УДК 517.9

А. Ф. Баранник (Помор. академія, Слупськ, Польща),
Т. А. Баранник (Полтав. нац. пед. ун-т),
І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

МЕТОД ПОБУДОВИ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ $u_t = (F(u)u_x)_x + G(u)u_x + H(u)$

We propose a method for the construction of exact solutions to the nonlinear heat equation based on the classical method of separation of variables and its generalization. We consider substitutions used to reduce the nonlinear heat equation to a system of two ordinary differential equations and construct the classes of exact solutions by the method of generalized separation of variables.

Запропоновано метод побудови точних розв'язків нелінійного рівняння теплопровідності, який базується на класичному методі відокремлення змінних і його узагальненні. Розглянуто підстановки, що редукують нелінійне рівняння теплопровідності до системи двох звичайних диференціальних рівнянь, і побудовано класи точних розв'язків за допомогою методу узагальненого відокремлення змінних.

1. Вступ. Статтю присвячено побудові точних розв'язків нелінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + G(u)\frac{\partial u}{\partial x} + H(u). \tag{1.1}$$

Це рівняння при $G \equiv \mathrm{const}$ описує нестаціонарну теплопровідність у середовищі, яке рухається зі сталою швидкістю, якщо коефіцієнт теплопровідності і швидкість реакції є довільними функціями температури. Розв'язки рівняння (1.1) типу біжучої хвилі $u = w(z),\ z = x + \lambda t$ наведено в [1].

Частинним випадком (1.1) є рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1.2}$$

яке зустрічається в нелінійних моделях тепло- і масоперенесення (F — коефіцієнт теплопровідності або дифузії), а також у теорії фільтрації. У роботі [2] наведено групову класифікацію рівнянь (1.2) і отримано вичерпний перелік інваріантних розв'язків цих рівнянь. У роботі [3] запропоновано метод пошуку функції $F(u)$, для якої рівняння (1.2) має розв'язки вигляду

$$u = w(z), \qquad z = xt^{-1/2}, \quad 0 \le x < \infty. \tag{1.3}$$

У випадку $G \equiv 0$ отримуємо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + H(u), \tag{1.4}$$

яке описує нестаціонарну теплопровідність у нерухомому середовищі, якщо коефіцієнт теплопровідності і швидкість реакції є довільними функціями температури. У роботах [4, 5] наведено групову класифікацію рівнянь (1.4) і побудовано інваріантні розв'язки цих рівнянь. Широкі класи точних розв'язків рівняння (1.4) для різних функцій $F(u)$, $H(u)$ описано в роботах [1 – 15].

Ефективним методом побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики з двома незалежними змінними є пошук розв'язків за допомогою методу узагальненого відокремлення змінних (див. [1, 13]). Так, у роботах [10, 12] описано деякі класи параболічних і гіперболічних рівнянь із квадратичною нелінійністю, які допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних вигляду

$$u = w(z), \qquad z = \varphi(t)p(x) + \psi(t), \tag{1.5}$$

і розв'язки, що відповідають перестановці незалежних змінних $x \to t$, $t \to x$ у правій частині (1.5).

У даній статті запропоновано метод побудови точних розв'язків рівняння (1.1) за допомогою методу узагальненого відокремлення змінних, який базується на класичному методі відокремлення змінних, його узагальненні і методі редукції, що є основою симетрійного методу С. Лі. Для побудови точних розв'язків рівняння (1.1) використовується підстановка

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t), \tag{1.6}$$

яка містить три невідомі функції: $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $\varphi(u)$, а також функцію $p(x)$, яка задається апріорно. Розглядається випадок, коли $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = Ap^2 + B, \tag{1.7}$$

де A, B — сталі. При такому виборі функції $p(x)$ невідомі функції $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $\varphi(u)$ визначаються з умови, що підстановка (1.6) редукує рівняння (1.1) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь із невідомими функціями $w_1(t)$, $w_2(t)$. Цей підхід дозволяє описати рівняння (1.1), які допускають розв'язки вигляду (1.6), (1.7), і ефективно побудувати такі розв'язки.

