

## ДЕТЕРМІНОВАНА ДИФУЗИЯ

In this paper, we present a series of definitions and properties of lifting dynamical systems (LDS) corresponding to the notion of deterministic diffusion. We give heuristic explanations of the mechanism of formation of deterministic diffusion in LDS and the anomalous deterministic diffusion in the case of transportation in long billiard channels with spatially periodic structures and nonideal reflection law. The expressions for the coefficient of deterministic diffusion are obtained.

Наведено означення та властивості, що стосуються поняття детермінованої дифузії для одновимірних динамічних систем із ліфтом. Дано евристичні пояснення механізму виникнення детермінованої дифузії у динамічних системах із ліфтом і аномальної детермінованої дифузії при транспорті у довгих більярдних каналах із просторово-періодичним неідеальним законом відбиття. Наведено вирази для коефіцієнта детермінованої дифузії.

**1. Вступ.** Для багатьох математиків, які не знайомі з хаотичними процесами, що виникають у деяких динамічних системах (ДС) [1, 2, 6, 10, 12–14, 18, 23, 24], термін дифузії є поняттям з теорії ймовірності, пов'язаним із поняттям випадкового блукання. У них сам термін детермінованої дифузії викликає деякий подив, оскільки сприймається як об'єднання несумісних понять детермінізму і стохастики. В цій роботі за допомогою простих прикладів одновимірних ДС пояснюється механізм виникнення детермінованої дифузії і вивчаються методи кількісної характеристики таких процесів. Основні результати проанонсовано в [20].

Одновимірні ДС на всій осі з дискретним часом задаються рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

в якому дійсну функцію  $f(x)$  задано на всій осі і задано початкове значення  $x_0$  [12, 24]. Рівняння (1) визначає траєкторію  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = x$  у ДС (1) за початковим значенням  $x_0$  і виглядом функції  $f$ . Для ДС, які допускають хаотичну поведінку траєкторій, побудова всієї траєкторії, або навіть значення  $x_n$ , при великих  $n$  обумовлена певними труднощами обчислень, оскільки вони, як правило, проводяться з визначеною точністю, а наступні значення  $x_n$  нестійко залежать від зміни попередніх. Крім того, з точки зору фізики, задання початкового значення  $x_0$  відбувається з певною точністю. Тому для вивчення поведінки траєкторій при великих значеннях часу можна вивчати не еволюцію в системі (1), а створювану нею еволюцію мір, що задана на всій прямій. Якщо в початковий момент задано ймовірнісну міру  $\mu_0$ , нормовану міру, для якої міра всієї осі дорівнює 1, з щільністю  $\rho_0 : \mu_0(A) = \int_A \rho_0(x) dx$ , то за одиницю часу система (1) переводить цю міру в  $\mu_1 : \mu_1(A) = \mu_0(f^{-1}(A))$ , де  $f^{-1}(A)$  – повний прообраз множини  $A$  при відображенні  $f$ . Оператор, що переводить міру  $\mu_0$  у міру  $\mu_1$ , називається оператором Перрона–Фробеніуса. Оператор Перрона–Фробеніуса  $\mathcal{F}$  є лінійним навіть для нелінійних ДС (1) і переводить щільність  $\rho_0$  початкової міри в щільність  $\rho_1$  міри  $\mu_1$  [6]. Вивчення асимптотичної поведінки при  $n \rightarrow \infty$  щільності  $\rho_n = \mathcal{F}^n \rho_0$  зводиться до вивчення поведінки підгрупи  $\mathcal{F}^n$ . Існують приклади ДС (1) з локально розтягувальними відображеннями  $f$ , коли при  $n \rightarrow \infty$  щільності  $\rho_n$  асимптотично є гауссівськими, незалежно від вибору щільності початкової ймовірнісної міри. В цьому випадку кажуть, що в ДС (1) відбувається детермінована дифузія.

Мета цієї роботи — розглянути приклади ДС із детермінованою дифузією. Ми обмежимося розглядом так званих динамічних систем з ліфтом (ДСЛ) з кусково-лінійними функціями  $f(x)$  в ДС (1). Разом з цим у роботі описано механізм виникнення аномальної детермінованої дифузії при транспорті в довгих більярдних каналах із неідеальним просторово-періодичним законом відбиття [3].

**2. ДСЛ.** Розглянемо на всій осі ДС (1), в якій функцію  $f(x)$  задано на основному інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Функція  $s(x) = f(x) - x$  при  $x \in I_0$  має сенс величини зсуву точки  $x$  при відображенні  $f$ . Розіб'ємо всю вісь  $(-\infty, \infty)$  на інтервали, що не перетинаються,  $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ , де  $k \in \mathbb{Z}$  — цілі числа. Будемо вважати, що функцію  $f$  продовжено з інтервалу  $I_0$  на всі інтервали  $I_k$  так, що зсув точки при відображенні  $f$  на кожному інтервалі  $I_k$  такий самий, як і на  $I_0$ , тобто  $s(k+x) = f(k+x) - (k+x) = s(x) = f(x) - x$ . Це приводить до періодичності функції зсуву  $s(x)$  і періодичності з 1-ліфтом функції  $f$ :

$$f(k+x) = k + f(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

ДС (1) із функцією  $f$ , що задовольняє властивість (2), називається ДСЛ. Це відома, багато разів розглядувана ДС [6, 12, 13].

Нехай траєкторія  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  відповідає ДСЛ (1), (2). Будемо позначати номер інтервалу  $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ , якому належить число  $a \in I_k$ , таким чином:  $k = [a]$  — найближче ціле число до числа  $a$ . Тоді траєкторії  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  відповідає цілочислова послідовність  $M = ([x_0], [x_1], \dots, [x_n], \dots) = (m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$  номерів інтервалів, яким належать значення  $x_n$ . Послідовність  $M$  називається маршрутом траєкторії  $x$  — це номери інтервалів, які послідовно „відвідує” фазова точка в ДСЛ [12].

**Твердження 1.** Нехай функція  $f$ , що визначає ДСЛ (1), (2), є розтягуючою на основному інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  і, відповідно, на всіх інтервалах  $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ , тобто для всіх  $x, y \in I_k$  виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda|x - y|, \quad \lambda > 1. \quad (3)$$

Тоді траєкторія ДСЛ визначається за своїм маршрутом однозначно.

**Доведення.** Нехай два початкових значення  $x_0^{(1)}$  і  $x_0^{(2)}$  задають траєкторії ДСЛ з однаковим маршрутом. Це означає, що точки  $x_n^{(1)}$  і  $x_n^{(2)}$  належать одному інтервалу  $I_{m_n}$ . Тому відповідно до нерівності (3) і розтягуючості відображення  $f$  має місце нерівність  $|x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}| \geq \lambda|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|$ ,  $\lambda > 1$ . Оскільки будь-які дві точки з одного інтервалу  $I_{m_n}$  відрізняються менше, ніж на 1, то, послідовно застосовуючи вказану нерівність, отримуємо оцінку  $|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| \leq \frac{1}{\lambda^n}$  при будь-якому  $n$ . Оскільки  $\lambda > 1$ , це доводить, що  $x_0^{(1)} = x_0^{(2)}$ .

**Означення 1.** Якщо в ДСЛ (1), (2) будь-яка цілочислова послідовність є маршрутом деякої траєкторії, а траєкторія однозначно визначається своїм маршрутом, то кажуть, що ДСЛ має властивість Бернуллі [12].

**Твердження 2.** Якщо функція  $f$  на інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  є непарною, неперервною, монотонно зростаючою, розтягуючою, необмеженою, то, відповідно, ДСЛ (1), (2) з такою функцією  $f$  має властивість Бернуллі.

