розв'язок вигляду

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega} F^{-1}(\lambda)\, d\lambda = R\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \tag{2.6}$$

де ω — замкнений контур, що охоплює спектр $\sigma(F)$ [12].

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2 [22]. *В'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою тоді і лише тоді, коли для деякої матриці X виконуються співвідношення*

$$A^\top X + X^\top A < 0, \qquad E^\top X = X^\top E \geq 0. \tag{2.7}$$

Друге співвідношення в (2.7) еквівалентне ЛМН

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.8}$$

відносно X і $S = S^\top \geq 0$, оскільки всі елементи рядків і стовпців невід'ємно визначеної матриці, які відповідають нульовим діагональним елементам, також повинні бути нульовими.

Нехай вектор збурень $w(t)$ у системі (2.1) обмежений за зваженою L_2-нормою $\|w\|_P$. Введемо критерій якості даної системи у вигляді

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{2.9}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деякі вагові матриці. Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (2.1). Для даного критерію якості використовуємо позначення J_0 або J_1, якщо відповідно $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ або $w \equiv 0$. Очевидно, що $J_0 \leq J$ і $J_1 \leq J$, причому J_1 є характеристикою підсистеми (2.4), оскільки при відсутності зовнішніх збурень $x_2 \equiv 0$.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 будемо називати *найгіршими* щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях досягається супремум в (2.9), тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + + x_0^\top X_0 x_0\big)$. Із методами знаходження таких векторів у випадку $E = I_n$ можна ознайомитися в [11, 15].

Система (2.1) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $\tau > 0$ задовольняє нерівність

$$\int\limits_0^\tau z^\top Qz dt \leq \int\limits_0^\tau w^\top Pw dt + x_0^\top X_0 x_0.$$

Дана властивість системи (2.1) залежить від вибору вагових матриць критерію якості J. Для неекспансивної системи $J \leq 1$.

Лема 2.3 [23]. *Якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН* (2.8), *і*

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.10}$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E \\ D^\top QC \end{bmatrix} = \rho. \tag{2.11}$$

Лема 2.4 [16]. *Якщо система співвідношень* (2.8), (2.10) *і $S < \gamma^2 X_0$ сумісна, то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умов* (2.11) *і*

$$X_0 = E^\top Z^\top HZE + (I_n - E^\top Z^\top) H (I_n - ZE) > 0,$$

де $H = H^\top > 0$, а Z — матриця (2.6).

Лема 2.5 [23]. *Нехай вагову матрицю X_0 задано у вигляді*

$$X_0 = E^\top HE, \qquad H = H^\top > 0. \tag{2.12}$$

Якщо система співвідношень (2.8), (2.10) *і*

$$S \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \rho, \tag{2.13}$$

сумісна, то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови (2.11).

Із даних тверджень випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (2.1) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач (див. також [16], лема 2.3). Зокрема, при виконанні необхідних і достатніх умов лем 2.3 і 2.5 відповідно маємо

$$\begin{gathered} J_0 = \inf\big\{\gamma : \Psi(X) < 0, 0 \leq E^\top X = X^\top E\big\}, \\ J = \inf\big\{\gamma : \Psi(X) < 0, 0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0\big\}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

***Зауваження* 2.1.** При виконанні умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 2.3 – 2.5, нульовий стан системи (2.1) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \qquad \Theta^\top P\Theta \le Q$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top Sx$. Це твердження доводиться за допомогою узагальненої леми про матричну невизначеність [12] (лема 3.3.1).

***Зауваження* 2.2.** Можна встановити, що за умов існування матриць X і $S = S^\top \ge 0$, які при $\gamma = J$ задовольняють співвідношення (2.8), (2.13) і матричне рівняння типу Ріккаті

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0,$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$, $Q_1 = C^\top\big(Q + QDR^{-1}D^\top Q\big)C$, $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$, структурований вектор зовнішніх збурень у вигляді лінійного зворотного зв'язку

$$w = K_0 x, \qquad K_0 = R^{-1}(B^\top X + D^\top QC),$$

і довільний вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(S - J^2 X_0)$ є найгіршими щодо критерію якості J для системи (2.1).