Зазначимо, що в роботах [16, 17] підстановку

$$x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)$$

було використано для побудови точних розв'язків рівняння типу Кортевега – де Фріза

$$u_t + F(u)u_x^k + u_{xxx} = 0,$$

а підстановку

$$t = w_1(x)\varphi(u) + w_2(x)$$

— для побудови точних розв'язків нелінійного хвильового рівняння

$$u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2.$$

2. Точні розв'язки рівняння (1.1) вигляду $x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)$.

Означення 2.1. *Будемо говорити, що рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (1.6), *якщо ця підстановка редукує рівняння* (1.1) *до системи двох звичайних диференціальних рівнянь із невідомими функціями* $w_1(t),\ w_2(t)$.

З'ясуємо, для яких функцій $F(u)$, $G(u)$ і $H(u)$ рівняння (1.1) допускає підстановку

$$x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t). \tag{2.1}$$

Підстановка (2.1) містить три невідомі функції: $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $\varphi(u)$. Ці функції будемо визначати з умови, що підстановка (2.1) редукує рівняння (1.1) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь із невідомими функціями $w_1(t)$ і $w_2(t)$. Шукану систему знаходимо таким чином. Підставимо (2.1) у рівняння (1.1):

$$-\frac{w_1'}{w_1}\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{w_2'}{w_1}\frac{1}{\varphi'} = \left(-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2}\right)\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_1}\frac{G}{\varphi'} + H(u). \tag{2.2}$$

Якщо розв'язок рівняння (1.1) вигляду (2.1) існує, то рівність (2.2) означає, що функції

$$\frac{\varphi}{\varphi'},\ \ \frac{1}{\varphi'},\ \ -F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2},\ \ \frac{G}{\varphi'} \tag{2.3}$$

є лінійно залежними. Функції $\dfrac{\varphi}{\varphi'}, \dfrac{1}{\varphi'}$ є лінійно незалежними, на всі інші функції (2.3) накладемо вимогу, щоб їх можна було записати у вигляді лінійної комбінації функцій $\dfrac{\varphi}{\varphi'}$ і $\dfrac{1}{\varphi'}$. Отримаємо

$$-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_1\frac{1}{\varphi'}, \tag{2.4}$$

$$G = \lambda_2\varphi + \mu_2, \tag{2.5}$$

$$H = \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_3\frac{1}{\varphi'}, \tag{2.6}$$

де $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Підставимо (2.4)–(2.6) у рівняння (2.2):

$$\left(-\frac{w_1'}{w_1} - \frac{\lambda_1}{w_1^2} - \frac{\lambda_2}{w_1} - \lambda_3\right)\frac{\varphi}{\varphi'} + \left(-\frac{w_2'}{w_1} - \frac{\mu_1}{w_1^2} - \frac{\mu_2}{w_1} - \mu_3\right)\frac{1}{\varphi'} = 0. \tag{2.7}$$

Функції $\dfrac{\varphi}{\varphi'}, \dfrac{1}{\varphi'}$ є лінійно незалежними, а тому рівняння (2.7) розпадається на систему двох рівнянь:

$$\frac{w_1'}{w_1} + \frac{\lambda_1}{w_1^2} + \frac{\lambda_2}{w_1} + \lambda_3 = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{w_2'}{w_1} + \frac{\mu_1}{w_1^2} + \frac{\mu_2}{w_1} + \mu_3 = 0. \tag{2.9}$$

Нехай $F'(u) \neq 0$. Інтегруючи рівняння (2.4), яке є лінійним відносно функції $F = F(u)$, знаходимо

$$F = \left(\lambda_1\int\varphi du + \mu_1 u + A\right)\varphi', \quad A \text{ — довільна стала.} \tag{2.10}$$

В результаті отримуємо таку теорему.

