УДК 517.587

В. Л. Макаров, Н. М. Романюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Б. Й. Бандирський (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

УЗАГАЛЬНЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПОЛІНОМІВ ТИПУ ЛАГЕРРА І ЛЕЖАНДРА НА РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

A recurrent algorithm for finding particular solutions of a fourth-order resonance equation connected with the generalization of Laguerre and Legendre polynomials is constructed and substantiated. For this purpose, we use the general theorem on the representation of partial solutions of resonance equations in Banach spaces, which was proved by V. L. Makarov in 1976. An example of general solution to the resonant equations with a differential operator for the Laguerre-type polynomials is presented.

Побудовано й обґрунтовано рекурентний алгоритм знаходження частинних розв’язків резонансного рівняння четвертого порядку, пов’язаного з узагальненням поліномів Лагерра і Лежандра. Для цього використано загальну теорему про зображення частинних розв’язків резонансних рівнянь у банахових просторах, доведену В. Л. Макаровим у 1976 р. Наведено приклад загального розв’язку резонансних рівнянь із диференціальним оператором для поліномів типу Лагерра.

1. Вступ. Явище резонансу відіграє важливу роль у природі та в різноманітних технічних застосуваннях, наприклад у медичній діагностиці (magnetic resonance imaging або nuclear spin tomography), динаміці твердих тіл і рідин тощо. В літературі є різні означення математичного резонансу. Наприклад, в [1] гранична задача називається резонансною, якщо оператор, визначений диференціальним рівнянням і граничними умовами, не має оберненого. В даній роботі ми будемо дотримуватись такого означення (див. [2 – 5]).

Означення 1. *Рівняння $Lf = g$ з правою частиною, що задовольняє рівняння $Lg = 0$ (або, іншими словами, належить ядру $N(L)$ оператора L), називається резонансним.*

Такі рівняння, наприклад, є складовою частиною функціонально-дискретного (FD-) методу розв’язування операторних рівнянь і задач на власні значення [6, 7]. Ці рівняння виникають у теорії суперсиметричних операторів Казиміра та ді-спін алгебр [2, 3]. Вони виникають також при розв’язуванні операторних рівнянь вигляду $A^2u = 0$ з деяким оператором A. Якщо ввести позначення $Au = v$, то це рівняння зведеться до пари рівнянь $Av = 0,\ Au = v$, друге з яких є резонансним.

Загальний алгоритм знаходження частинних розв’язків резонансних рівнянь першого і другого роду із диференціальними операторами другого порядку, що визначають класичні ортогональні поліноми Якобі, Лагерра й Ерміта, було запропоновано й обґрунтовано у роботах [8 – 10].

У даній роботі ми пропонуємо та обґрунтовуємо загальний алгоритм знаходження частинних розв’язків резонансних рівнянь із диференціальними операторами четвертого порядку, що визначають узагальнення класичних ортогональних поліномів Лагерра і Лежандра, як один із чотирьох лінійно незалежних розв’язків відповідного однорідного диференціального рівняння. Інші лінійно незалежні розв’язки однорідного рівняння не є поліноміальними, будемо називати їх функціями другого, третього і четвертого роду. За допомогою цих чотирьох лінійно незалежних розв’язків однорідного рівняння, а також частинного розв’язку неоднорідного рівняння можна записати загальний розв’язок неоднорідного резонансного рівняння.

Правильним є таке твердження [4, 5].

Теорема 1. *Нехай A — лінійний оператор, що діє з банахового простору X в X, і зв'язна множина $\Sigma(A)$, яка лежить у комплексній площині, є спектром A. Якщо $\lambda \in \Sigma(A)$, $f(\lambda) \in \in N(A-\lambda E)$ — сильно диференційовна функція, то частинний розв'язок резонансного рівняння*

$$(A-\lambda)u = f(\lambda)$$

можна записати у вигляді

$$u(\lambda) = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}. \tag{1}$$

Розглянемо диференціальний оператор четвертого порядку

$$A_n u(x) = \sum_{p=0}^{3} a_{4-p}(x) \frac{d^{4-p}u(x)}{dx^{4-p}} - \lambda(n)u(x),$$

$$a_{4-p}(x) = \sum_{k=0}^{4-p} b_{4-p,k}x^k, \qquad \lambda(n) = \sum_{i=1}^{4} b_{i,i} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-i+1)},$$