**Доведення.** Єдиність відновлення траєкторії за її маршрутом доведено вище. Нехай  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$  — будь-яка цілочислова послідовність. Розглянемо на інтервалі  $I_{m_1}$  сукупність вкладених стягваних замкнених інтервалів  $U_n$ , побудованих таким чином. Нехай  $U^{(1)}$  — замикання прообразу інтервалу  $I_{m_n}$  при відображенні  $f$ , яке лежить на  $I_{m_{n-1}}$ :  $U^{(1)} = f^{-1}(I_{m_n})$ . Через розтягваність відображення  $f$  маємо  $\text{mes } U^{(1)} \leq \lambda^{-1}$ . Нехай  $U^{(2)}$  — прообраз  $U^{(1)}$  на інтервалі  $I_{m_{n-2}}$ , за індукцією  $U^{(k)}$  — прообраз  $U^{(k-1)}$  на інтервалі  $I_{m_{n-k}}$ . Множини  $U_n = U^{(n)} \subset I_{m_1}$  і  $\text{mes } U_n \leq \lambda^n$ . Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то отримуємо на інтервалі  $I_{m_1}$  систему вкладених замкнених множин  $U_{n+1} \subset U_n$  і  $\text{mes } U_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Загальна гранична точка  $x_0$  для всіх  $U_n$  лежить на  $I_{m_1}$ , а її траєкторія  $x = (x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots)$  має маршрут  $M$ .

**3. Марковське розбиття фазового простору ДСЛ. Кусково-лінійні ДСЛ.** Систему інтервалів  $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ ,  $k \in Z$ , для ДСЛ (1), (2) можна розглядати як марковське розбиття фазового простору [12]. Розглянемо більш дрібне марковське підрозбиття. Нехай основний інтервал  $I_0$  розбито на скінченну кількість  $m$  підінтервалів  $I_{0,j} = [x_{j-1}, x_j)$ , де  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_j < x_{j+1}$ ,  $x_m = \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Цілочисловий зсув цього розбиття приводить до розбиття інтервалів  $I_k$  на підінтервали  $I_{k,j} = [k + x_{j-1}, k + x_j)$ . Таким чином, виникає розбиття всієї осі на інтервали  $\{I_{k,j}\}$ ,  $k \in Z$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

**Означення 2.** Марковське розбиття  $\{I_{k,j}\}_{k \in Z, 1 \leq j \leq m}$  всієї осі будемо називати узгодженим з ДСЛ (1), (2), якщо будь-яку ймовірнісну міру зі сталими щільностями на кожній множині  $I_{k,j} = [k + x_{j-1}, k + x_j)$  ДСЛ переводить за одиницю часу в міру, яка має на кожному інтервалі  $I_{k,j}$  сталі щільності.

**Означення 3.** Функцію  $f$ , яка визначає ДСЛ (1), (2), будемо називати узгодженою з марковським розбиттям  $\{I_{k,j}\}_{k \in Z, 1 \leq j \leq m}$ , яке визначається за допомогою чисел

$$-\frac{1}{2} = x_0, x_1, \dots, x_m = \frac{1}{2},$$

якщо на кожному інтервалі  $I_{k,j} = [k + x_{j-1}, k + x_j)$  вона є лінійною, відрізняється від константи, а на кожному із кінців інтервалу  $I_{k,j}$  має значення такого вигляду: ціле число плюс одне з чисел  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ .

**Приклад 1.** Нехай функція  $f(x) = \Lambda x$  лінійна на інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , де  $\Lambda = 2l + 1$  — непарне число. Тоді ця функція узгоджена з марковським розбиттям  $\{I_k\}_{k \in Z}$ ,  $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ .

**Приклад 2.** Нехай функція  $f(x) = \Lambda x$ , де  $\Lambda = 2l$  — парне число. Тоді ця функція узгоджена з марковським розбиттям  $\{I_{k,\pm}\}_{k \in Z}$ , де  $I_{k,+} = \left[k, k + \frac{1}{2}\right)$ ,  $I_{k,-} = \left[k - \frac{1}{2}, k\right)$ .

Важливий приклад функції, що задовольняє означення 3, містить таке твердження.

**Твердження 3.** Нехай функція  $f(x)$ , яка визначає ДСЛ (1), (2) на інтервалі  $I_0$ , є кусково-лінійною і набуває півцілих значень на кінцях кожного із своїх лінійних відрізків, а також

$f'(x) \neq 0$  майже скрізь. Тоді функція  $f$  узгоджена за означенням 3 з марковським розбиттям  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

**Доведення** випливає із перевірки умов означення 3 для точок  $\{x_j\}$  — усіх точок, в яких функція  $f$  набуває півцілих значень.

Кусково-лінійну функцію  $f$  із твердження 3 будемо називати кусково-лінійною, яка набуває півцілих значень на кінцях лінійних відрізків. Із еквівалентності означень 2 і 3 для ДСЛ випливає таке твердження.

**Твердження 4.** Для того щоб марковське розбиття  $\{I_{k,j}\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq m}$  було узгоджено з дією ДСЛ (1), (2) за означенням 2, необхідно і достатньо, щоб функція  $f$ , яка визначає ДСЛ (1), (2), була узгоджена з цим марковським розбиттям відповідно до означення 3.

**Доведення.** Покажемо, що якщо функція  $f$  задовольняє умови означення 3, то ДСЛ переводить імовірнісну міру зі сталими щільностями на  $I_{k,j}$  у міру зі сталими щільностями на  $I_{k,j}$ , тобто для ДСЛ виконуються умови означення 2. Оскільки оператор Перрона–Фробеніуса  $\mathcal{F}$  (див. [6]) є лінійним, достатньо розглянути випадок, коли щільність початкової міри є сталою на фіксованому інтервалі  $I_{k_0, j_0}$ . На ньому функція  $f(x)$  лінійна, відрізняється від константи і переводить  $I_{k_0, j_0}$  на об'єднання  $\bigcup I_{k,j}$  кількох підряд розташованих інтервалів. Тому зворотне відображення цих інтервалів лінійне і, отже, міра на кожному з них має сталу щільність.

Нехай тепер виконуються умови з означення 2. Якщо щільність початкової міри є сталою на інтервалі  $I_{k_0, j_0}$ , то при відображенні  $f$  виникає нова міра  $\mu_1$  на всій осі. Зрозуміло, що  $\text{supp } \mu_1$  збігається із замиканням деякого об'єднання інтервалів  $I_{k,j}$ , оскільки у протилежному випадку існували б інтервал  $I_{\bar{k}, \bar{j}}$  і його частина  $A$  такі, що  $\mu_1(I_{\bar{k}, \bar{j}}) = \mu_1(I_{\bar{k}, \bar{j}} \setminus A) \neq 0$ ,  $\mu_1(A) = 0$ . Це суперечить умові означення 2, що міра  $\mu_1$  має сталу щільність.

Нехай  $I_{\bar{k}, \bar{j}}$  — один з інтервалів. Оскільки  $B \subset I_{k_0, j_0}$ , то початкова міра на  $B$  має сталу щільність, а  $f$  взаємно однозначно відображає  $B$  на  $I_{\bar{k}, \bar{j}}$ , і відповідно до оператора Перрона–Фробеніуса щільність  $\rho_1(x)$  міри  $\mu_1$  на  $I_{\bar{k}, \bar{j}}$  виражається через щільність  $\rho_0$  початкової міри на  $I_{k_0, j_0}$  рівністю  $\rho_1(x) = \frac{\rho_0(x)}{|f'(x)|}$ . З цього випливає висновок, що  $f'(x) \equiv \text{const}$  на інтервалі  $B$ , і ця функція також переводить кінці інтервалу  $B$  в кінці інтервалу  $I_{\bar{k}, \bar{j}}$ . Тому функція  $f$  має властивості з означення 3.

Виникає питання: чи існують марковські розбиття всієї осі, узгоджені з лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$  при інших, ніж у прикладах 1 і 2, значеннях  $\Lambda$ ?

Оскільки лінійна функція  $f(x) = \Lambda x$  є непарною, то числа  $x_j$ , які задають узгоджуване марковське підрозбиття інтервалу  $I_0$ , симетричні відносно середини інтервалу  $I_0$ . Тому достатньо задавати лише додатні значення  $x_j$  і вказувати на парність кількості  $m$  підінтервалів  $\{I_{0,j}\}_{1 \leq j \leq m}$ , оскільки при парному  $m$  точка  $x = 0$  входить у множину  $\{x_j\}_{j=0}^m$ , а при непарному  $m$  — не входить.