Теорема 2.1. *Нехай у рівнянні* (1.1) $F'(u) \neq 0$. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (2.1), *то функції* $F(u)$, $G(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються формулами* (2.10), (2.5) *і* (2.6) *відповідно, а* w_1, w_2 *є розв'язками системи рівнянь* (2.8), (2.9).

Згідно з теоремою 2.1, функція $\varphi(u)$ в підстановці (2.1) задається довільно, а функції $F(u)$, $G(u)$ і $H(u)$ виражаються через функцію $\varphi(u)$. Відшукання розв'язків вигляду (2.1) рівняння (1.1) зводиться тепер до інтегрування системи (2.8), (2.9). Систему (2.8), (2.9) запишемо в іншому вигляді, перейшовши до нових функцій v_1, v_2:

$$v_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{w_1}.$$

Тоді система (2.8), (2.9) набирає вигляду

$$v_1' = \lambda_1 v_1^3 + \lambda_2 v_1^2 + \lambda_3 v_1, \tag{2.11}$$

$$v_2' = (\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3) v_2 + \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_1 + \mu_3. \tag{2.12}$$

Розглянемо три випадки.

1. ***Випадок*** $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda_3 = 0}$**.** Рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_3 \frac{1}{\varphi'}, \tag{2.13}$$

де функція $F(u)$ визначається за формулою (2.10). Розв'язок системи (2.11), (2.12) для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ визначається формулами

$$v_1 = \big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{-1/2},$$

$$v_2 = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{2\lambda_1}\big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{1/2} - \frac{\mu_3}{3\lambda_1}\big[-2\lambda_1(t + c_1)\big] + c_2\big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{-1/2},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. В результаті отримуємо точний розв'язок рівняння (2.13):

$$\varphi(u) = \big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{-1/2} x + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{2\lambda_1}\big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{1/2} + \\ + \frac{\mu_3}{3\lambda_1}\left[-2\lambda_1(t + c_1)\right] - c_2\big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{-1/2}. \tag{2.14}$$

Якщо в (2.14) покласти $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, $c_2 = 0$, то одержимо автомодельні розв'язки

$$\varphi(u) = \big[-2\lambda_1(t + c_1)\big]^{-1/2} x \tag{2.15}$$

рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{2.16}$$

де функція $F(u)$ визначається формулою (2.10). Розв'язки вигляду (2.15) вивчено в [3].

2. ***Випадок*** $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$, $\boldsymbol{\lambda_3 \neq 0}$**.** Розв'язок системи (2.11), (2.12) у даному випадку визначається формулами

$$v_1 = c_1 \exp(\lambda_3 t),$$

$$v_2 = \frac{\mu_1 c_1^2}{\lambda_3} \exp(2\lambda_3 t) + \mu_2 c_1 t \exp(\lambda_3 t) - \frac{\mu_3}{\lambda_3} + c_3 \exp(\lambda_3 t).$$

Рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu_1 u + A)\varphi' \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \mu_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varphi'}(\lambda_3 \varphi + \mu_3), \tag{2.17}$$

і це рівняння має таку сім'ю розв'язків:

$$\varphi(u) = c_1 x \exp(\lambda_3 t) - \frac{\mu_1 c_1^2}{\lambda_3} \exp(2\lambda_3 t) - \mu_2 c_1 t \exp(\lambda_3 t) + \frac{\mu_3}{c_3} - c_3 \exp(\lambda_3 t). \tag{2.18}$$

Якщо в (2.18) покласти $\mu_2 = 0$, то отримаємо сім'ю розв'язків

$$\varphi(u) = c_1 x \exp(\lambda_3 t) - \frac{\mu_1 c_1^2}{\lambda_3} \exp(2\lambda_3 t) + \frac{\mu_3}{c_3} - c_3 \exp(\lambda_3 t)$$

рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu_1 u + A)\varphi' \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{\varphi'}(\lambda_3 \varphi + \mu_3). \tag{2.19}$$

3. ***Випадок*** $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0}$**.** У цьому випадку рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu_1 u + A)\varphi' \frac{\partial u}{\partial x}\right] + (\lambda_2 \varphi + \mu_2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varphi'}(\lambda_3 \varphi + \mu_3). \tag{2.20}$$