де $a_4(x) = \sigma(x)^2 = (c_2x^2 + c_1x + c_0)^2$. Цей оператор для різних значень параметрів визначає ортогональні многочлени типу Лагерра і Лагранжа. Такі многочлени (які ми для всіх ортогональних многочленів типу класичних позначатимемо через $\widehat{P}_n(x)$) є одними з чотирьох лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння

$$A_n u = 0 \tag{2}$$

або функціями першого роду. Іншими лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння є відповідні функції другого, третього і четвертого роду $\widehat{Q}_{n,k}(x),\ k = 2, 3, 4$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді

$$u(x) = c_1\widehat{P}_n(x) + c_2\widehat{Q}_{n,2}(x) + c_3\widehat{Q}_{n,3}(x) + c_4\widehat{Q}_{n,4}(x),$$

де $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ — довільні сталі. З метою скорочення викладу будемо застосовувати позначення $R_{n,k}(x)$, коли йтиметься про функції першого, другого, третього або четвертого роду.

Функції першого роду (ортогональні многочлени типу класичних) і функції другого, третього та четвертого роду (які не є многочленами) задовольняють одне й те ж диференціальне рівняння (2). Щодо рекурентного співвідношення, то функції першого і другого роду задовольняють рекурентне співвідношення

$$R_{n+1,k}(x) = (\alpha_n x + \beta_n)R_{n,k}(x) - \gamma_n R_{n-1,k}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2,$$

а функції третього і четвертого роду — співвідношення

$$R_{n+1,k}(x) = (\kappa_n x + \mu_n)R_{n,k}(x) - \nu_n R_{n-1,k}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 3, 4,$$

з певними не залежними від x коефіцієнтами $\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \kappa_n,\ \mu_n,\ \nu_n$, що є принциповою відмінністю у порівнянні з диференціальними рівняннями другого порядку [11].

Неоднорідне рівняння

$$A_n u_n(x) = \widehat{P}_n(x) \tag{3}$$

є резонансним, будемо називати його резонансним рівнянням першого роду. Неоднорідне рівняння

$$A_n u_n(x) = \widehat{Q}_{n,k}(x) \tag{4}$$

будемо називати резонансним рівнянням k-го роду. Загальний розв'язок неоднорідних резонансних рівнянь можна записати у вигляді

$$u(x) = c_1 \widehat{P}_n(x) + c_2 \widehat{Q}_{n,2}(x) + c_3 \widehat{Q}_{n,3}(x) + c_4 \widehat{Q}_{n,4}(x) + \hat{u}_n^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

де $\hat{u}_n^{(k)}(x)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння k-го роду, а c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі.

Для знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь із диференціальними операторами ортогональних многочленів типу класичних ми пропонуємо такий алгоритм.

***Крок* 1.** За допомогою формули (1) знаходимо частинні розв'язки резонансного рівняння (3) або (4) для $n = 0, 1$. Позначимо їх

$$\chi_0(x) = \frac{1}{\lambda'(n)} \frac{d\,\mathrm{R}_\nu(x)}{d\nu}\bigg|_{\nu=0}, \qquad \chi_1(x) = \frac{1}{\lambda'(n)} \frac{d\,\mathrm{R}_\nu(x)}{d\nu}\bigg|_{\nu=1}. \tag{5}$$

Тут і далі диференціювання за натуральним параметром n означає: 1) перехід до дійсного параметра ν, тобто використання відповідних зображень $\mathrm{R}_\nu(x)$ через гіпергеометричні чи вироджені гіпергеометричні функції; 2) диференціювання за дійсним параметром ν; 3) заміну у виразі для похідної дійсного ν на ціле невід'ємне n).

***Крок* 2.** Будуємо такі початкові частинні розв'язки резонансного рівняння:

$$u_0(x) = \chi_0(x), \qquad u_1(x) = \chi_1(x) \tag{6}$$

і за рекурентним співвідношенням

$$u_{n+1}(x) = -\frac{1}{\lambda'(n+1)} \Bigg[-\lambda'(n)(\alpha_n x + \beta_n) u_n(x) + \lambda'(n-1)\gamma_n u_{n-1}(x) + \\ + \left(\frac{d\alpha_n}{dn} x + \frac{d\beta_n}{dn} \right) R_n(x) - \frac{d\gamma_n}{dn} R_{n-1}(x) \Bigg], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

визначаємо функцію $u_2(x)$, яка задовольняє резонансне диференціальне рівняння.

