УДК 517.929

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З АБСОЛЮТНО НЕСТІЙКИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

For linear differential-functional equations of retarded and neutral types with infinitely many deviations and self-adjoint operator coefficients, we present necessary and sufficient conditions for the absolute instability of the zero solutions.

Для лінійних диференціально-функціональних рівнянь запізнювального і нейтрального типів із нескінченним числом відхилень і самоспряженими операторними коефіцієнтами наведено необхідні й достатні умови абсолютної нестійкості нульових розв'язків.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай H — гільбертовий простір і $\|\cdot\|_H$ — норма в H, що визначається рівністю $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$, де (x,y) — скалярний добуток x на y $(x, y \in H)$, $L(H,H)$ — банахова алгебра лінійних неперервних операторів $A\colon H \to H$ з одиницею I та нормою $\|A\|_{L(H,H)} = \sup\big\{\|Ax\|_H : \|x\|_H = 1\big\}$, $C([-h,0],H)$ — банаховий простір неперервних на $[-h,0]$ функцій $x = x(\theta)$ зі значеннями в H і нормою $\|x\|_{C\left([-h,0],H\right)} = \max\big\{\|x(\theta)\|_H : \theta \in [-h,0]\big\}$, $\mathfrak{D}_h$ — множина всіх лінійних операторів $D: C\big([-h,0],H\big) \to H$, норми яких збігаються з одиницею і кожний з яких визначається за допомогою інтеграла Рімана – Стільтьєса

$$Dx = \int\limits_{-h}^{0} x(\theta)\, dF(\theta),$$

де $F(\theta)$ — неспадна функція обмеженої варіації зі значеннями в $\mathbb{R}$, задана на $[-h,0]$, для якої $F(\theta+0) = F(\theta)$ для всіх $\theta \in [-h,0)$.

Зазначимо, що якщо $-h = x_0 < x_3 < x_2 < \ldots < x_n = 0$ — деяке розбиття відрізка $[-h,0]$ і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — довільні точки з відповідних елементів розбиття, то під символом $\int_{-h}^{0} x(\theta)\, dF(\theta)$ розуміється границя $\lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) x(\xi_i)$. Ця границя існує і не залежить від розбиття відрізка $[-h,0]$ на частини та вибору на них точок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Для довільної неперервної на $[-h,+\infty)$ функції $x(t)$ зі значеннями в H позначимо через x_t елемент $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ простору $C\big([-h,0],H\big)$.

Розглянемо самоспряжені оператори $A_n \in L(H,H)$, $n \geq 1$, $B_n \in L(H,H)$, $n \geq 0$, що задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{L(H,H)} + \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{L(H,H)} < \infty, \tag{1}$$

і оператори $\mathcal{C}_n,\ \mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h,\ n \geq 1$.

Основним об'єктом досліджень у статті є нестійкість нульових розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathcal{D}_n x_t, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{C}_n \frac{dx_t}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathcal{D}_n x_t, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

при довільних $\mathcal{C}_n,\ \mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h,\ n \geq 1$, і $h > 0$.

Очевидно, що окремими випадками цих рівнянь є диференціально-різницеві рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n x(t - \Delta_n), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{dx(t-\tau_n)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n x(t - \Delta_n), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

де $\Delta_n,\ \tau_n,\ n \geq 1$, — невід'ємні числа, для яких

$$\sup_{n \geq 1} \Delta_n + \sup_{n \geq 1} \tau_n < \infty. \tag{6}$$

Нульові розв'язки рівнянь (2) і (3) будемо називати *абсолютно нестійкими*, якщо ці розв'язки нестійкі при всіх $\mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h,\ n \geq 1$, і $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h,\ n \geq 1$, відповідно, і $h > 0$ (означення нестійких розв'язків диференціальних рівнянь із відхиленнями аргументу можна знайти, наприклад, в [1, 2]).

Мета статті — встановлення необхідних і достатніх умов абсолютної нестійкості нульових розв'язків рівнянь (2) і (3).

2. Формулювання основних результатів. Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора $A \in L(H,H)$, а через $\mathbb{C}_+$ множину $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Правильними є наступні твердження.

Теорема 1. *Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння* (2) *необхідно і достатньо, щоб*

$$\sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) \bigcap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing. \tag{7}$$

Теорема 2. *Нехай*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{L(H,H)} < 1 \tag{8}$$

і

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n A_n\right)\left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n\right) = \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n A_n\right) \tag{9}$$

для всіх $p_n \in [0,1],\ q_n \in [0,1],\ n \geq 1$.

Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (3) *необхідно і достатньо виконання співвідношення* (7).

Доведення цих тверджень див. у пп. 4, 5.

3. Допоміжні твердження. Наведемо деякі факти про самоспряжені неперервні оператори, що будуть використовуватись у подальшому.

Нагадаємо, що оператор $A \in L(H,H)$ називається самоспряженим, якщо він збігається зі спряженим до нього оператором A^*, тобто $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всіх $x, y \in H$ [3–5]. Самоспряжений оператор $A \in L(H,H)$ характеризується тим, що його ермітова форма (Ax, x) $(x \in H)$ набуває лише дійсних значень. Спектр самоспряженого оператора $\sigma(A)$ є непорожньою обмеженою замкненою множиною на дійсній осі. Найменший сегмент, що містить у собі спектр $\sigma(A)$, позначимо через $\big[\lambda_m(A), \lambda_M(A)\big]$. Як відомо (див. [4]),

$$\lambda_m(A) = \inf\big\{(Ax, x) \colon \|x\|_H = 1\big\},$$
$$\lambda_M(A) = \sup\big\{(Ax, x) \colon \|x\|_H = 1\big\},$$
$$\|A\|_{L(H,H)} = \max\big\{\lambda_M(A), -\lambda_m(A)\big\}.$$

Очевидно, що $\lambda_m(A)$, $\lambda_M(A)$ і $\|A\|_{L(H,H)}$ неперервно залежать від A.

Зазначимо, що сума самоспряжених операторів є самоспряженим оператором, лінійна комбінація їх із дійсними коефіцієнтами також є самоспряженим оператором. Завдяки неперервності скалярного добутку границя за нормою послідовності самоспряжених операторів є самоспряженим оператором. Добуток BA самоспряжених операторів A і B є самоспряженим оператором тільки тоді, коли $BA = AB$.

Для дослідження нестійкості розв'язків рівнянь (2), (3) важливими є такі твердження.

Теорема 3 ([4], розділ VII, § 4)**.** *Точка λ належить спектру самоспряженого оператора $A \in L(H,H)$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність нормованих векторів x_n, $n \geq 1$, для якої* $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\|_H = 0$.

Теорема 4. *Якщо для самоспряженого оператора $A \in L(H,H)$ виконується співвідношення $\sigma(A) \bigcap \mathbb{C}_+ = \varnothing$, то* $\sup_{t\geq 0} \big\|e^{tA}\big\|_{L(H,H)} \leq 1$.

Теорема 4 легко доводиться за допомогою леми Меррея [3, с. 109, 110].

4. Доведення теореми 1. *Необхідність.* Нехай нульовий розв'язок рівняння (2) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок нестійкий і якщо

$$\mathcal{D}_n x_t = \int\limits_{-h}^{0} x_t(\theta)\, dF_n(\theta) = x(t), \quad n \geq 1,$$

де

$$F_n(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \theta = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \theta \in [-h, 0). \end{cases}$$

Рівняння (2) у цьому випадку має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) x(t), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

і функція

$$x = e^{tA}c, \tag{11}$$

де $A = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ і c — довільний вектор простору H, є загальним розв'язком рівняння (10) [6]. Завдяки (1) та самоспряженості операторів B_n, $n \geq 0$, оператор $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ також є самоспряженим.

Припустимо, що співвідношення (7) не виконується, тобто

$$\sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) \bigcap \mathbb{C}_+ = \varnothing. \tag{12}$$

Тоді на підставі теореми 4 кожний розв'язок (11) рівняння (10) є обмеженим на $[0, +\infty)$, що суперечить нестійкості нульового розв'язку цього рівняння.

Отже, припущення про виконання співвідношення (12) є хибним.

Достатність. Нехай виконується співвідношення (7).

Зафіксуємо довільні число $h > 0$ і оператори $\mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h$, $n \geq 1$. Нехай оператор $\mathcal{D}_n$ визначається рівністю $\mathcal{D}_n x = \int_{-h}^{0} x(\theta)\, d\Psi_n(\theta)$, де функція $\Psi_n(\theta)$ має ті самі властивості, що і функції, за допомогою яких визначаються елементи множини $\mathfrak{D}_h$.