Розв'язок системи (2.11), (2.12) визначається формулами

$$v_1 = \frac{\lambda_3 c_1 \exp(\lambda_3 t)}{c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t)},$$

$$v_2 = -\frac{\mu_1 \lambda_3 c_1}{\lambda_2} \frac{\exp(\lambda_3 t)}{c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t)} \ln|c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t)| +$$

$$+(\mu_2 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_2) c_1 t \frac{\exp(\lambda_3 t)}{c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t)} -$$

$$-\frac{\mu_3 c_2}{\lambda_3 (c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t))} + \frac{\lambda_3 c_3 \exp(\lambda_3 t)}{c_2 - \lambda_2 c_1 \exp(\lambda_3 t)}.$$

Підставивши ці значення v_1 і v_2 у формулу $\varphi(u) = v_1 x - v_2$, отримаємо розв'язок рівняння (2.20).

3. Точні розв'язки рівняння (1.1) вигляду $\boldsymbol{\exp(kx) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)}$**.** Розв'язки рівняння (1.1) будемо знаходити за схемою, що описана в п. 2. Для побудови розв'язків використаємо підстановку

$$\exp(kx) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t), \quad k \neq 0. \tag{3.1}$$

Підставимо рівняння (3.1) у рівняння (1.1):

$$-\frac{w_1'}{w_1}\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{w_2'}{w_1}\frac{1}{\varphi_1'} = \left[-Fk^2 \frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'k^2 \frac{1}{(\varphi')^2}\right] \frac{w_2^2}{w_1^2} +$$

$$+\left[-2Fk^2\frac{\varphi\varphi''}{(\varphi')^3}+2F'k^2\frac{\varphi}{(\varphi')^2}+Gk\frac{1}{(\varphi')^2}\right]\frac{w_2}{w_1}+$$

$$+\left[Fk-Fk^2\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2}+Gk\frac{\varphi}{\varphi'}+H\right]. \qquad (3.2)$$

У рівнянні (3.2) коефіцієнти $\dfrac{\varphi}{\varphi'}$ і $\dfrac{1}{\varphi'}$ при функціях $-\dfrac{w_1'}{w_1}$ і $-\dfrac{w_2'}{w_1}$ є лінійно незалежними. На коефіцієнти при функціях $\dfrac{w_2^2}{w_1^2}$, $\dfrac{w_2}{w_1}$, а також на функцію

$$Fk-Fk^2\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2}+Gk\frac{\varphi}{\varphi'}+H$$

накладемо вимогу, щоб їх можна було записати у вигляді лінійної комбінації функцій $\dfrac{\varphi}{\varphi'}$ і $\dfrac{1}{\varphi'}$. Отримаємо

$$-Fk^2\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{1}{(\varphi')^2}=\lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_1\frac{1}{\varphi'}, \qquad (3.3)$$

$$-2Fk^2\frac{\varphi\varphi''}{(\varphi')^3}+2F'k^2\frac{\varphi}{(\varphi')^2}+Gk\frac{1}{\varphi'}=\lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_2\frac{1}{\varphi'}, \qquad (3.4)$$

$$Fk-Fk^2\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2}+Gk\frac{\varphi}{\varphi'}+H=\lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_3\frac{1}{\varphi'}. \qquad (3.5)$$

Розглянемо випадок $F'(u)\neq 0$. Інтегруючи рівняння (3.3), яке є лінійним відносно функції $F(u)$, знаходимо

$$F=\left(\frac{\lambda_1}{k^2}\int\varphi du+\frac{\mu_1}{k^2}u+A\right)\varphi', \qquad A \text{ — довільна стала.} \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.4) запишемо у вигляді

$$2\varphi\left[-Fk^2\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{1}{(\varphi')^2}\right]+Gk\frac{1}{\varphi'}=\lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_2\frac{1}{\varphi'} \qquad (3.7)$$