***Крок* 3.** Шляхом диференціювання рекурентного співвідношення

$$R_{n+1,k}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) R_{n,k}(x) - \gamma_n R_{n-1,k}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \tag{8}$$

для ортогональних поліномів типу класичних чи, відповідно, функцій 2-го роду за параметром n приходимо до рекурентного співвідношення (7) для частинних розв'язків резонансного рівняння першого або другого роду. Покладаючи у співвідношенні (7) $n = 1$ і підставляючи початкові частинні розв'язки (5), переконуємось, що одержаний вираз задовольняє резонансне рівняння для $n = 2$.

За допомогою методу математичної індукції доводиться така теорема.

Теорема 2. *Функції* $u_{n+1}(x)$, *побудовані за рекурентним алгоритмом* (5) – (8), *задовольняють для всіх* n *резонансне рівняння першого або*, *відповідно*, *другого роду.*

2. Резонансні рівняння для поліномів типу Лагерра першого роду. Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\mathfrak{A}_n y(x) = x^2\frac{d^4y(x)}{dx^4} - (2x^2-4x)\frac{d^3y(x)}{dx^3} + (x^2-10x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (6x-4)\frac{dy(x)}{dx} + \lambda(n)y(x) =$$

$$= \sum_{p=0}^{4} b_{4-p}(x)\frac{d^{4-p}y(x)}{dx^{4-p}} = 0, \quad x>0. \tag{9}$$

Як показано у [12], при

$$\lambda = \lambda(n) = -n^2 - 5n$$

поліноміальними розв'язками рівняння (9) будуть

$$v_n(x) = (n+2)L_n(x) + \frac{d}{dx}L_n(x) = (n+2)L_n(x) - L_{n-1}^1(x), \tag{10}$$

де $L_n^\alpha(x)$ — поліном Лагерра. Поліноми (10) є ортогональними в сенсі скалярного добутку

$$\int\limits_0^\infty \exp(-x)v_n(x)v_m(x)dx + \frac{1}{2}v_n(0)v_m(0) = \delta_{n,m}(n^2+5n+6)$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)v_n(x) - C_n v_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$A_n = -\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}, \qquad B_n = \frac{2n^3+11n^2+17n+4}{(n+2)^2(n+1)}, \qquad C_n = \frac{(n+3)^2 n}{(n+2)^2(n+1)}. \tag{11}$$

Нашою основною задачею є побудова частинного розв'язку резонансного рівняння

$$\mathfrak{A}_n y(x) = v_n(x). \tag{12}$$

Для її розв'язання скористаємось запропонованим алгоритмом. Використовуючи зображення поліномів Лагерра через вироджену гіпергеометричну функцію

$$L_n(x) = \Phi(-n,1;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{(k!)^2}x^k,$$

де $(\cdot)_k$ — символ Похгамера, і теорему 1, одержуємо

$$u_n(x) = L_n(x) + (n+2)\left.\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi(-\nu,1;x)\right|_{\nu=n} + \left.\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{d}{dx}\Phi(-\nu,1;x)\right|_{\nu=n}.$$

Звідси маємо

$$\chi_0(x) = \frac{1}{5}\left[1 + 2w(x) - \frac{e^x-1}{x}\right],$$

$$\chi_1(x) = \frac{1}{7}\left[(-3x+2)w(x) - \frac{(3x+1)e^x-1}{x} + 2x + 4\right],$$

$$\chi_2(x)=\frac{1}{9}\left[v_2(x)w(x)+\frac{(2x^2-5x-1)e^x+1}{x}-\frac{5}{2}x^2+x+6\right], \tag{13}$$

$$\chi_3(x)=\frac{1}{11}\left[v_3(x)w(x)+\frac{(-5x^3+37x^2-40x-6)e^x+6}{6x}+\frac{49}{36}x^3-\frac{13}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{23}{3}\right],$$

$$w(x)=Ei_1(-x)+\ln(-x)+\gamma.$$

На наступному кроці алгоритму, використовуючи теорему 1, диференціюємо рекурентне співвідношення (11) по n і одержуємо

$$u_{n+1}(x)=\frac{1}{\lambda'(n+1)}\left[(A_nx+B_n)\lambda'(n)u_n(x)-C_n\lambda'(n-1)u_{n-1}(x)+\right.$$
$$\left.+(A_n'x+B_n')v_n(x)-C_n'v_{n-1}(x)\right],\quad n=1,2,\ldots. \tag{14}$$

Підстановка у (14) при $n=1$ початкових даних із (13) приводить до функції, яка є розв'язком резонансного рівняння (12) при $n=2$. Тому підправляти початкові дані з (13) не потрібно, і ми переходимо до доведення такого твердження.