Лема 2.6 [18]. *Лінійна матрична нерівність*

$$A^\top XB + B^\top X^\top A < C,$$

де $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times n}$ *і* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *задані матриці, має розв'язок* X *тоді і лише тоді, коли виконується одна із таких умов*: (a) $\operatorname{rank} A = n$, $\operatorname{rank} B = n$; (b) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B = n$, $W_A^\top CW_A > 0$; (c) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} A = n$, $W_B^\top CW_B > 0$; (d) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B < n$, $W_A^\top CW_A > 0$, $W_B^\top CW_B > 0$, *де* W_A *і* W_B — *матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер* $\operatorname{Ker} \mathrm{A}$ *і* $\operatorname{Ker} \mathrm{B}$.

Лема 2.7. *Для заданих невироджених матриць* $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *довільної матриці* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *і числа* $\gamma > 0$ *еквівалентними є такі твердження*:

1) *існують матриці* $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *такі, що*

$$\widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} \ge 0, \qquad \widehat{E}\widehat{Y} = \widehat{Y}^\top \widehat{E}^\top \ge 0, \qquad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+p}, \tag{2.15}$$

де

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \qquad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix};$$

2) *виконуються умови*

$$W = W^\top \ge 0, \qquad \operatorname{rank} W = \rho + \delta, \qquad \delta = \operatorname{rank}\Delta \le p, \tag{2.16}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} E^\top X & \gamma E^\top \\ \gamma E & EY \end{bmatrix}, \qquad \Delta = \gamma^2 I_n - XY;$$

3) *для деякої матриці* $\Theta = \Theta^\top \ge 0$ *виконуються умови*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} X - \Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \qquad \operatorname{rank}\Theta \le p, \qquad EY = Y^\top E^\top \ge 0; \tag{2.17}$$

4) *для деякої матриці* $\Lambda = \Lambda^\top \geq 0$ *виконуються умови*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y - \Lambda E^\top \end{bmatrix} = n, \qquad \operatorname{rank} \Lambda \leq p, \qquad E^\top X = X^\top E \geq 0. \tag{2.18}$$

Доведення. Еквівалентність співвідношень (2.15) і (2.16) у твердженнях 1 і 2 доведено в [16]. Нехай виконується твердження 3. Із відомої формули для рангу блочної матриці випливає, що перша умова в (2.17) еквівалентна рівності $X - \gamma^2 Y^{-1} = \Theta E$ або $\Delta = -\Theta E Y$. При цьому $E^\top X = X^\top E \geq 0$, якщо $EY = Y^\top E^\top \geq 0$. Застосуємо конгруентне перетворення матриці W в (2.16):

$$T^\top W T = \begin{bmatrix} EY & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & -\gamma Y^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \det T \neq 0,$$

де $\Gamma = E^\top (X - \gamma^2 Y^{-1}) = E^\top \Theta E \geq 0$. Використовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$, за умов (2.17) маємо

$$\delta = \operatorname{rank} \Delta \leq \operatorname{rank}(\Theta_0 E) = \operatorname{rank} \Gamma \leq \delta,$$

тобто $\operatorname{rank} \Gamma = \delta$, $\operatorname{rank} W = \rho + \delta$ і $\delta \leq \operatorname{rank} \Theta \leq p$. Отже, твердження 2 є наслідком твердження 3.

Покажемо, що твердження 3 є наслідком твердження 1. Дійсно, покладемо $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$, при цьому $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top > 0$. Тоді із рівностей $XY + X_3 Y_1 = \gamma^2 I_n$ і $X_1 Y + X_2 Y_1 = 0$ випливає $\gamma^2 I_n = (X - \Theta E) Y$, тобто рангова умова (2.17). Крім того, виконуються співвідношення $EY = Y^\top E^\top \geq 0$ і $\operatorname{rank} \Theta \leq p$.

Аналогічно доводиться, що твердження 2 є наслідком твердження 4, а твердження 4 — наслідком твердження 1, при цьому $\Lambda = Y_3 Y_2^{-1} Y_3^\top$, $Y_1 = Y_3^\top E^\top$, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank} \Lambda \leq p$.

Лему 2.7 доведено.

3. Лінійна дескрипторна система з керованими і спостережуваними виходами. Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \qquad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Нас цікавлять закони керування, які понижують критерії якості типу (2.9) і забезпечують умови неекспансивності замкненої системи відносно вектора керованого виходу z. Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, будемо називати J-*оптимальними*. J_0-оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць P і Q є H_∞-*оптимальним*.