Перенумеруємо всі кінці інтервалів  $\{I_{k,j}\}$ , які знаходяться на додатній осі, в порядку зростання, починаючи з першого додатного. Отримуємо послідовність  $0 < s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < \dots$ . Оскільки марковське підрозбиття  $\{I_{k,j}\}$  узгоджене з лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$ , то

$$\Lambda s_1 = s_{1+n_1}, \Lambda s_2 = \Lambda s_{1+n_1+n_2}, \dots, \Lambda s_{\hat{m}} = s_{1+n_1+n_2+\dots+n_{\hat{m}}}. \quad (4)$$

Тут  $\hat{m}$  виражається через  $m$  у вигляді  $m = 2\hat{m}$  для парних  $m$  і  $m = 2\hat{m} - 1$  для непарних. Таким чином, кожному марковському підрозбиттю осі, узгоджуваному з лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$ , яка задає ДСЛ (1), (2), відповідають дві величини: парність  $m$  кількості підінтервалів

$\{I_{0,j}\}$ , тобто  $s = (-1)^m$ , і цілочисловий вектор  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{\hat{m}})$ . Ці величини  $(s, \vec{n})$  будемо називати параметрами марковського підрозбиття  $\{I_{k,j}\}$ .

**Твердження 5.** Параметри марковського підрозбиття  $\{I_{k,j}\}$ , парність числа  $m$  і цілочисловий вектор  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{\hat{m}})$  однозначно визначають величину нахилу  $\Lambda$  лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$ , що узгоджується з марковським підрозбиттям  $\{I_{k,j}\}$ , і сукупність чисел  $\{s_j\}_{j=1}^{\hat{m}}$ , які задають кінці інтервалів  $I_{k,j} = [k + s_j, k + s_{j+1})$  цього підрозбиття.

**Доведення.** Нехай число компонент вектора  $\vec{n}$  дорівнює  $\hat{m}$ . Тоді кількість  $m$  підінтервалів  $\{I_{0,j}\}$  у марковському підрозбитті визначається рівністю  $m = 2\hat{m}$  для парних  $m$  і  $m = 2\hat{m} - 1$  для непарних (парність  $m$  задано величиною  $s = (-1)^m$ ). Завжди  $s_{\hat{m}} = \frac{1}{2}$ . Для непарних  $m$  послідовність  $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$  має вигляд  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}+1}, \frac{1}{2}, 1 - s_{\hat{m}-1}, 1 - s_{\hat{m}-2}, \dots, 1 - s_1, 1 + s_1, 1 + s_2, \dots, 1 + s_{\hat{m}-1}, \frac{3}{2}, 2 - s_{\hat{m}-1}, \dots$  і явно виражається через  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}} = \frac{1}{2}$ . Це дозволяє кожний член послідовності  $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$  явно виразити через ціле число й одне з чисел  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}}$ . Тому рівності (4) перетворюються в лінійну систему відносно  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}}$  із коефіцієнтами, що є цілими числами або величиною  $\Lambda$ . Умова сумісності цієї системи приводить до рівності нулю визначника цієї системи, що в свою чергу приводить до алгебраїчного рівняння для  $\Lambda$ :

$$R_{\vec{n}}(\Lambda) = 0.$$

Після знаходження  $\Lambda$  всі  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}}$  визначаються однозначно із системи (4). Аналогічно розглядається випадок парних  $m$ , коли послідовність  $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$  має вигляд  $s_1, s_2, \dots, s_{\hat{m}} = \frac{1}{2}, 1 - s_{\hat{m}-1}, 1 - s_{\hat{m}-2}, \dots, 1 - s_1, 0, 1 + s_1, 1 + s_2, \dots$ .

Наведемо реалізацію цієї схеми в наступному конструктивному прикладі.

**Твердження 6.** Лінійна функція  $f(x) = \Lambda x$ , яка визначає ДСЛ (1), (2), буде узгодженою з марковським розбиттям

$$\left\{ \left[ k - \frac{1}{2}, \xi \right), [k - \xi, k + \xi), \left[ k + \xi, k + \frac{1}{2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

якщо для цілих чисел  $0 < m < n$  і значень  $\varepsilon_1 = \pm 1$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$  мають місце рівності

$$\Lambda = \frac{2n + \varepsilon_2 + \sqrt{(2n - \varepsilon_2)^2 + 8m\varepsilon_1}}{2},$$

$$\xi = \frac{2m}{2n - \varepsilon_2 + \sqrt{(2n - \varepsilon_2)^2 + 8m\varepsilon_1}}.$$

**Доведення** випливає із рівностей (4), які мають вигляд

$$\Lambda \xi = m + \varepsilon_2 \xi, \quad \frac{\Lambda}{2} = n + \varepsilon_1 \xi.$$

Зазначимо, що множина значень нахилу  $\Lambda$  для лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$ ,  $x \in I_0 = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , для яких існує марковське розбиття, що узгоджене з ДСЛ (1), (2), скрізь щільна на півосі  $(2, \infty)$  [6, 13].

**4. Детермінована дифузія.** Розглянемо ДСЛ (1), (2), сукупність інтервалів якої  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $I_k = \left[ k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right)$ , утворює марковське розбиття фазового простору, яке узгоджене з дією ДСЛ. Це означає, що міру  $\mu_0$  з одиничною щільністю на інтервалі  $I_0$  ДСЛ за одиницю часу переводить у ймовірнісну міру зі сталими щільностями  $p_k \geq 0$  на інтервалах  $I_k$ , а  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1$ . Багатократне застосування дії ДСЛ переводить початкову міру  $\mu_0$  у міру зі сталими щільностями на інтервалах  $I_k$ . Нехай  $P_k(n)$  — щільність міри на інтервалі  $I_k$  після  $n$ -кратного застосування ДСЛ до початкової міри  $\mu_0$ . Тоді

$$P_k(n+1) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-l} P_l(n), \quad (5)$$

а  $P_k(0) = \delta_{k,0}$  внаслідок вибору початкової міри  $\mu_0$ . Асимптотичну поведінку величин  $P_k(n)$  при великих  $n$ , як розв'язок рівняння (5), описує відома центральна гранична теорема з теорії ймовірностей [7, 9]. Дійсно, розглядаючи суму  $n$  незалежних випадкових величин  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ , кожна з яких набуває лише цілих значень  $k$  з ймовірністю  $p_k$ , приходимо до рівняння (5), де  $P_k(n)$  — ймовірність того, що  $\xi$  набуває значення  $k$ .

**Теорема 1.** *Нехай числа  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  набувають невід'ємних значень, так що  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1$ , а найбільший спільний дільник чисел  $k$  з  $p_k > 0$  дорівнює 1, та існують перший і другий моменти:*

$$\sigma_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k p_k, \quad \sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 p_k. \quad (6)$$

Тоді розв'язок рівняння (5) при  $n \rightarrow \infty$  має рівномірну по  $k$  асимптотику

$$P_k(n) - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(x-\xi_n)^2}{2\sigma^2 n}} \rightarrow 0. \quad (7)$$

Характер збіжності у формулі (7) залежить від додаткових умов, наприклад існування третього моменту (теорема Лапласа).

**Доведення.** Наведемо стисло відому схему доведення теореми 1, яка ґрунтується на тому факті, що рівняння (5) є різницевим аналогом рівняння згортки. Перехід до перетворення Фур'є зводить згортку до добутку. Нехай  $P(\lambda, n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k(n) e^{ik\lambda}$  — характеристична функція для розв'язку рівняння (5), а  $P(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\lambda}$ . Тоді з рівняння (5) отримуємо

$$P(\lambda, n) = [P(\lambda)]^n P(\lambda, 0). \quad (8)$$

Таким чином, оскільки початкова міра зосереджена на  $I_0$  зі сталою щільністю, то  $P(\lambda, 0) = 1$  і

$$P_k(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(\lambda)]^n e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (9)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  маємо

$$P(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\lambda} = 1 + i\sigma_1 \lambda - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + o(1) = e^{i\sigma_1 \lambda - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}} + o(1).$$

Тому

$$[P(\lambda)]^n = e^{i\sigma_1 n \lambda - \frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}} + o(1).$$

Підставляючи це значення в (9) і переходячи до інтегрування по всій осі, отримуємо (7).