Теорема 3. *Функції, що одержуються за допомогою рекурентного співвідношення* (14) *із початковими даними* $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$ *з* (13), *є розв'язками резонансного рівняння* (12).

Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n=1$ теорема є правильною. Припустимо, що вона є правильною при $n=2,3,\ldots,k$, і покажемо, що вона буде правильною і при $n=k+1$. Покладемо у (14) $n=k$, подієм на обидві частини одержаної рівності оператором $\mathfrak{A}_{k+1}$ і скористаємося припущенням індукції. Тоді отримаємо

$$\mathfrak{A}_{k+1}u_{k+1}(x)=\frac{1}{\lambda'(k+1)}\left[\sum_{p=0}^{3}b_{4-p}(x)(4-p)A_k\,\lambda'(k)\frac{d^{3-p}u_k(x)}{dx^{3-p}}-\right.$$
$$-(A_kx+B_k)\lambda'(k)(\lambda(k+1)-\lambda(k))u_k(x)+$$
$$+C_k\lambda'(k-1)(\lambda(k+1)-\lambda(k-1))u_{k-1}(x)+(A_kx+B_k)\lambda'(k)v_k(x)-$$
$$-C_k\lambda'(k-1)v_{k-1}(x)+\sum_{p=0}^{3}b_{4-p}(x)(4-p)A_k'\frac{d^{3-p}v_k(x)}{dx^{3-p}}-(A_k'x+B_k')(\lambda(k+1)-$$
$$\left.-\lambda(k))v_k(x)-C_k'(\lambda(k+1)-\lambda(k-1))v_{k-1}(x)\right],\quad k=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Для спрощення правої частини формули (15) нам знадобиться формула диференціювання узагальнених поліномів Лагерра (10), яка має вигляд

$$x^2\frac{d^3v_n(x)}{dx^3}-\frac{3}{2}(x^2-2x)\frac{d^2v_n(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}(x^2-10x)\frac{dv_n(x)}{dx}+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}nx+\frac{(2n+5)(n+3)n}{2(n+2)}\right)v_n(x)-\frac{(2n+5)(n+3)n}{2(n+2)}v_{n-1}(x)=0,\quad n=1,2,\ldots. \tag{16}$$

Доведення формули (16) проводиться за допомогою використання зображення (10) і властивостей поліномів Лагерра. Крім цієї формули нам знадобиться ще формула диференціювання частинних розв'язків резонансного рівняння (12). Диференціюючи формулу (16) по параметру n, згідно з теоремою 1 про зображення частинних розв'язків абстрактних резонансних рівнянь у банаховому просторі [4] маємо

$$(2n+5)\left\{x^2\frac{d^3u_n(x)}{dx^3} - \frac{3}{2}(x^2-2x)\frac{d^2u_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}(x^2-10x)\frac{du_n(x)}{dx} + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{1}{2}nx + \frac{(2n+5)(n+3)n}{2(n+2)}\right)u_n(x)\right\} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{4n^3+23n^2+44n+30}{2(n+2)^2}\right)v_n(x) -$$
$$-\frac{(2n+3)(2n+5)(n+3)n}{2(n+2)}u_{n-1}(x) - \frac{4n^3+23n^2+44n+30}{2(n+2)^2}v_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Повертаючись до (15), після нескладних, проте досить громіздких викладок із використанням формул диференціювання (16), (17) переконуємось у тому, що права частина (15) збігається з поліномом $v_{k+1}(x)$.

Теорему 3 доведено.