і підставимо (3.3) в (3.7):

$$2\varphi\left[\lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_1\frac{1}{\varphi'}\right]+Gk\frac{1}{\varphi'}=\lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_2\frac{1}{\varphi'}. \qquad (3.8)$$

З рівності (3.8) знаходимо

$$G=\frac{1}{k}\big[-2\lambda_1\varphi^2+(\lambda_2-2\mu_1)\varphi+\mu_2\big]. \qquad (3.9)$$

Рівняння (3.5) запишемо в вигляді

$$Fk+\varphi^2\left[-Fk^2\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}+F'k^2\frac{1}{(\varphi')^2}\right]+Gk\frac{\varphi}{\varphi'}+H=\lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}+\mu_3\frac{1}{\varphi'} \qquad (3.10)$$

і підставимо (3.3) і (3.9) у (3.10):

$$Fk + \varphi^2\left[\lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_1\frac{1}{\varphi'}\right] + \left[-2\lambda_1\varphi^2 + (\lambda_2 - 2\mu_1)\varphi + \mu_2\right] + H = \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_3\frac{1}{\varphi'}. \tag{3.11}$$

З (3.11) знаходимо H:

$$H = \frac{1}{\varphi'}\left(-\lambda_1\varphi^3 - \mu_1\varphi^2 + \lambda_3\varphi + \mu_3\right) - \left[-2\lambda_1\varphi^2 + (\lambda_2 - 2\mu_1)\varphi + \mu_2\right] - Fk. \tag{3.12}$$

В результаті отримуємо таку теорему.

Теорема 3.1. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (3.1) *і* $F'(u) \neq 0$, *то функції* $F(u)$, $G(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються формулами* (3.6), (3.9) *і* (3.12) *відповідно, де* $\varphi(u)$ *є довільною наперед заданою функцією.*

Знайдемо систему двох звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій w_1 і w_2. З цією метою підставимо (3.3)–(3.5) у рівняння (3.2):

$$\left[-\frac{w_1'}{w_1} - \lambda_1\frac{w_2^2}{w_1^2} - \lambda_2\frac{w_2}{w_1} - \lambda_3\right]\frac{\varphi}{\varphi'} + \\ + \left[-\frac{w_2'}{w_1} - \mu_1\frac{w_2^2}{w_1^2} - \mu_2\frac{w_2}{w_1} - \mu_3\right]\frac{1}{\varphi'} = 0. \tag{3.13}$$

Внаслідок лінійної незалежності функцій $\dfrac{\varphi}{\varphi'}$, $\dfrac{1}{\varphi'}$ із рівняння (3.13) отримуємо систему двох рівнянь:

$$-\frac{w_1'}{w_1} - \lambda_1\frac{w_2^2}{w_1^2} - \lambda_2\frac{w_2}{w_1} - \lambda_3 = 0, \tag{3.14}$$

$$-\frac{w_2'}{w_1} - \mu_1\frac{w_2^2}{w_1^2} - \mu_2\frac{w_2}{w_1} - \mu_3 = 0. \tag{3.15}$$

Виділимо випадок $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$, коли систему (3.14), (3.15) можна зінтегрувати. З рівняння (3.14) знаходимо

$$w_2 = \frac{1}{\lambda_2}(w_1' - \lambda_3 w_1). \tag{3.16}$$

Підставимо (3.16) у рівняння (3.15):

$$w_1 w_1'' + a(w_1')^2 + b w_1 w_1' + c w_1^2 = 0, \tag{3.17}$$

де

$$a = -\frac{\mu_1}{\lambda_2}, \qquad b = \lambda_3 - \frac{2\lambda_3\mu_1}{\lambda_2} + \mu_2, \qquad c = -\frac{\mu_1\lambda_3^2}{\lambda_2} + \lambda_2\mu_2 - \lambda_2\mu_3.$$

Якщо в рівнянні (3.17) $a \neq -1$, то воно підстановкою

$$y^{1/(a+1)} = w_1 \tag{3.18}$$

зводиться до рівняння

$$y'' + by' + (a+1)cy = 0. \tag{3.19}$$

Можливі три випадки.