Близькість двох імовірнісних мір  $\mu$  і  $\nu$  на осі з щільностями  $p(x)$  і  $q(x)$  часто визначають величиною  $d(\mu, \nu)$  рівномірного по  $x$  відхилення функцій розподілів:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(s) ds = \mu((-\infty, x)),$$

$$Q(x) = \int_{-\infty}^x q(s) ds = \nu((-\infty, x)),$$

тобто

$$d(\mu, \nu) = \sup_x |P(x) - Q(x)|. \quad (10)$$

**Означення 4.** Будемо казати, що дві послідовності мір  $\mu_n$  і  $\nu_n$  асимптотично при  $n \rightarrow \infty$  еквівалентні, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu_n, \nu_n) = 0$ . В цьому випадку, якщо міри  $\nu_n$  нормальні з дисперсією  $\sigma_n^2$  і середнім  $\xi_n$ , тобто щільність мір виражається кривою Гаусса

$$q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(x-\xi_n)^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (11)$$

будемо казати, що послідовність мір  $\mu_n$  асимптотично при  $n \rightarrow \infty$  нормальна. Якщо, крім цього,  $\frac{1}{2}\sigma_n^2 = Dn$ , то будемо казати, що послідовність мір  $\mu_n$  визначає нормальну дифузю з коефіцієнтом дифузії  $D$ . У випадку, коли дисперсія  $\sigma_n^2$  нелінійно залежить від  $n$ , детермінована дифузія є аномальною.

Висновок теореми 1 для ДСЛ можна пояснити таким чином. Початкову міру з одиничною щільністю на інтервалі  $I_0$  можна інтерпретувати як випадкове задання в ДСЛ початкових даних  $x_0$  із рівномірним розподілом на інтервалі  $I_0$ . Тоді при великих значеннях часу  $n \rightarrow \infty$  положення  $x_n$  будуть випадково розподілені за нормальним законом із середнім значенням  $\xi_n$  і дисперсією  $\sigma_n^2$ . Іншими словами, у цьому випадку має місце детермінована дифузія з коефіцієнтом дифузії  $D = \frac{\sigma_n^2}{2n}$ . Вивчення цього феномена є нашою найближчою задачею. Переформулюємо теорему 1 для ДСЛ (1), (2) з кусково-лінійною функцією  $f$ .

**Теорема 2.** Нехай функція  $f$ , яка задає ДСЛ (1), (2), є кусково-лінійною і набуває на кінцях усіх максимальних сегментів лінійності різних півцілих значень. Нехай існує  $i$  є скінченним значення величини

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{24}. \quad (12)$$

Тоді початкова міра  $\mu_0$  із одиничною щільністю на інтервалі  $I_0$  після  $n$  ітерацій, згідно з ДСЛ, асимптотично переходить у міру з нормальним розподілом і коефіцієнтом дифузії  $D$ .

**Доведення.** З огляду на теорему 1 і твердження 3 потрібно показати, що

$$\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 p_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{12}. \quad (13)$$

В цьому легко переконатися, оскільки інтеграл для кусково-лінійної функції  $f$  легко обчислюється. Якщо функція  $f(x)$  є лінійною на інтервалі  $[a, b]$  і на кінцях цього інтервалу набуває значень  $k - \frac{1}{2}$ ,  $k + \frac{1}{2}$ , то

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) (b - a).$$

Величина  $p_k = \mu_1(I_k) = \mu_0(f^{-1}(I_k))$  множини  $f^{-1}(I_k) \cap I_0$  складається із підінтервалів  $I_{0,j}$  інтервалу  $I_0$ , на яких функція  $f(x)$  набуває значень із інтервалу  $\left[j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$ . Тому

$$\int_{f^{-1}(I_k) \cap I_0} |f(x)|^2 dx = \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) \sum \mu_0(I_{0,j}) = \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) p_k.$$

Підсумовуючи по  $k$ , отримуємо

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) p_k,$$

що еквівалентно рівності (13).

**Приклад 3.** Нехай  $f(x) = \Lambda x$ , де  $\Lambda$  — додатне число. Функція  $f$  задовольняє умову теореми 2 тоді і лише тоді, коли  $\Lambda$  — непарне число і  $\Lambda > 1$ . Із формули (12) випливає, що  $D = \frac{1}{24} (\Lambda^2 - 1)$ , і це збігається з відомою формулою (наприклад, формулою (24.28) із [6]).

**Приклад 4** (зигзаг відображення). Розглянемо неперервну, непарну, кусково-лінійну функцію  $f$  на відрізку  $[-1/2, 1/2]$ , яка набуває в точці  $\xi$  півцілого значення  $f(\xi) = p + 1/2$ ,  $0 < \xi < 1/2$ . Нехай  $f(0) = 0$  і  $f(1/2) = 1/2$ . Тоді згідно з формулою (12) коефіцієнт дифузії має вигляд

$$D = \frac{p+1}{12} (2p+1-2\xi).$$

Це відомий результат (див. роботу [16] і наведену в ній бібліографію).

Теореми 1 і 2 дозволяють дати таке означення детермінованої дифузії для ДС (1).

**Означення 5.** Будемо казати, що *одновимірна ДС (1) має детерміновану дифузю, якщо для будь-якої початкової ймовірнісної міри  $\mu_0$  з обмеженою щільністю знайдуться послідовності чисел  $\sigma_n^2 > 0$  і  $\xi_n$  такі, що послідовність мір  $\mu_n = F^n \mu_0$ , яку отримуємо із початкової при  $n$ -кратній дії ДС, асимптотично еквівалентна при  $n \rightarrow \infty$  послідовності нормальних мір із дисперсіями  $\sigma_n^2$  і середнім значенням  $\xi_n$ .*



Основною проблемою в детермінованій дифузії для ДС є встановлення факту її існування в термінах функції  $f$ , яка задає ДС (1). Важливою, особливо з прикладної точки зору, є побудова ефективного алгоритму визначення коефіцієнта детермінованої дифузії  $D$  і зсуву  $\xi_n$ . На сьогодні отримано ряд формульних виразів і розроблено числові методи вивчення залежності коефіцієнта дифузії від вигляду функції  $f$ . Зауважимо, що навіть для лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$  на інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  коефіцієнт детермінованої дифузії для ДСЛ (1), (2) залежить від  $\Lambda$  складним, ніде недиференційовним фрактальним чином [6, 13]. Наведемо евристичні міркування, чому існує детермінована дифузія для ДСЛ у випадку лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$ ,  $\Lambda > 2$ , на інтервалі  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . У цьому випадку ДСЛ (1), (2) можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = x_n + (\Lambda - 1)\{x_n\}, \quad (14)$$

де  $[x] = k$  — найближче ціле число до числа  $x \in I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ , а  $\{x\} = x - [x]$  — локальна координата числа  $x$  на інтервалі  $I_k$ . Рівняння (14) можна подати в еквівалентній формі

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=1}^n (\Lambda - 1)\{x_k\}. \quad (15)$$

Якщо відображення  $f$  є розтягуючим, тобто  $\Lambda > 2$ , а початкове значення  $x_0$  на інтервалі  $I_0$  має деяку щільність імовірності (наприклад, стали), то величини  $\{x_k\}$ , подібно до дробових частин  $x_k$ , можна вважати рівномірно розподіленими на інтервалі  $I_0$  і незалежними при різних  $k$ . Строге обґрунтування рівномірності розподілу дробових частин при довільних розтягуючих відображеннях наведено в [10]. Величини  $x_n$  можна відповідно до рівності (15) розглядати як суму  $x_0$  і  $n$  незалежних однаково розподілених випадкових величин. Тому, згідно з центральною граничною теоремою, величини  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$  розподілені за нормальним законом із нульовим середнім значенням і дисперсією, рівною сумі дисперсій доданків. Оскільки дисперсія рівномірно розподіленої величини на інтервалі  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  дорівнює

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12},$$

то  $\sigma^2(x_{n+1}) = \frac{(\Lambda - 1)^2}{12}$ . Це приводить до наближеної формули для коефіцієнтів дифузії  $D = \frac{(\Lambda - 1)^2}{24}$  для будь-якого лінійного відображення  $f(x) = \Lambda x$  в ДСЛ (1), (2).