Розглянемо рівняння (2) та операторну функцію

$$P(z) = zI - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\Psi_n(\theta) B_n, \quad z \geq 0. \tag{13}$$

Завдяки (1) та самоспряженості операторів B_n, $n \geq 0$, значення функції $P(z)$ при $z \in \in [0, +\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція є неперервною на $[0, +\infty)$. Тому неперервною на $[0, +\infty)$ є функція $\lambda_m\big(P(z)\big)$.

Оскільки

$$\lambda_m\big(P(0)\big) < 0$$

на підставі (7), (13) і

$$\lim_{z\to+\infty} \lambda_m(P(z)) = +\infty$$

на підставі (13), то за теоремою Больцано – Коші [7] існує точка $z_0 \in (0, +\infty)$ така, що

$$\lambda_m\big(P(z_0)\big) = 0.$$

Ця рівність означає, що

$$0 \in \sigma\big(P(z_0)\big).$$

Покажемо що нульовий розв'язок рівняння (2) нестійкий.

За теоремою 3 існує послідовність нормованих векторів a_m, $m \geq 1$, для якої

$$\lim_{m\to\infty} \|P(z_0)a_m\|_H = 0. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільні числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо додатне число $T(\varepsilon)$, для якого

$$\left|e^{z_0 T(\varepsilon)}\right| = 2. \tag{15}$$

Таке число існує, оскільки $z_0 > 0$. Позначимо через $x(t, \varepsilon a_m)$ неперервний розв'язок рівняння (2), що задовольняє умову

$$x(t, \varepsilon a_m) = e^{z_0 t}\varepsilon a_m$$

для всіх $t \in [-h, 0)$, і розглянемо функцію

$$\delta_m(t) = x(t, \varepsilon a_m) - e^{z_0 t}\varepsilon a_m. \tag{16}$$

Очевидно, що

$$\frac{d\delta_m(t)}{dt} \equiv B_0\delta_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int\limits_{-h}^{0} \delta_m(t+\theta)d\Psi_n(\theta) - \varepsilon e^{z_0 t}P(z_0)a_m.$$

Звідси випливає, що

$$\delta_m(t) = \varepsilon\frac{1-e^{z_0 t}}{z_0}P(z_0)a_m + \int\limits_0^t \left(B_0\delta_m(s) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int\limits_{-h}^{0} \delta_m(s+\theta)d\Psi_n(\theta)\right) ds, \quad t \geq 0.$$

Отже,

$$\max_{\tau\in[0,t]} \big\|\delta_m(\tau)\big\|_H \leq \frac{\varepsilon}{z_0}\, e^{z_0 t}\big\|P(z_0)a_m\big\|_H + \int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{L(H,H)} \max_{\tau\in[0,s]} \big\|\delta_m(\tau)\big\|_H\, ds, \quad t \geq 0,$$

і на підставі нерівності Гронуолла – Беллмана (див., наприклад, [8])

$$\max_{\tau\in[0,T(\varepsilon)]} \big\|\delta_m(\tau)\big\|_H \leq \left(\frac{\varepsilon}{z_0}\, e^{z_0 T(\varepsilon)}\big\|P(z_0)a_m\big\|_H\right) e^{T(\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\|B_n\|_{L(H,H)}}.$$

Звідси та із співвідношення (14) отримуємо

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\tau\in[0,T(\varepsilon)]} \|\delta_m(\tau)\|_H = 0.$$

Тому на підставі (15) і (16)

$$\big\|x(T(\varepsilon), \varepsilon a_m)\big\|_H \geq 1$$

для досить великих $m \in \mathbb{N}$, що завдяки довільності вибору ε означає нестійкість нульового розв'язку рівняння (2). Із довільності вибору операторів $\mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h$, $n \geq 1$, і числа $h > 0$ випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2. *Достатність.* Нехай виконуються співвідношення (8), (9) і нульовий розв'язок рівняння (3) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок нестійкий і якщо

$$\mathcal{C}_n x_t = \mathcal{D}_n x_t = \int\limits_{-h}^{0} x_t(\theta)dF_n(\theta) = x(t), \quad n \geq 1,$$

де

$$F_n(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \theta = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \theta \in [-h, 0). \end{cases}$$

У цьому випадку рівняння (3) набирає вигляду

$$\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)x(t), \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Завдяки (8) оператор $I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ має неперервний обернений $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ (див., наприклад, [9]) і

$$\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^n. \tag{18}$$

Тому рівняння (17) рівносильне рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) x(t), \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Завдяки (9) і (18) оператор $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)$ у рівнянні (19) є самоспряженим. Оскільки нульовий розв'язок рівняння (19) нестійкий, то за допомогою міркувань, що використовувалися при доведенні необхідності умов теореми 1, переконуємося, що виконується співвідношення

$$\sigma\left(\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) \bigcap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing. \tag{20}$$