1. $\boldsymbol{\lambda^2 = b^2 - 4(a+1)c > 0}$. Інтегруючи рівняння (3.19), знаходимо

$$y = C_1 \exp\left(\frac{-b+\lambda}{2}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-b-\lambda}{2}t\right),$$

де $C_1,\ C_2$ — сталі.

2. $\boldsymbol{\lambda^2 = 4(a+1)c - b^2 > 0}$**.** Інтегруючи рівняння (3.19), отримуємо

$$y = \exp\left(-\frac{b}{2}t\right)\left[C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\lambda t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)\right].$$

3. $\boldsymbol{4(a+1)c = b^2}$**.** Розв'язком рівняння (3.19) є функція

$$y = \exp\left(-\frac{b}{2}t\right)(C_1 t + C_2).$$

Звідси знаходимо функцію w_1:

у першому випадку

$$w_1 = \left[C_1 \exp\left(\frac{-b+\lambda}{2}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-b-\lambda}{2}t\right)\right]^{1/(a+1)}, \tag{3.20}$$

у другому випадку

$$w_1 = \left[\exp\left(-\frac{b}{2}t\right)\left(C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\lambda t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)\right)\right]^{1/(a+1)} \tag{3.21}$$

і у третьому випадку

$$w_1 = \left[\exp\left(-\frac{b}{2}t\right)(C_1 t + C_2)\right]^{1/(a+1)}. \tag{3.22}$$

Таким чином, у випадку $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ і $a \neq -1$ рівняння (1.1), де функції $F(u),\ G(u)$ і $H(u)$ визначаються формулами (3.6), (3.9) і (3.12) відповідно, має розв'язки вигляду (3.1), при цьому w_1 є однією з функцій (3.20)–(3.22), а w_2 визначається формулою (3.16).

Якщо $a = -1$, то рівняння (3.17) підстановкою $w_1' = w_1 v(t)$ зводиться до рівняння

$$v' + bv + C = 0. \tag{3.23}$$

Інтегруючи рівняння (3.23), знаходимо

$$v = C_1 \exp(-bt) - \frac{C}{b},$$

якщо $b \neq 0$. Звідси

$$w_1 = C_2 \exp\left[-\frac{C_1}{b}\exp(-bt) - \frac{C}{b}t\right], \tag{3.24}$$

а тому на підставі (3.16)

$$w_2 = \frac{1}{\lambda_2}\left[-C_1 \exp(-bt) + \frac{C}{b} - \lambda_3\right] w_1, \tag{3.25}$$

де $C_1,\ C_2$ — сталі, $C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$.

Таким чином, у випадку $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \mu_1 = \lambda_2$ і $b \neq 0$ рівняння (1.1), де функції $F(u)$, $G(u)$ і $H(u)$ визначаються формулами (3.6), (3.9) і (3.12) відповідно, має сім'ю розв'язків вигляду (3.1), при цьому w_1 має вигляд (3.24), а w_2 — (3.25).

Якщо у рівнянні (3.20) $b = 0$, то

$$w_1 = C_2 \exp\left(-\frac{C}{2}t^2 + C_1 t + C_3\right),$$

$$w_2 = \frac{1}{\lambda_2} w_1 (Ct - C_1 - \lambda_3),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ — довільні сталі, $C_2 \neq 0$. В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (1.1) у випадку $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \mu_1 = \lambda_2$ і $\lambda_3 = \mu_2$:

$$\exp(kx) = C_2 \varphi(u) \left(-\frac{C}{2}t^2 + C_1 t + C_3\right) +$$

$$+\frac{C_2}{\lambda_2}(Ct - C_1 - \lambda_3)\left(-\frac{C}{2}t^2 + C_1 t + C_3\right).$$

4. Точні розв'язки рівняння (1.4). Для побудови точних розв'язків рівняння (1.4) можна використати підстановку