Перейдемо тепер до випадку, коли марковське підрозбиття відповідає ДСЛ за означенням 2. У цьому випадку щільності на кожному підінтервалі  $I_{k,j}$  інтервалу  $I_k$ ,  $k \in Z$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , при  $n$  ітераціях будемо позначати через  $P_{k,j}(n)$ . Якщо розглядати сукупність величин  $P_{k,j}(n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , як компоненти вектора  $P_k(n) = \text{col} \left( P_{k,1}^{(n)}, \dots, P_{k,m}^{(n)} \right)$ , то справедливим є аналог рівняння (5), де величини  $P_k(n)$  — вектори,  $P_k = \{p_{k,i,j}\}_{i,j=1}^m$  — матриця переходу, яка

відповідає оператору Перрона–Фробеніуса,  $p_{k,i,j}$  — щільність міри на  $I_{k,i}$  при одноразовому застосуванні ДСЛ до міри з одиничною щільністю на  $I_{k,j}$ . Такий векторний аналог рівняння (5) також добре вивчено в літературі. Розв’язок  $P_k(n)$  приводить до нормального розподілу в  $m$ -вимірному просторі [5, 7].

**Теорема 3.** Нехай марковське підрозбиття  $\{I_{k,j}\}_{k \in Z, 1 \leq j \leq m}$  осі узгоджене з дією ДСЛ (1), (2), а функція  $f(x)$  є розтягуючою і переводить інтервал  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  у скінченний інтервал  $[a, b)$  довжини більше ніж 2. Тоді початкова ймовірнісна міра  $\mu_0$  на  $I_0$  зі сталими щільностями на  $I_{0,j}$  після  $n$ -кратної дії ДСЛ переходить у міру  $\mu_n$ , асимптотично при  $n \rightarrow \infty$  еквівалентну нормальній мірі зі щільностями  $P_{k,j}(n)$  на інтервалах  $I_{k,j}$ :

$$P_{k,j}(n) = \frac{\alpha_j}{2\sqrt{\pi D n}} e^{-\frac{(k-\xi n)^2}{4Dn}}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

де  $\xi_n$  — зсув,  $D$  — коефіцієнт детермінованої дифузії, а параметри  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , визначають розподіл щільностей на підінтервалах  $I_{k,j}$  інтервалів  $I_k$ ,  $k \in Z$ .

**Доведення.** Як зазначено вище, вектори  $P_k(n) = \text{col}(P_{k,1}(n), \dots, P_{k,m}(n))$  задовольняють рівняння

$$P_k(n+1) = \sum_j P_j P_{k-j}(n), \quad (17)$$

де матриця  $P_j$  виражається через трансляційні матриці в розглядуваній ДСЛ. Зауважимо, що матриця  $E = \sum_j P_j$  еквівалентна стохастичній незвідній матриці  $DED^{-1}$ , де  $D$  — діагональна матриця з довжинами підінтервалів  $I_{0,1}, \dots, I_{0,m}$  на діагоналі. Перехід до перетворення Фур’є переводить рівняння (17) у різницеве рівняння

$$P(\lambda, n+1) = P(\lambda)P(\lambda, n), \quad (18)$$

де матриця  $P(\lambda) = \sum_j P_j e^{ij\lambda}$ , а вектор  $P(\lambda, n) = \sum_k P_k(n) e^{ik\lambda}$ . Розв’язок рівняння (18) явно виражається через власні значення і власні вектори (а також приєднані вектори у випадку кратності власних значень) матриці  $P(\lambda)$ . Якщо  $z(\lambda)$  — найбільше власне значення матриці  $P(\lambda)$  (воно однократне), то при  $n \rightarrow \infty$  розв’язок рівняння (18) можна записати у вигляді

$$P(\lambda, n) = z^n(\lambda)\alpha(\lambda) + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

де  $\alpha(\lambda)$  — власний вектор матриці  $P(\lambda)$ , що відповідає власному значенню  $z(\lambda)$ . Зауважимо, що  $z(\lambda) = e^{i\sigma_1\lambda - D\lambda^2} + o(1)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , а вектор  $\alpha(0)$  має всі додатні компоненти. Застосовуючи обернене перетворення Фур’є, з рівності (19) отримуємо (16), де  $\sigma_1 = -i \left. \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$  —

швидкість зсуву  $\xi_n = \sigma_1 : n$ , а  $D = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 z(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} - \frac{1}{2} \sigma_1^2$ .

**Зауваження 1.** Із теореми 3 можна отримати в явному вигляді „параметричну” залежність  $D$  від  $\Lambda$  для лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$ , яка задає ДСЛ. У цьому випадку параметрами є характеристики  $(s, \vec{n})$  узгодженого з ДСЛ марковського підрозбиття  $\{I_{k,j}\}$ , тобто парність  $m$  і цілочисловий вектор  $\vec{n}$ . За цими параметрами можна явно побудувати поліноми  $R_{\vec{n}}(x)$ ,  $P_{\vec{n}}(x)$ ,  $Q_{\vec{n}}(x)$  з цілочисловими коефіцієнтами так, що нахил  $\Lambda$  буде найбільшим нулем полінома  $R_{\vec{n}}(x)$ , тобто  $R_{\vec{n}}(\Lambda) = 0$  (див. твердження 5), а  $D = \frac{P_{\vec{n}}(\Lambda)}{Q_{\vec{n}}(\Lambda)}$ .

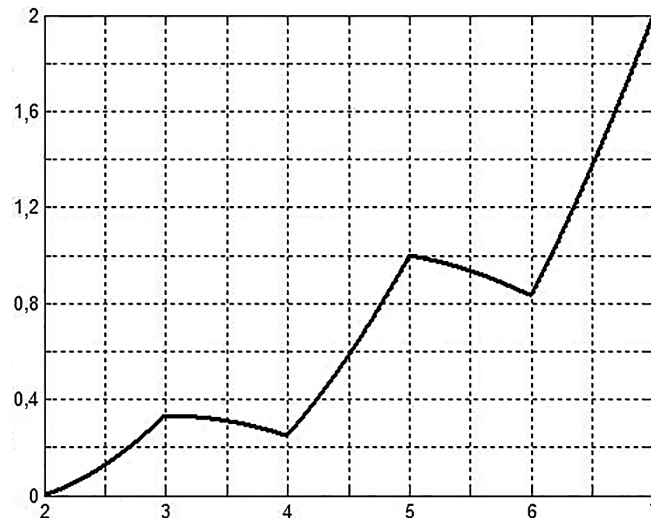
**Приклад 5.** Розглянемо випадок ДСЛ із лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$ ,  $\Lambda = 2s$  — парне число. В цьому випадку марковське підрозбиття  $I_k$  побудоване із двох півінтервалів  $I_{k,+} = \left[ k, k + \frac{1}{2} \right)$  і  $I_{k,-} = \left[ k - \frac{1}{2}, k \right)$ . Якщо перші компоненти векторів відносити до інтервалів  $I_{k,+}$ , а другі — до  $I_{k,-}$ , то  $p_0 = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_j = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_s = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{-j} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_{-s} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s-1$ . У цьому випадку характеристична функція  $P(\lambda, n) = \sum_k P_k(n) e^{i\lambda k}$  є векторнозначною, а

$$P(\lambda) = \sum_j p_j e^{ij\lambda} = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} s}{2s \sin \frac{\lambda}{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\lambda}{2}(s-1)} & e^{-i\frac{\lambda}{2}(s+1)} \\ e^{i\frac{\lambda}{2}(s+1)} & e^{-i\frac{\lambda}{2}(s-1)} \end{pmatrix}.$$