У загальному випадку керування (регулятор) будуємо у вигляді динамічного зворотного зв'язку за спостережуваним виходом

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \qquad u = U\xi + Ky, \qquad \xi(0) = 0, \tag{3.2}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, p — порядок регулятора, матриці Z, V, U і K підлягають визначенню. Побудова динамічного регулятора (3.2) формально зводиться до пошуку статичного регулятора $\widehat{u} = \widehat{K}_* \widehat{y}$ для системи керування у розширеному фазовому просторі:

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}_1 w + \widehat{B}_2 \widehat{u}, \qquad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0,$$
$$z = \widehat{C}_1 \widehat{x} + \widehat{D}_{11} w + \widehat{D}_{12} \widehat{u},$$
$$\widehat{y} = \widehat{C}_2 \widehat{x} + \widehat{D}_{21} w,$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \qquad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y - D_{22}u \\ \xi \end{bmatrix}, \qquad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times m} & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \left[C_1, 0_{k\times p}\right], \qquad \widehat{D}_{11} = D_{11}, \qquad \widehat{D}_{12} = \left[D_{12}, 0_{k\times p}\right],$$

$$\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \qquad \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times m} & 0_{p\times p} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_* = \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix}, \qquad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = \left(I_{n+p} + \widehat{K}_* \widehat{D}_{22}\right)^{-1} \widehat{K}_*.$$

Замкнена система (3.1), (3.2) має вигляд

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_* \widehat{x} + \widehat{B}_* w, \qquad z = \widehat{C}_* \widehat{x} + \widehat{D}_* w, \qquad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.3}$$

де

$$\widehat{A}_* = \widehat{A} + \widehat{B}_2 \widehat{K}_* \widehat{C}_2, \qquad \widehat{B}_* = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \widehat{K}_* \widehat{D}_{21},$$
$$\widehat{C}_* = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widehat{C}_2, \qquad \widehat{D}_* = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widehat{D}_{21}.$$

Нехай вагову матрицю X_0 у (2.9) задано у вигляді (2.12), а $\widehat{J}$ — критерій якості типу (2.9) для системи (3.3) з ваговою матрицею

$$\widehat{X}_0 = \widehat{E}^\top \widehat{H} \widehat{E}, \qquad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{3.4}$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то $\widehat{J} = J$, причому $X_0 = E^\top H E$ є першим діагональним блоком матриці $\widehat{X}_0$ і значення $\widehat{J}$ не залежить від H_1 і H_2.

Теорема 3.1. *Нехай існують матриці* X, Y, $S = S^\top \geq 0$ *і* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють співвідношення* (2.8), (2.13), (2.17) *і*

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{3.5}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y^\top C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{3.6}$$

де $L = \big[B_2^\top,\, D_{12}^\top\big]$ *і* $R = \big[C_2, D_{21}\big]$. *Тоді існує динамічний регулятор* (3.2), *при якому критерій якості* (2.9) *замкненої системи* (3.3) $J < \gamma$ *і в'язка матриць* $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ *допустима. Навпаки, якщо для деякого регулятора* (3.2) *замкнена система має критерій якості* $J < \gamma$, *в'язка матриць* $\widehat{F}_*(\lambda)$ *допустима і виконується рівність*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \widehat{E} \\ \widehat{D}_*^\top Q \widehat{C}_* \end{bmatrix} = \rho + p, \tag{3.7}$$

то система співвідношень (2.8), (2.13), (2.17), (3.5) *і* (3.6) *є сумісною.*

Доведення. На основі леми Шура [7] запишемо умови леми 2.5 для системи (3.3) у вигляді

$$\widehat{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \widehat{A}_*^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A}_* & \widehat{X}^\top \widehat{B}_* & \widehat{C}_*^\top \\ \widehat{B}_*^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_*^\top \\ \widehat{C}_* & \widehat{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \qquad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$0 \leq \widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} = \widehat{S} \leq \gamma^2 \widehat{X}_0, \qquad \operatorname{rank}\big(\widehat{S} - \gamma^2 \widehat{X}_0\big) = \rho + p. \tag{3.9}$$