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u), \tag{4.1}$$

де $p(x)$ — розв'язок рівняння

$$(p')^2 = Ap^2 + B, \qquad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Ця підстановка є частинним випадком підстановки (1.6), якщо в ній покласти $w_2(t) = 0$. Функції $\varphi(u),\ w_1(t)$ визначаємо з умови, що підстановка (4.1) редукує рівняння (1.4) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w_1(t)$. Для визначення функцій $F(u)$ і $\varphi(u)$ отримуємо таку систему рівнянь:

$$-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_2 \frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{4.2}$$

$$-FA\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + F'A\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + FA\frac{\varphi}{\varphi'} + H = \lambda_3 \frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{4.3}$$

де $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Нехай $F'(u) \neq 0$. Інтегруючи рівняння (4.2), яке є лінійним відносно функції $F = F(u)$, знаходимо

$$F = \left(\lambda_2 \int \varphi du + C_1\right)\varphi', \quad C_1 - \text{стала}. \tag{4.4}$$

Для визначення функції $w_1(t)$ отримуємо рівняння

$$\frac{w_1'}{w_1} + \lambda_2 B \frac{1}{w_1^2} + \lambda_3 = 0. \tag{4.5}$$

Якщо $\lambda_3 \neq 0,$ то розв'язком рівняння (4.5) є функція

$$w_1^2 = C_2 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} B, \qquad C_2 - \text{стала} \neq 0,$$

а у випадку$\lambda_3 = 0$ — функція

$$w_1^2 = -2\lambda_2 B t + C_2, \qquad C_2 - \text{стала}, \ \lambda_2 \neq 0.$$

З рівнянь (4.2), (4.3) знаходимо

$$H = \frac{1}{\varphi'} \left(-\lambda_2 A \varphi^3 - A F \varphi + \lambda_3 \varphi \right). \tag{4.6}$$

В результаті отримуємо таку теорему.

Теорема 4.1. *Якщо рівняння* (1.4) *допускає підстановку* (4.1) *і* $F'(u) \neq 0,$ *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються формулами* (4.4), (4.6) *відповідно, а функція* $w_1(t)$ *є розв'язком рівняння* (4.5).

Розв'язки рівняння (1.4) можна знайти, використавши підстановки:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= w_1(t)\,\mathrm{ch}(kx) + w_2(t)\,\mathrm{sh}(kx), &\qquad \text{якщо } A = k^2 > 0, \\ \varphi(u) &= w_1(t)\cos(kx) + w_2(t)\sin(kx), &\qquad \text{якщо } A = -k^2 < 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Розглянемо, наприклад, першу із підстановок (4.7). Якщо функції $F(u)$ і $H(u)$ визначаються формулами (4.4), (4.6) відповідно і $A = k^2 > 0,$ то підстановка (4.7) редукує рівняння (1.4) до системи

$$w_1' = \left(-\lambda_2 k^2 w_1^2 + \lambda_2 k^2 w_2^2 \right) w_1 + \lambda_3 w_1, \tag{4.8}$$

$$w_2' = \left(-\lambda_2 k^2 w_1^2 + \lambda_2 k^2 w_2^2 \right) w_2 + \lambda_3 w_2. \tag{4.9}$$

Нехай $w_1 \neq 0.$ З рівнянь (4.8) і (4.9) випливає, що $w_2 = C w_1,$ C — стала. Рівняння (4.8) набирає вигляду

$$w_1' = \lambda_2 k^2 (C - 1) w_1^3 + \lambda_3 w_1. \tag{4.10}$$

Якщо $\lambda_3 \neq 0,$ то розв'язком рівняння (4.10) є функція

$$w_1^2 = \left[C_2 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} k^2 (C^2 - 1) \right]^{-1}, \qquad C_2 - \text{стала} \neq 0.$$

Маємо такий розв'язок рівняння (1.4):

$$\varphi(u) = \left[C_2 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} k^2 (C^2 - 1) \right]^{-1/2} \left[\mathrm{ch}(kx) + C\,\mathrm{sh}(kx) \right].$$