Матриця  $P(\lambda)$  має нульовий детермінант, а слід  $\text{sp } p(\lambda) = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} s}{s \sin \frac{\lambda}{2}} \cos \frac{\lambda}{2} (s-1)$ . Тому нетривіальне власне значення  $z(\lambda)$  матриці  $P(\lambda)$  збігається зі слідом матриці  $P(\lambda)$ . Це приводить до явного, відомого виразу для коефіцієнта дифузії при парних  $\Lambda = 2s$  (див., наприклад, [6], (24.27))

$$D = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \text{sp } p(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{(\Lambda-1)(\Lambda-2)}{24}. \quad (20)$$

Формули із прикладу 3 і (20) для коефіцієнта детермінованої дифузії у випадку лінійної функції  $f(x) = \Lambda x$  із цілим  $\Lambda$  показують, що  $D(\Lambda)$  монотонно залежить від  $\Lambda$ . При збільшенні  $\Lambda$ , тобто при збільшенні розтягування відображення  $f(x)$ , коефіцієнт  $D(\Lambda)$  детермінованої дифузії збільшується. Але якщо порівняти формули для парних і непарних  $\Lambda$ , то, наприклад, при  $\Lambda = 3$  коефіцієнт дифузії  $D_3 = \frac{1}{3}$ , а при  $\Lambda = 4$  коефіцієнт  $D_4 = \frac{1}{4}$ . Тобто, на перший погляд, з позиції інтуїції відповідь як мінімум є дивною. Розглянемо це питання більш детально. Нехай початкова ймовірнісна міра рівномірно розподілена на інтервалі  $\left[ \frac{3}{2}, 2 \right)$ , тобто її щільність стала і дорівнює 2. При одноразовій дії ДСЛ при відображенні з  $\Lambda = 3$  отримуємо міру зі сталою щільністю на інтервалі  $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right)$ , а при  $\Lambda = 4$  — на інтервалі  $[0, 2)$ . Звичайно, дисперсія міри зі сталою щільністю на інтервалі  $[0, 2)$  більша за дисперсію міри на інтервалі  $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right)$ , що збігається з нашим інтуїтивним припущенням — більше розтягування призводить до більшої дисперсії. Так само буде, якщо початкова міра має сталу щільність на інтервалі  $\left[ -2, -\frac{3}{2} \right)$ . Відображення згідно з ДСЛ при  $\Lambda = 3$  приводить до міри на інтервалі  $\left[ -2, -\frac{1}{2} \right)$  зі сталою щільністю, а відображення з  $\Lambda = 4$  — до міри зі сталою щільністю на інтервалі  $[-2, 0)$ . Але якщо початкова ймовірнісна міра має сталу щільність на об'єднанні інтервалів  $\left[ -2, -\frac{3}{2} \right) \cup \left[ \frac{3}{2}, 2 \right)$ , то, використовуючи лінійність оператора Перрона–Фробеніуса при  $\Lambda = 3$ , отримуємо міру на

Рис. 1. Графік функції  $D(\Lambda)$ .

об'єднанні інтервалів  $A_3 = \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ , а при відображенні з  $\Lambda = 4$  міра буде мати сталу щільність на інтервалі  $A_4 = [-2, 2]$ . Звичайно, дисперсія ймовірнісної міри на  $A_3$  більша, ніж дисперсія на  $A_4$ . Таким чином, більша розтягуваність не завжди призводить до більшої дисперсії. **Якщо розтягування направлено в бік розташування середнього значення, то дисперсія зменшується.**

Формули для значень  $D$  при парних і непарних  $\Lambda$  можна об'єднати в один вираз і поширити на всі  $\Lambda$ , якщо ввести функцію  $\omega(\Lambda)$  :

$$D(\Lambda) = \frac{1}{24} (\Lambda - 1)(\Lambda - \omega(\Lambda)), \quad (21)$$

де функція  $\omega(\Lambda)$  набуває значення 2 при парних  $\Lambda$  і значення  $-1$  при непарних. Для довільних  $\Lambda$  функція  $\omega(\Lambda)$  складним фрактальним чином залежить від  $\Lambda$ , оскільки такою є залежність  $D$  від  $\Lambda$  (див. [6, 13]). Наближено можна вважати, що  $\omega(\Lambda) - 2$ -періодична функція і  $\omega(\Lambda) = 2 - 3|\Lambda - 4|$  при  $\Lambda \in [3, 5]$ . Графік функції  $D(\Lambda)$  зображено на рис. 1.

**Приклад 6.** Розглянемо ДСЛ вигляду (1), (2), де функція  $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$ . Легко бачити, що така ДСЛ узгоджена з марковським підрозбиттям, як у прикладі 5. У цьому випадку матриця  $P(\lambda)$  має вигляд  $P(\lambda) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 1 + e^{-i\lambda} \\ e^{i\lambda} + e^{2i\lambda} & 1 \end{pmatrix}$ , а власне число  $z(\lambda)$  для цієї матриці  $P(\lambda)$  задовольняє рівняння

$$9z^2 - 3z(1 + e^{i\lambda}) - e^{2i\lambda} - e^{i\lambda} - 1 = 0.$$

Із цього рівняння отримуємо  $z(0) = 1$ ,  $z'(0) = \frac{i}{2}$ ,  $z''(0) = -\frac{13}{24}$ . Тоді швидкість зсуву  $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ ,  $D = \frac{7}{48}$ . Власний вектор матриці  $P(0)$  має однакові компоненти  $a_1 = a_2 = 1$ . В цьому випадку справедливою є формула (16) зі вказаними значеннями параметрів.

**Приклад 7.** Розглянемо ДСЛ вигляду (1), (2), де функція  $f(x) = 2x$  при  $-\frac{1}{2} < x < 0$  і  $f(x) = \Lambda x$  при  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $\Lambda = 1 + \sqrt{2}$ . Ця ДСЛ узгоджена із марковським підрозбиттям

осі інтервалами  $I_{k,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , яке має вигляд  $I_{0,1} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $I_{0,2} = \left[0, \frac{1}{2}\Lambda^{-1}\right)$ ,  $I_{0,3} = \left[\frac{1}{2}\Lambda^{-1}, \frac{1}{2}\right)$ , оскільки  $\Lambda$  задовольняє рівняння  $\Lambda^2 - 2\Lambda - 1 = 0$ . Матриця має вигляд  $P(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \Lambda^{-1}e^{i\lambda} \\ \frac{1}{2}e^{-i\lambda} & \Lambda^{-1} & \Lambda^{-1}e^{i\lambda} \\ \frac{1}{2}e^{-i\lambda} & \Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . Власне значення  $z(\lambda)$  для матриці  $P(\lambda)$  задовольняє рівняння

$$z^3 - z^2 \left(\frac{1}{2} + \Lambda^{-1}\right) + \frac{1}{2} \Lambda^{-2} e^{i\lambda} - \Lambda^{-2} z e^{i\lambda} = 0.$$

Із цього рівняння шляхом диференціювання отримуємо

$$z'(0) = -\frac{i}{2} \Lambda^{-2}, \quad z''(0) = -\frac{3(3\Lambda + 2)}{4\Lambda^4}.$$

Тому швидкість зсуву  $\sigma_1 = \frac{1}{2} \Lambda^{-2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \approx 0,09$ , а коефіцієнт детермінованої дифузії  $D = -\frac{1}{2} z''(0) - \frac{1}{2} \xi^2 = \frac{9\Lambda + 5}{8\Lambda^4} \approx 0,098$ . Власний вектор матриці  $P(0)$ , який відповідає власному значенню  $z(0) = 1$ , має компоненти  $\alpha_1 = \frac{2}{\Lambda} \approx 0,82$ ,  $\alpha_2 = \Lambda - 1 \approx 1,41$ ,  $\alpha_3 = 1$ . Для асимптотичного розподілу щільності міри справедливою є формула (16).

Розглянемо ДСЛ вигляду (1), (2) з лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$ , де число  $\Lambda$  близьке до 2, коли коефіцієнт детермінованої дифузії набуває малих значень.