Очевидно, що блочна матриця $\widehat{X}$ в (3.8) повинна бути невиродженою. Застосовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\widehat{S} = \widehat{L}^\top \widehat{L}$ в (3.9), маємо $\big[X_1, X_2\big] = L_2^\top \widehat{L}$, $\operatorname{rank}\big[X_1, X_2\big] = p \leq$ $\leq \operatorname{rank} L_2 = \operatorname{rank} X_2$, де $\widehat{L} = \big[L_1, L_2\big]$, $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top = L_2^\top L_2 > 0$. Рангове обмеження у (3.9) за умов (2.8) і (2.13) можна задовольнити шляхом вибору доповнювальних блоків H_1 і H_2 матриці $\widehat{H} > 0$ в (3.4), які не впливають на значення критерію якості $\widehat{J}$. Зокрема, якщо покласти $H_1 = \gamma^{-2} X_3^\top$ і $H_2 > \gamma^{-2} X_2$, то співвідношення (3.9) зведуться до умов (2.8) і (2.13).

Застосуємо таке перетворення шуканої матриці $\widehat{X} = \widehat{U}^\top \widetilde{X} \widehat{V}^{-1}$, де

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top & I_p \end{bmatrix}, \qquad \widehat{V} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -X_2^{-1} X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{X} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$G = X - X_3 X_2^{-1} X_1$. Тоді матричну нерівність (3.8) можна записати у вигляді

$$\widetilde{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_*^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top \widetilde{A}_* & \widetilde{X}^\top \widetilde{B}_* & \widetilde{C}_*^\top \\ \widetilde{B}_*^\top \widetilde{X} & -\gamma^2 P & \widetilde{D}_*^\top \\ \widetilde{C}_* & \widetilde{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widetilde{L}_*^\top \widehat{K}_* \widetilde{R}_* + \widetilde{R}_*^\top \widehat{K}_*^\top \widetilde{L}_* + \widetilde{\Omega} < 0,$$

де

$$\widetilde{A}_* = \widehat{U}\widehat{A}_*\widehat{V} = \widetilde{A} + \widetilde{B}_2\widehat{K}_*\widetilde{C}_2, \qquad \widetilde{B}_* = \widehat{U}\widehat{B}_* = \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2\widehat{K}_*\widehat{D}_{21},$$

$$\widetilde{C}_* = \widehat{C}_*\widehat{V} = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widetilde{C}_2, \qquad \widetilde{D}_* = D_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{D}_{21},$$

$$\widetilde{A} = \widehat{U}\widehat{A}\widehat{V} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X_2^{-1}X_3^\top & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{B}_2 = \widehat{U}\widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ X_2^{-1}X_3^\top B_2 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{C}_2 = \widehat{C}_2\widehat{V} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ -X_2^{-1}X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{B}_1 = \widehat{U}\widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ X_2^{-1}X_3^\top B_1 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{L}_* = \left[\widetilde{B}_2^\top \widetilde{X}, 0, \widehat{D}_{12}^\top\right] = \widetilde{L}\Delta_L^{-1}, \quad \widetilde{R}_* = \left[\widetilde{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0\right] = \widetilde{R}\Delta_R^{-1},$$

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_L = \begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & 0 & -G^{-1}X_3X_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_R = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} A^\top G + G^\top A & A^\top X_3X_2^{-1} & G^\top B_1 & C_1^\top \\ X_2^{-1}X_3^\top A & 0 & X_2^{-1}X_3^\top B_1 & 0 \\ B_1^\top G & B_1^\top X_3X_2^{-1} & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & 0 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Критерій існування розв'язку $\widehat{K}_*$ даної нерівності має вигляд (див. лему 2.6)

$$W_{\widetilde{R}_*}^\top \widetilde{\Omega} W_{\widetilde{R}_*} < 0, \qquad W_{\widetilde{L}_*}^\top \widetilde{\Omega} W_{\widetilde{L}_*} < 0, \tag{3.10}$$

де

$$W_{\widetilde{L}_*} = \Delta_L \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad W_{\widetilde{R}_*} = \Delta_R \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}.$$