Якщо $\lambda_3 = 0,$ то розв'язком рівняння (4.10) є функція

$$w_1^2 = \left[-2\lambda_2 k^2 (C^2 - 1) t + C_2 \right]^{-1}, \qquad C_2 - \text{стала}, \lambda_2 \neq 0.$$

В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (1.4):

$$\varphi(u) = \left[-2\lambda_2 k^2 (C^2 - 1)t + C_2\right]^{-1/2} \left[\operatorname{ch}(kx) + C \operatorname{sh}(kx)\right].$$

Випадок $w_1 = 0$ зводиться до інтегрування рівняння

$$w_2' = \lambda_2 k^2 w_2^3 + \lambda_3 w_2.$$

Отже, якщо $\lambda_3 \neq 0$, то розв'язок рівняння (1.1) має вигляд

$$\varphi(u) = \left[C_2 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} k^2\right]^{-1/2} \operatorname{sh}(kx),$$

де C_2 — ненульова стала, а у випадку $\lambda_3 = 0$ — вигляд

$$\varphi(u) = (-2\lambda_2 k^2 t + C_2)^{-1/2} \operatorname{sh}(kx), \qquad C_2 \text{ — стала.}$$

Таким чином, описано рівняння (1.1), які допускають підстановку (1.6). Функції $F(u)$, $G(u)$ і $H(u)$, які входять до рівняння (1.1), виражаються через функцію $\varphi(u)$, яка задається довільно, а відповідна система для знаходження функцій $w_1(t)$ і $w_2(t)$ в багатьох випадках повністю інтегрується. Довільний вибір функції $\varphi(u)$ в підстановці (1.6) дозволяє проводити пошук розв'язків рівняння (1.1), що задовольняють наперед задані умови. Ці зауваження стосуються також і рівняння (1.4), яке є частинним випадком рівняння (1.1). Крім того, підстановка (4.1) дозволяє знаходити суттєво нові розв'язки рівнянь (1.1) і (1.4). Метод побудови розв'язків рівнянь (1.1) і (1.4), викладений у пп. 2 і 3, можна використати також для побудови розв'язків багатьох інших рівнянь, зокрема нелінійних хвильових рівнянь.

Література

1. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004.
2. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С. 492 – 495.
3. *Philip G. R.* General method of exact solutions of the concentration-dependent diffusion equation // Austral. J. Phys. – 1960. – **13**, № 1. – P. 13 – 20.
4. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. – М., 1979. – 32 с. – (Препринт / АН СССР, Ин-т прикл. математики; 57).
5. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1982. – **22**, № 6. – С. 1393 – 1400.
6. *Дородницын В. А., Свирщевский С. Р.* О группах Ли – Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. – М., 1983. – 28 с. – (Препринт / АН СССР, Ин-т прикл. математики; 101).
7. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1986. – **28**. – С. 95 – 206.
8. *CRC handbook* of the group to differential equations, Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws / Ed. by N. H. Ibragimov. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 429 p.
9. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in generate diffusion equations // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1985. – **9**, № 9. – P. 987 – 1008.
10. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 4. – С. 497 – 506.

11. *Galaktionov V. A.* Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1995. – **125**, № 2. – P. 225 – 448.
12. *Галактионов В. А., Посашков С. А., Свирщевский С. Р.* Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 2. – С. 253 – 261.
13. *Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics // Chapman & Hall/CRC Appl. Math. and Nonlinear Sci. Ser. – 2007.
14. *Kersner R.* On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1978. – **32**, № 3-4. – P. 301 – 330.
15. *Nikitin A. G., Barannyk T. A.* Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Centr. Eur. Sci. J. – 2004. – **2**, № 5. – P. 840 – 858.
16. *Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I.* Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg – de Vries type // Rep. Math. Phys. – 2011. – **68**, № 1. – P. 92 – 105.
17. *Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I.* Generalized separation of variables for nonlinear equation $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$ // Rep. Math. Phys. – 2013. – **71**, № 1. – P. 1 – 13.

Одержано 21.03.19