Із цього співвідношення випливає (7). Справді, на підставі (9) і (18) самоспряжені оператори $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ переставні (комутують), а на підставі (8)

$$\sigma\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \subset (0, +\infty). \tag{21}$$

Оскільки для переставних операторів $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$

$$\sigma\left(\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) \subset \left\{\lambda\mu \colon \lambda \in \sigma\left(\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}\right),\ \mu \in \sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)\right\}$$

(див., наприклад, [9, с. 229, 230]), то завдяки (20) і (21) виконується (7).

Достатність. Нехай виконуються співвідношення (7) – (9).

Покажемо, що нульовий розв'язок рівняння (3) абсолютно нестійкий.

Зафіксуємо довільні оператори $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h$, $n \geq 1$, і число $h > 0$. Нехай оператори $\mathcal{C}_n$ і $\mathcal{D}_n$ визначаються рівностями $\mathcal{C}_n x = \int_{-h}^{0} x(\theta)\, d\Phi_n(\theta)$ і $\mathcal{D}_n x = \int_{-h}^{0} x(\theta)\, d\Psi_n(\theta)$, де функції $\Phi_n(\theta)$ і $\Psi_n(\theta)$ мають ті самі властивості, що і функції, за допомогою яких визначаються елементи множини $\mathfrak{D}_h$.

Розглянемо рівняння (3) й операторну функцію

$$Q(z) = z\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta}\, d\Phi_n(\theta) A_n\right) - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta}\, d\Psi_n(\theta) B_n, \quad z \geq 0. \tag{22}$$

Завдяки (1) та самоспряженості операторів A_n, $n \geq 1$, і B_n, $n \geq 0$, значення функції $Q(z)$ при $z \in [0, +\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція неперервна на $[0, +\infty)$. Тому неперервною на $[0, +\infty)$ є функція $\lambda_m(Q(z))$.

Очевидно, що на підставі (7) і (22)

$$\lambda_m(Q(0)) < 0,$$

а також

$$\lim_{z\to+\infty} \lambda_m(Q(z)) = +\infty. \tag{23}$$

Справді, завдяки співвідношенням

$$\lambda_m(Q(z)) =$$

$$= \inf_{\|x\|_H=1} \left(\left(z \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\Phi_n(\theta) A_n \right) - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\Psi_n(\theta) B_n \right) x, x \right) \geq$$

$$\geq \inf_{\|x\|_H=1} \left(z \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\Phi_n(\theta)\ A_n \right) x, x \right) -$$

$$- \sup_{\|x\|_H=1} \left(\left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^{0} e^{z\theta}\ d\Psi_n(\theta)\ B_n \right) x, x \right) \geq$$

$$\geq z - \sup_{\|x\|_H=1} \left(z \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\tau_n} A_n \right) x, x \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{L(H,H)} \geq$$

$$\geq z \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{L(H,H)} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{L(H,H)}, \quad z \in [0, +\infty),$$

і (8) виконується (23).

За теоремою Больцано – Коші існує точка $z_0 \in (0, +\infty)$ така, що

$$\lambda_m(Q(z_0)) = 0.$$

Ця рівність означає, що

$$0 \in \sigma(Q(z_0)). \tag{24}$$

Покажемо що нульовий розв'язок рівняння (3) нестійкий.

За теоремою 3 і (24) існує послідовність нормованих векторів $a_m,\ m \geq 1$, для якої

$$\lim_{m\to\infty} \left\| Q(z_0) a_m \right\|_H = 0. \tag{25}$$

Розглянемо векторні функції $v_m = e^{z_0 t} a_m,\ m \geq 1$. Ці функції є розв'язками відповідно рівнянь

$$\frac{dv(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-h}^{0} \frac{dv(t+\theta)}{dt}\ d\Phi_n(\theta) - B_0 v(t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-h}^{0} v(t+\theta)\ d\Psi_n(\theta) =$$

$$= e^{z_0 t} Q(z_0) a_m,\ m \geq 1. \tag{26}$$

Далі розглянемо неперервно диференційовні на $[-h,0]$ функції $\varepsilon_m = \varepsilon_m(t),\ m \geq 1$, такі, що

$$\frac{d\varepsilon_m(0)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-h}^{0} \frac{d\varepsilon_m(\theta)}{dt}\, d\Phi_n(\theta) - B_0\varepsilon_m(0) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-h}^{0} \varepsilon_m(\theta)\, d\Psi_n(\theta) = Q(z_0)a_m, \quad m \geq 1,$$