Позначимо $\widetilde{G} = G^{-1}X_3X_2^{-1}$ і знайдемо вирази

$$\Delta_L^\top \widetilde{\Omega} \Delta_L = \begin{bmatrix} AG^{-1} + G^{-1\top}A^\top & G^{-1\top}C_1^\top & B_1 & -A\widetilde{G} \\ C_1G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} & -C_1\widetilde{G} \\ B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2 P & 0 \\ -\widetilde{G}^\top A^\top & -\widetilde{G}^\top C_1^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_R^\top \widetilde{\Omega} \Delta_R = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & A^\top X_3 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & B_1^\top X_3 & D_{11}^\top \\ X_3^\top A & X_3^\top B_1 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тоді співвідношення (3.10) наберуть вигляду

$$\begin{bmatrix} W_R^\top & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^\top & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} AG^{-1} + G^{-1\top} A^\top & G^{-1\top} C_1^\top & B_1 \\ C_1 G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} \\ \hline B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2 P \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0,$$

або, з урахуванням леми Шура, відповідно (3.5) і (3.6), де $Y = \gamma^2 G^{-1}$.

Згідно з (3.9) $E^\top G = G^\top E \geq 0$, тобто $EY = Y^\top E^\top \geq 0$, причому

$$X - \gamma^2 Y^{-1} = \Theta E, \quad \operatorname{rank} \Theta \leq p,$$

де $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top \geq 0$. Останні співвідношення зводяться до рангових умов (2.17).

Отже, якщо матриці X, Y, S і Θ знайдено із співвідношень (2.8), (2.13), (2.17), (3.5) і (3.6), то при побудові доповнювальних блоків матриці $\widehat{X}$, що задовольняє умови (3.8) і (3.9), можна використати спектральний розклад матриці Θ або її зображення $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$, де $\Theta_0 \in \mathbb{R}^{q\times n}$, при цьому $X_2 = I_q$ і $X_3 = \Theta_0$. В результаті на основі лем 2.5 і 2.6, а також еквівалентності тверджень 1 і 3 леми 2.7 можна стверджувати, що існує регулятор (3.2) порядку $p \geq q$, при якому критерій якості (2.9) замкненої системи (3.3) $J < \gamma$ і в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ є допустимою. Зворотне твердження виконується за додатковою умовою (3.7).

Теорему 3.1 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Умови теореми 3.1 у випадку $\Theta = 0$ забезпечують існування статичного регулятора $u = Ky$, при якому в'язка матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ допустима і для критерію якості (2.9) замкненої системи

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \qquad z = C_* x + D_* w,$$

де $A_* = A + B_2 K_* C_2$, $B_* = B_1 + B_2 K_* D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12} K_* C_2$, $D_* = D_{11} + D_{12} K_* D_{21}$ і $K_* = (I_m - KD_{22})^{-1} K$, виконується оцінка $J < \gamma$ (див. [16], теорема 3.1).

На основі теореми 3.1 наведемо алгоритм синтезу динамічного регулятора (3.2) для системи (3.1).

***Алгоритм* 3.1.**

1. *Обчислення матриць* W_L *і* W_R, *де* $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top\right]$, $R = \left[C_2, D_{21}\right]$.

2. *Знаходження матриць* X, Y, $S = S^\top \geq 0$ *і* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють систему співвідношень* (2.8), (2.13), (2.17), (3.5) *і* (3.6).

3. *Знаходження спектрального розкладу невід'ємно визначеної матриці* $\Theta = T^\top \Lambda T$, *де* $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, $T = [t_1, \ldots, t_q]$, λ_i *і* t_i *— ненульові власні значення і відповідні власні вектори матриці* Θ.

4. *Формування доповнювальних блоків матриці* $\widehat{X}$ *у вигляді* $X_1 = T^\top E$, $X_2 = \Lambda^{-1}$ *і* $X_3 = T$ $(p = q)$.

5. *Розв'язування ЛМН*

$$\widehat{L}_*^\top \widehat{K}_* \widehat{R}_* + \widehat{R}_*^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{L}_* + \widehat{\Omega} < 0 \tag{3.11}$$

щодо $\widehat{K}_*$ *за умови* $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$, *де*

$$\widehat{R}_* = \left[\, \widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0_{(l+p)\times k} \,\right], \qquad \widehat{L}_* = \left[\, \widehat{B}_2^\top \widehat{X}, 0_{(m+p)\times s}, \widehat{D}_{12}^\top \,\right],$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^\top \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

6. *Обчислення матриць регулятора* (3.2) *за формулою*

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{n+p} + \widehat{K}_* \widehat{D}_{22})^{-1} \widehat{K}_*.$$