**Теорема 4.** Нехай  $\Lambda$  — найбільший нуль рівняння

$$\Lambda^{m+1} - 2\Lambda^m - 1 = 0, \quad (22)$$

де  $m \geq 1$  — задане ціле число. Тоді це рівняння має єдиний розв'язок  $\Lambda > 2$ , при великих  $m$  наближено зображуваний у вигляді  $\Lambda \approx 2 + \left(2^m + \frac{m}{2}\right)^{-1}$ . ДСЛ вигляду (1), (2) з лінійною функцією  $f(x) = \Lambda x$ , де число  $\Lambda$  — найбільший нуль рівняння (22), узгоджена з марковським розбиттям осі  $I_{k,j}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2m + 1$ , де

$$\begin{aligned} I_{k,j} &= [k - \Lambda^{m+1-j}\xi, k - \Lambda^{m-j}\xi), \\ I_{k,m+1+j} &= [k + \Lambda^{j-1}\xi, k + \Lambda^j\xi), \quad j = 1, \dots, m, \\ I_{k,m+1} &= [k - \xi, k + \xi), \quad \xi = \frac{1}{2}(\Lambda - 2), \quad \Lambda^m \xi = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ця ДСЛ породжує детерміновану дифузії без зсуву, а коефіцієнт детермінованої дифузії має вигляд

$$D = \frac{\Lambda - 1}{2(\Lambda^{m+1} + m)}. \quad (24)$$

**Доведення.** Легко перевірити, що вказане марковське підрозбиття узгоджене з дією ДСЛ. Дійсно, міра зі сталою щільністю  $\alpha_{m+1}$  на інтервалі  $I_{0,m+1} = [-\xi, \xi)$  переходить на інтервал  $[-\Lambda\xi, \Lambda\xi) = I_{0,m} \cup I_{0,m+1} \cup I_{0,m+2}$  зі сталою щільністю  $\frac{1}{\Lambda} \alpha_m$ . Міра зі сталою щільністю  $\alpha_{m+j}$  на інтервалі  $[\Lambda^{j-1}\xi, \Lambda^j\xi)$  переходить у міру на інтервалі  $I_{0,m+1+j}$ , якщо  $j < m$ . Міра на інтервалі  $I_{0,2m+1} = \left[\Lambda^{m-1}\xi, \frac{1}{2}\right)$  переходить у міру на інтервалі  $\left[\frac{1}{2}, 1+\xi\right)$ , який є об'єднанням  $\bigcup_{j=1}^{m+1} I_{1,j}$ . Процес є симетричним і на від'ємній півосі. Це показує, що квадратна матриця  $\Lambda P(\lambda)$  розміру  $2m+1$  має таку структуру: крім  $(m+1)$ -го рядка матриці  $\Lambda P(\lambda)$ , всі інші рядки мають лише два елементи, що відмінні від нуля. В  $(m+1)$ -му рядку перший елемент дорівнює  $e^{-i\lambda}$ , останній елемент дорівнює  $e^{i\lambda}$ , а  $(m+1)$ -й елемент дорівнює 1. В рядку з номером  $j \leq m$   $(j+1)$ -й елемент дорівнює 1, а останній елемент дорівнює  $e^{i\lambda}$ . В рядку з номером  $j \geq m+2$  останній елемент дорівнює  $e^{i\lambda}$ , а  $(j-1)$ -й елемент дорівнює 1. Можна показати, що власне число  $z(\lambda)$  матриці  $P(\lambda)$  задовольняє поліноміальне рівняння

$$(\Lambda z)^{2m+1} - 2(\Lambda z)^m \cos \lambda - \sum_{j=1}^{2m} (\Lambda z)^j = 0. \quad (25)$$

Оскільки найбільше власне значення  $z(\lambda)$  при  $\lambda = 0$  дорівнює 1, то із (25) отримуємо  $z'(0) = 0$ . Диференціюючи рівняння (25) двічі по  $\lambda$  і вважаючи  $\lambda = 0$ , отримуємо

$$z''(0) \left( (2m+1)\Lambda^{2m+1} - 2m\Lambda^m - \sum_{j=1}^{2m} j\Lambda^j \right) + 2\Lambda^m = 0. \quad (26)$$

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{2m} j\Lambda^j = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \sum_{j=1}^{2m} \Lambda^j = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{\Lambda^{2m+1} - 1}{\Lambda - 1},$$

то із (26), враховуючи (22), одержуємо такий вираз для коефіцієнта детермінованої дифузії (24):  $D = -\frac{1}{2}z''(0)$ .

Теорема 3 і наведені приклади дозволяють дати таке означення детермінованої дифузії для ДСЛ (1), (2).

**Означення 6.** Будемо казати, що ДСЛ (1), (2) має детерміновану дифузію, якщо для будь-якої початкової ймовірнісної міри  $\mu_0$  з обмеженою щільністю знайдуться послідовності чисел  $\sigma_n^2 > 0$ ,  $\xi_n$  і така 1-періодична функція  $\alpha(x) \geq 0$ ,  $\int_{-1/2}^{1/2} \alpha(x) dx = 1$ , що послідовність мір  $\mu_n = F^n \mu_0$ , яку отримуємо із початкової при  $n$ -кратній дії ДСЛ, асимптотично еквівалентна при  $n \rightarrow \infty$  послідовності мір зі щільностями

$$\rho_n(x) = \frac{\alpha(x)}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\xi_n)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

**Зауваження 2.** ДСЛ (1), (2) на всій осі породжує асоційовану ДС  $x_{n+1} = \beta(x_n)$  на скінченному інтервалі  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , де значення функції  $\beta(x) : \beta(x) = \{f(x)\}$  і функція  $\beta$  відображає інтервал  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  у себе. Таку ДС, яка є компакфікацією ДСЛ, будемо позначати КДСЛ. Функція  $\alpha(x) \geq 0$  в означенні 6 є щільністю інваріантної ймовірнісної міри для КДСЛ.

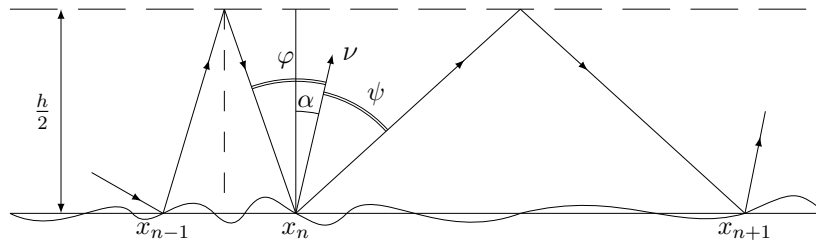


Рис. 2. Відображення бильярдної кулі в каналі з половинною шириною.

Зауважимо, що  $\beta$ -функція відображає інтервал  $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$  на себе. Оскільки інтервал  $I_0$  можна природно відобразити на одиничне коло, то виникає відображення одиничного кола на себе. Такі відображення добре вивчені і мають назву „ $\beta$ -автоморфізм” або „ $\beta$ -зсув”. Для таких перетворень доведено існування інваріантної міри і запропоновано ефективні алгоритми для її побудови [8, 11, 17, 21, 22, 25]. Якщо  $\beta$ -перетворення породжене ДСЛ, яке узгоджене з марковським підрозбиттям  $\{I_{0,j}\}_{j=1}^m$  інтервалу  $I_0$ , то міра зі сталими щільностями на  $I_{0,j}$  при  $\beta$ -перетворенні переходить у міру зі сталими щільностями на тих самих компонентах. При цьому оператор Перрона – Фробеніуса можна подати у вигляді матриці  $P(0)$ , яка діє на вектор  $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , що складається із щільностей  $\alpha_j$  міри на підінтервалах  $I_{0,j}$ . Щільності інваріантної міри визначаються компонентами власного вектора  $P(0)\alpha = \alpha$ . Як показують приклади 6 і 7, це дає можливість явно знаходити щільності інваріантної міри КДСЛ у цьому конкретному випадку.