і

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{t\in[-h,0]} \|\varepsilon_m(t)\|_H + \sup_{t\in[-h,0]} \left\|\frac{d\varepsilon_m(t)}{dt}\right\|_H\right) = 0 \tag{27}$$

$\Bigg($тут $\dfrac{d\varepsilon_m(0)}{dt}$ і $\dfrac{d\varepsilon_m(-h)}{dt}$ означають похідні функції $\varepsilon_m(t)$ зліва і справа в точках 0 і $-h$ відповідно$\Bigg)$. Функції з такими властивостями існують завдяки співвідношенням (8), (25) і лінійності рівняння (3).

Позначимо через $\gamma_m(t)$ розв'язок рівняння (26), що задовольняє початкову умову

$$v(\theta) = \varepsilon_m(\theta), \quad \theta \in [-h,0].$$

Тоді $v_m(t) - \gamma_m(t)$ — розв'язок рівняння (3).

Легко перевірити, використовуючи (25) і (27), що

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\gamma_m(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \left\|\frac{d\gamma_m(t)}{dt}\right\|_H\right) = 0 \tag{28}$$

для кожного $T > 0$. Оскільки для розв'язків $v_m(t) - \gamma_m(t),\ m \geq 1$, рівняння (3), очевидно, справджуються співвідношення

$$e^{z_0 t} + \big\|\gamma_m(t)\big\|_H \geq \big\|e^{z_0 t}a_m - \gamma_m(t)\big\|_H \geq e^{z_0 t} - \big\|\gamma_m(t)\big\|_H$$

для всіх $m \geq 1$ і $t \geq 0$, то на підставі (28) і того, що $z_0 > 0$, нульовий розв'язок рівняння (3) є нестійким. Із довільності вибору в рівнянні (3) операторів $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n \in \mathfrak{D}_h,\ n \geq 1$, і числа $h > 0$ випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 2 доведено.

6. Зауваження та літературні вказівки. Теореми 1 і 2 є новими. Вони аналогічні відповідним твердженням про необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних скалярних диференціально-різницевих рівнянь, отриманих автором в [1, 10]. У цих працях також наведено достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь запізнювального типу.

Достатні умови нестійкості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі зі скінченним числом довільних неперервно залежних від часу запізнень отримано в [1].

Необхідні і достатні умови нестійкості нульових розв'язків рівнянь (4) і (5) при довільних Δ_n і τ_n, що задовольняють (6), отримано в [11].

Задача про абсолютну нестійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь аналогічна задачі про абсолютну стійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь і диференціально-функціональних рівнянь, що розв'язувалася, наприклад, в [1, 12 – 22] і [23] відповідно.

Застосування диференціально-різницевих рівнянь з абсолютно стійкими та нестійкими розв'язками наведено в [1].

Література

1. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2004. – 416 с.
3. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 571 с.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
8. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
9. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – **7**, № 3. – С. 430–436.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 5. – С. 715 – 724.
12. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. – 1960. – **23**. – С. 34 – 41.
13. *Гоздек В. С.* О галопировании тележек шасси при движении самолета по грунтовому аэродрому // Инж. журн. – 1965. – Вып. 4. – С. 743 – 745.
14. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1969. – **23**. – С. 919 – 928.
15. *Слюсарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. – 1975.– **17**, № 6. – С. 919 – 923.
16. *Слюсарчук В. Е.* Об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 2. – С. 161 – 165.
17. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 5. – С. 840 – 847.
18. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об устойчивости решений бесконечных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 11. – С. 2019 – 2026.
19. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Проблемы современной теории периодических движений. – 1982. – № 6. – С. 19 – 24.
20. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютно устойчивые системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1364 – 1373.
21. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный критерий абсолютной (не зависящей от отклонения аргумента) устойчивости систем линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1989. – Вып. 12. – С. 16 – 22.
22. *Kovalev A. M., Martynyuk A. A., Boichuk O. A., Mazko A. G., Petryshyn R. I., Slyusarchuk V. Ye., Zuyev A. L., Slyn'ko V. I.* Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability and control problems // Nonlinear Dyn. and Syst. Theory. – 2009. – **9**, № 2. – P. 117 – 145.
23. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений запаздывающего типа в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 8. – С. 1526 – 1528.

Одержано 11.07.18