Реалізація даного алгоритму забезпечує оцінку критерію якості $J < \gamma$, а також регулярність, неімпульсивність і асимптотичну стійкість замкненої системи (3.3). Ранг матриці Θ, знайденої у п. 2 алгоритму, визначає порядок динамічного регулятора p. Якщо $\Theta = 0$, то можна побудувати статичний регулятор із потрібними властивостями. У випадку $X_0 > 0$ замість рангової умови в (2.13) доцільно використати ЛМН $S < \gamma^2 X_0$. Для досягнення оцінки $J_0 < \gamma$ можна використати спрощений варіант алгоритму 3.1, у якому не використовуються співвідношення з ваговою матрицею X_0.

Зазначимо, що алгоритм 3.1 при мінімально можливих значеннях параметра γ може бути застосований при побудові наближених J-оптимальних законів керування для класу систем типу (3.1).

4. Деякі можливості узагальнення. Наведемо кілька тверджень типу лем 2.2 – 2.4 і теореми 3.1 для дескрипторних систем за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів.

За лемою 2.2 кожна в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ при

$$E \in \mathrm{Co}\{E_1, \ldots, E_{\nu_0}\}, \qquad A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\} \tag{4.1}$$

є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} < 0, \qquad E_{i_0}^\top X = X^\top E_{i_0} \geq 0, \qquad i_0 = \overline{1, \nu_0}, \quad i_1 = \overline{1, \nu_1}, \tag{4.2}$$

де E_{i_0} і A_{i_1} — вершини заданих політопів у просторі матриць $\mathbb{R}^{n\times n}$. Еквівалентність систем ЛМН (2.7) і (4.2) випливає із зображення матриць

$$A = \sum_{i_1=1}^{\nu_1} \alpha_{i_1} A_{i_1}, \qquad E = \sum_{i_0=1}^{\nu_0} \beta_{i_0} E_{i_0},$$

де $\alpha_{i_1} \geq 0,\ \beta_{i_0} \geq 0,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\nu_1} = \beta_1 + \ldots + \beta_{\nu_0} = 1$. Зазначимо, що матричні інтервали й афінні множини можна описати у вигляді політопів.

Аналогічно, якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} S & S - E_{i_0}^\top X \\ S - X^\top E_{i_0} & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i_0 = \overline{1, \nu_0}, \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} + C_{i_3}^\top Q C_{i_3} & X^\top B_{i_2} + C_{i_3}^\top Q D_{i_4} \\ B_{i_2}^\top X + D_{i_4}^\top Q C_{i_3} & D_{i_4}^\top Q D_{i_4} - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{4.4}$$

$$i_1 = \overline{1, \nu_1}, \qquad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \qquad i_3 = \overline{1, \nu_3}, \qquad i_4 = \overline{1, \nu_4},$$

то за лемою 2.3 для системи (2.1) із довільними коефіцієнтами (4.1) і

$$B \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_{\nu_2}\}, \qquad C \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_{\nu_3}\}, \qquad D \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_{\nu_4}\}$$

в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і виконується оцінка $J_0 < \gamma$. При цьому за лемою 2.4 $J < \gamma$, якщо разом з (4.3) і (4.4) виконується умова $S < \gamma^2 X_0$.

Розглянемо дескрипторну систему керування (3.1) за умов невизначеності матричних коефіцієнтів

$$\begin{aligned} A &\in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \qquad & B_1 &\in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\}, \\ C_1 &\in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\}, \qquad & D_{11} &\in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

і критерій якості (2.9) з ваговою матрицею (2.12). На основі теореми 3.1 можна встановити, що за умов існування матриць $X,\ Y,\ S = S^\top \geq 0$ і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, що задовольняють співвідношення (2.8), (2.13), (2.17) і

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} + C_1^{i_3\top} Q C_1^{i_3} & X^\top B_1^{i_2} + C_1^{i_3\top} Q D_{11}^{i_4} \\ B_1^{i_2\top} X + D_{11}^{i_4\top} Q C_1^{i_3} & D_{11}^{i_4\top} Q D_{11}^{i_4} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{4.6}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} A_{i_1} Y + Y^\top A_{i_1}^\top + B_1^{i_2} P^{-1} B_1^{i_2\top} & Y^\top C_1^{i_3\top} + B_1^{i_2} P^{-1} D_{11}^{i_4\top} \\ C_1^{i_3} Y + D_{11}^{i_4} P^{-1} B_1^{i_2\top} & D_{11}^{i_4} P^{-1} D_{11}^{i_4\top} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{4.7}$$

$$i_1 = \overline{1, \nu_1}, \qquad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \qquad i_3 = \overline{1, \nu_3}, \qquad i_4 = \overline{1, \nu_4},$$