**5. Детермінована дифузія при транспорті в бильярдному каналі.** Як показують чисельні експерименти в роботі [4], детермінована дифузія в довгих бильярдних каналах є аномальною. Існують різні теоретичні моделі для такого дифузійного транспорту в довгих каналах. Одну із моделей наведено в роботі [3]. Її суть полягає в наступному. Розглянемо довгий бильярдний канал, борти якого побудовані з періодично повторюваних дуг, які мало викривляють прямі лінії бортів. Будемо вважати, що верхня границя такого каналу симетрична нижній. Тоді траєкторії руху бильярдної кулі як матеріальної точки з ідеальним законом відбиття від обох бортів можна розглядати в каналі половинної ширини, яка симетрично відбиває траєкторію верхньої частини в нижню відносно прямої – середньої лінії каналу. Таким чином, на цій середній лінії можна вважати ідеальним відбиття від цієї прямої. Будемо наближено вважати, що відбиття на нижній частині викривленого борту відбувається на його лінійній апроксимації. Але нормаль  $\nu$  від поверхні фактичного відбиття не збігається з нормаллю прямолінійної апроксимації каналу і є відомою періодичною функцією вздовж осі каналу. Нехай  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  і  $x_{n+1}$  – абсциси трьох послідовних відбиттів бильярдної кулі, а вектор  $\nu(x_n)$  утворює кут  $\alpha(x_n)$  від нормалі до межі (див. рис. 2). Тоді розгляд ідеального відбиття в точці  $x_n$  приводить до рівності кутів падіння  $\varphi_n$  і відбиття  $\psi_n$  по відношенню до вектора  $\nu$ . Зрозуміло, що  $\varphi = \arctan \frac{x_n - x_{n-1}}{h} + \alpha$ , а  $\psi = \arctan \frac{x_{n+1} - x_n}{h} - \alpha$ . Тому маємо

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} + \tan(2\alpha)}{1 - \tan(2\alpha) \frac{x_{n+1} - x_n}{h}}. \quad (27)$$

При великих  $h$  із (27) наближено отримуємо

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} + h \tan(2\alpha(x_n)).$$

Нехай функція  $f(x) = \tan(2\alpha x)$  періодична по  $x$  з періодом 1. Тоді отримуємо таку модель траєкторії в більярдному каналі:

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} + f(x_n). \quad (28)$$

ДС (28) є системою другого порядку відносно дискретного часу, яка узагальнює ДС (1). Початкові умови  $x_0$  і  $x_1$  задано. Нехай  $x_0 = 0$ , а  $x_1 \in I_k = \left[ k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right)$ . Рівняння (28) можна записати в еквівалентному вигляді

$$x_{n+1} = x_1 n + \sum_{k=1}^n (n+1-k) f(x_k). \quad (29)$$

Нехай у рівнянні (29) функція  $f(x)$  1-періодична по  $x$  і лінійна,  $f(x) = \Lambda x$  при  $x \in I_0 = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ . Тоді при  $\Lambda > 1$  і  $x_1$ , рівномірно розподіленій по інтервалу  $I_k$ , доданки в (29) можна вважати рівномірно розподіленими випадковими незалежними доданками. Це приводить до нормального розподілу  $x_{n+1}$  з дисперсією, яка дорівнює сумі дисперсій усіх доданків у формулі (29). Тому розподіл  $x_{n+1}$  має дисперсію

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} n^2 + \frac{\Lambda^2}{12} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

яка нелінійно залежить від  $n \rightarrow \infty$ . Детермінована дифузія в такій більярдній смузі є аномальною. Отже, існують два фактори, які призводять до аномальності детермінованої дифузії: це квадратична залежність дисперсії від розподілу початкових значень навіть для ідеального більярда і ріст коефіцієнтів при доданках у сумі (29), що приводить до кубічної залежності дисперсії  $x_{n+1}$  від  $n$ .

**Зауваження 3.** Ми розглянули розподіл місцезнаходжень більярдної кулі після  $n \rightarrow \infty$  відбиттів. З фізичної точки зору більш важливо мати розподіл абсцис більярдних куль при великих значеннях часу  $t$ , оскільки за один і той самий час на різних траєкторіях більярдна куля робить різне число відбиттів. Час між двома послідовними зіткненнями у звичайних більярдах пропорційний пройденому шляху, але в моделі стрибаючого м'ячика [19] над нерівною поверхнею час між двома послідовними зіткненнями буде практично сталим. Задача вивчення аномальної детермінованої дифузії в більярдних каналах при  $t \rightarrow \infty$  заслуговує окремого детального розгляду.

**Висновки:**

1. При вивченні ДС із хаотичною поведінкою траєкторій корисно вивчати трансформацію мір та їхню асимптотичну поведінку при великих значеннях часу під впливом ДС. У роботі наведено спеціальні ДС на всій осі, коли ймовірнісна міра зі сталою щільністю асимптотично стає нормальною, тобто в ДС існує детермінована дифузія.
2. Показано, що детермінована дифузія в більярдних каналах із неідеальним просторово-періодичним законом відбиття є аномальною, оскільки дисперсія міри нелінійно залежить від часу.
3. Компактифікація розглянутих ДСЛ дає ДС на одиничному колі з інваріантною мірою, коли міра зі сталою щільністю при великих значеннях часу асимптотично наближається до інваріантної міри.



4. Щільність Гаусса  $\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$  при звичайній дифузії є функцією Гріна задачі Коші для диференціального рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0.$$

При вивченні аномальної дифузії розглядають диференціальне рівняння з довільними похідними дробового порядку. Вивченню таких рівнянь присвячено ряд робіт (див. [15] і наведено там бібліографію).

### Література

1. Романенко Е. Ю. Разностные уравнения с непрерывным аргументом. – Киев: Ин-т математики НАН України, 2014. – 348 с.
2. Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 278 с.
3. Albeverio S., Galperin G., Nizhnik I., Nizhnik L. Generalized billiards inside an infinite strip with periodic laws of reflection along the strip's boundaries // Regul. and Chaotic Dyn. – 2005. – **10**, № 3. – P. 285–306.
4. Alonso D., Ruiz A., de Vega I. Transport in polygonal billiards // Physica D. – 2004. – **187**. – P. 184–199.
5. Bhattacharya R. N., Ranga Rao R. Normal approximation and asymptotic expansions. – New York: John Wiley & Sons, 1976.
6. Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G. Chaos: classical and quantum. – Copenhagen: Niels Bohr Inst., 2018. www.chaosbook.org.
7. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. –3rd ed. – New York: Wiley, 1968.
8. Gelfond A. O. A common property of number systems // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. – 1959. – **23**. – P. 809–814.
9. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit distributions for sums of independent random variables // Addison-Wesley Math. Ser. – 1954. – **9**.
10. Hasselblatt B., Katok A. A first course in dynamics with a panorama of recent developments. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
11. Hofbauer F.  $\beta$ -Shifts have unique maximal measure // Monatsh. Math. – 1978. – **85**, № 3. – S. 189–198.
12. Katok A., Hasselblatt B. Introduction of the modern theory of dynamical systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. Klages R. Microscopic chaos, fractals and transport in nonequilibrium statistical mechanics. – Singapore: World Sci., 2007. – 456 p.
14. Klages R., Radons G., Sokolov I. Anomalous transport. – Wiley-VCH, 2008. – 584 p.
15. Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients // Appl. Anal. – 2014. – **93**, Issue 10. – P. 2211–2242.
16. Korabel N., Klages R. Fractality of deterministic diffusion in the nonhyperbolic climbing sine map // CHAOTRAN Proc. Physica D. – 2004. – **187**. – P. 66–88.
17. Lasota A., Yorke J. A. On the existence of invariant measure for piecewise monotonic transformations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **186**. – P. 481–488.
18. Li T. Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. – 1975. – **82**, № 10. – P. 985–992.
19. Matyas L., Klages R. Irregular diffusion in the bouncing ball billiard // Physica D. – 2004. – **187**. – P. 165–183.
20. Nizhnik L., Nizhnik I. Deterministic diffusion, <http://arxiv.org/pdf/1501.00674.pdf>
21. Parry W. On the  $\beta$ -expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1960. – **11**. – P. 401–416.
22. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1957. – **8**. – P. 477–493.
23. Sharkovsky A. N. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself // Ukr. Math. J. – 1964. – **16**, № 1. – P. 61–71.
24. Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V. Dynamics of one-dimensional maps // Math. and Appl. – 1997. – **407**.
25. Takahasi Yo. Isomorphisms of  $\beta$ -automorphisms to Markov automorphisms // Osaka J. Math. – 1973. – **10**. – P. 176–184.

Одержано 09.02.19