де $R = \big[C_2, D_{21}\big]$ і $L = \big[B_2^\top,\ D_{12}^\top\big]$, існує динамічний регулятор (3.2), при якому для критерію якості (2.9) замкненої системи (3.3) з невизначеностями (4.5) виконується оцінка $J < \gamma$ і в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ є допустимою. Такий регулятор можна побудувати за допомогою ускладненого алгоритму 3.1, у п. 2 якого замість (3.5) і (3.6) розв'язується система ЛМН (4.6) і (4.7), а у п. 5 — система ЛМН типу (3.11) при всіх можливих наборах вершин політопів (4.5).

Викладені результати можна розвинути та застосувати до класу нелінійних дескрипторних систем із керованими і спостережуваними виходами

$$E\dot{x} = A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u, \qquad x(0) = x_0,$$

$$z = C_1(x)x + D_{11}(x)w + D_{12}(x)u,$$

$$y = C_2(x)x + D_{21}(x)w + D_{22}(x)u,$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями стану x в деякому відкритому й опуклому околі $\mathcal{S}_0$ нульового стану $x = 0$ (див., наприклад, [13, 25] у випадку $E = I_n$).

5. Приклад. Розглянемо систему керування (3.1) з матрицями [26]

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_{22} = 0.$$

У даному випадку $n = 4,\ m = 1,\ k = 2,\ s = 2,\ l = 1.$

Нехай критерії якості J_0 і J типу (2.9) визначені з ваговими матрицями

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X_0 = 5E^\top E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для системи без керування, згідно з (2.14), отримуємо такі значення: $J_0 = 2{,}78270$ і $J = 2{,}78533$.

Алгоритм 3.1 реалізовано за допомогою комп'ютерної системи PTC Mathcad Prime. Спочатку наближено знайдено найменше значення параметра $\gamma = 1,5$, при якому система співвідношень (2.8), (2.13), (2.17), (3.5) і (3.6) є сумісною, відповідні матриці

$$X = \begin{bmatrix} 4{,}55602 & 0 & -1{,}90889 & 0 \\ -1{,}90889 & 0 & 4{,}91959 & 0 \\ 5{,}01484 & 1{,}87960 & 3{,}22631 & -0{,}14856 \\ -3{,}72768 & -1{,}58627 & -0{,}76704 & -1{,}25203 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4{,}02596 & -2{,}47210 & 0 & 0 \\ -2{,}65983 & -0{,}89927 & 1{,}08810 & -0{,}12911 \\ -2{,}47210 & 2{,}66911 & 0 & 0 \\ 0{,}67589 & 0{,}74616 & -1{,}37858 & -1{,}63351 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 4{,}55602 & 0 & -1{,}90889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}90889 & 0 & 4{,}91959 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 3{,}26019 & -3{,}10907 & 1{,}11697 & -1{,}52252 \\ -3{,}10907 & 2{,}96502 & -1{,}05864 & 1{,}45978 \\ 1{,}11697 & -1{,}05864 & 2{,}55609 & 0{,}11989 \\ -1{,}52252 & 1{,}45978 & 0{,}11989 & 1{,}58268 \end{bmatrix} \geq 0,$$

а також доповнювальні блоки матриці $\widehat{X}$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0{,}65544 & 0 & 0{,}62515 & 0 \\ 0{,}08457 & 0 & -0{,}08450 & 0 \\ -0{,}29835 & 0 & 0{,}27625 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0{,}13436 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}41521 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}94918 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0{,}65544 & 0{,}08457 & -0{,}29835 \\ 0{,}62515 & -0{,}08450 & 0{,}27625 \\ -0{,}27740 & -0{,}89251 & 0{,}35564 \\ 0{,}32036 & -0{,}43490 & -0{,}84154 \end{bmatrix}.$$

Далі, при розв'язуванні ЛМН (3.11) знайдено матричні коефіцієнти шуканого динамічного регулятора (3.2) порядку $p = \operatorname{rank} \Theta = 3$:

$$Z = \begin{bmatrix} -2{,}08370 & -0{,}39169 & 1{,}02327 \\ -0{,}48944 & -7{,}90153 & -0{,}48605 \\ 0{,}06443 & -0{,}56449 & -7{,}14171 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} -13{,}07781 \\ -0{,}53548 \\ -0{,}69422 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -0{,}15375 & 0{,}02058 & -0{,}12741 \end{bmatrix}, \qquad K = -1,26024.$$

В результаті спектр замкненої системи (3.3)

$$\sigma(\widehat{F}_*) = \left\{-1{,}20482;\ -6{,}94203;\ -8{,}15689;\ -0{,}91160 \pm 1{,}12177i\right\},$$

відповідна в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ є регулярною, стійкою і неімпульсивною, а значення зваженого критерію якості замкненої системи $J = 1{,}45912$ не перевищує γ.

Знайдено також найгірший вектор зовнішніх збурень у вигляді зворотного зв'язку $w = \widehat{K}_0 \widehat{x}$ і найгірший початковий вектор $\widehat{x}_0$ щодо критерію якості J для замкненої системи (див. зауваження 2.2)

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_0 \widehat{x}, \quad \widehat{A}_0 = \widehat{A}_* + \widehat{B}_* \widehat{K}_0, \qquad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0.$$

При цьому скінченний спектр в'язки матриць $\widehat{F}_0(\lambda) = \widehat{A}_0 - \lambda \widehat{E}$ має вигляд

$$\sigma(\widehat{F}_0) = \left\{-0{,}00393; -6{,}7716; -8{,}50199; -0{,}46769 \pm 1{,}53525i\right\}.$$

Література

1. *Campbell S., Ilchmann A., Mehrmann V., Reis T. (Eds.).* Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks / Differential-Algebraic Equations Forum. – Springer Nature Switzerland AG, 2019. – vii + 320 p.

2. *Ilchmann A., Reis T. (Eds.)* Surveys in differential-algebraic equations III / Differential-Algebraic Equations Forum. – Springer Intern. Publ. Switzerland, 2015. – ix + 313 p.
3. *Riaza R.* Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications. – Singapore: World Sci., 2008. – 330 p.
4. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
6. *Schöps S. et al. (Eds.).* Progress in differential-algebraic equations. Deskriptor 2013 // Differential-Algebraic Equations Forum. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. – x + 208 p.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
8. *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A course in robust control theory. A convex approach. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 419 p.
9. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
10. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
11. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 6. – С. 20 – 38.
12. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **102**. – 332 с.
13. *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 3. – С. 129 – 145.
14. *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 6. – С. 78 – 93.
15. *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – **15**, № 1. – С. 88 – 99.
16. *Мазко О. Г., Котов Т. О.* Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – **15**, № 1. – С. 65 – 87.
17. *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory // SIAM Stud. Appl. Math. – Philadelphia: PA, 1994. – **15**. – 193 p.
18. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 1994. – **4**. – P. 421 – 448.
19. *Xu S., Lam J., Zou Y.* New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems // Circuits, Systems and Signal Process. – 2007. – **26**. – P. 829 – 838.
20. *Chadli M., Shi P., Feng Z., Lam J.* New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems // Asian J. Control. – 2018. – **20**, № 1. – P. 1 – 7.
21. *Gao F., Liu W. Q., Sreeram V., Teo K. L.* Bounded real lemma for descriptor systems and its application // IFAC 14th Triennial World Congress. – Beijing, P. R., China, 1999. – P. 1631 – 1636.
22. *Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* H_∞ Control for descriptor systems: a matrix inequalities approach // Automatica. — 1997. – **33**, № 4. – P. 669 – 673.
23. *Мазко О. Г.* Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 11. – С. 1541 – 1552.
24. *Bender D. J., Laub A. J.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – AC-**32**, № 8. – P. 672 – 688.
25. *Najmurrokhman A.* On solvability of output feedback nonlinear H_∞-control problem using nonlinear matrix inequalities approach // J. Electr. Eng. and Inform. Technology. – 2003. – **1**, № 1. – P. 33 – 39.
26. *Losse P.* The H_∞ optimal control problem for descriptor systems: Dissertation Dr. — Chemnitz (Germany), 2011. – 104 p.

Одержано 09.05.19