Розглянемо другий (із чотирьох лінійно незалежних) неполіноміальний розв'язок однорідного рівняння (9). За допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple визначаємо його структуру, а саме

$$v_{2,n}(x) = v_n(x)Ei_1(-x) + \frac{e^x}{x}p_n(x).$$

Тут поліноми $p_n(x)$ задовольняють те ж рекурентне співвідношення (11), але з іншими початковими даними

$$p_0(x) = -1, \qquad p_1(x) = -3x - 1.$$

Ці поліноми мають таке зображення:

$$p_n(x) = \sum_{p=0}^{n} k_{n,n-p}x^{n-p},$$
$$k_{n,n} = (-1)^n\frac{n+2}{n!},$$
$$k_{n,n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}(n^3+2n^2-2n-2),$$
$$k_{n,n-2} = (-1)^{n-2}\frac{1}{2n!}(n^5-7n^3+6n+8),$$
$$k_{n,0} = -1.$$

У загальному випадку визначення коефіцієнтів полінома $v_{2,n}(x)$ проводиться за рекурентною формулою

$$k_{s+1,p} = B_sk_{s,p} - C_sk_{s-1,p} + A_sk_{s,p-1}, \quad s = p-1, \ldots, n-1,$$
$$k_{p-2,p} = 0, \qquad k_{p-1,p} = 0, \qquad p = 1, \ldots, n, \quad k_{0,0} = -1,$$

з відповідними значеннями її коефіцієнтів.

Одержати зображення $v_{2,n}(x)$, яке матиме інший вигляд і буде більш зручним при побудові частинних розв'язків резонансних рівнянь другого роду, можна іншим способом. Для цього скористаємось формулою для функцій Лагерра другого роду

$$l_n(x) = \sum_{p=1}^{n+1} (-1)^{p+1} C_n^{p-1} Ei_p(-x) = \int_1^\infty \frac{\exp(tx)}{t} \left(\frac{t-1}{t}\right)^n dt,$$

яка одержується з відповідної інтегральної формули в [11, c. 163]. Далі за допомогою формули, подібної до (10), отримуємо

$$v_{2,n}(x) = (n+2) l_n(x) + \frac{d}{dx} l_n(x).$$

Наведемо один із шляхів можливого узагальнення попередніх формул.

Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\mathfrak{A}_n y(x) = x^2 \frac{d^4 y(x)}{dx^4} - (2x^2 - 4x) \frac{d^3 y(x)}{dx^3} + (x^2 - (\alpha+4)x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \\ + (\alpha x - \alpha + 2) \frac{dy(x)}{dx} - \lambda(n) y(x) = 0 \qquad (18)$$

з $\lambda(n) = n(n+\alpha-1)$, яке при $\alpha = 6$ збігається з рівнянням (9). Розв'язком рівняння (18) буде поліном

$$v_n^\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{2} - 1 + n\right) L_n(x) + \frac{d}{dx} L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (19)$$

Множина цих поліномів утворює ортогональну сім'ю у сенсі скалярного добутку

$$(v_n^\alpha, v_m^\alpha) = \int_0^\infty \exp(-x) v_n^\alpha(x) v_m^\alpha(x) dx + \frac{2}{\alpha - 2} v_n^\alpha(0) v_m^\alpha(0) = \\ = \delta_{m,n} \left(\frac{\alpha}{2} + n\right)\left(\frac{\alpha}{2} + n - 1\right).$$

При $\alpha = 6$ поліноми (19) із точністю до сталого множника збігаються з поліномами (10).

Далі наведемо рекурентне співвідношення для поліномів (19). Оскільки початковою інформацією для нас є формула для самих поліномів, то природно коефіцієнти рекурентного співвідношення виражати через коефіцієнти цих поліномів. Введемо позначення

$$v_n^\alpha(x) = \sum_{p=0}^n k_{n,p}^{v,\alpha} x^p, \qquad L_n(x) = \sum_{p=0}^n k_{n,p}^L x^p.$$

Тоді

$$v_{n+1}^\alpha(x) = (A_n^{v,\alpha} x + B_n^{v,\alpha}) v_n^{\alpha-6}(x) - C_n^{v,\alpha} v_{n-1}^\alpha(x),$$
$$A_n^{v,\alpha} = \frac{k_{n+1,n+1}^{v,\alpha}}{k_{n,n}^{v,\alpha}}, \qquad B_n^{v,\alpha} = \frac{k_{n+1,n+1}^{v,\alpha}}{k_{n,n}^{v,\alpha}} \left(\frac{k_{n+1,n}^{v,\alpha}}{k_{n+1,n+1}^{v,\alpha}} - \frac{k_{n,n-1}^{v,\alpha}}{k_{n,n}^{v,\alpha}}\right),$$
$$C_n^{v,\alpha} = \frac{1}{k_{n-1,n-1}^{v,\alpha}} \left(A_n^{v,\alpha} k_{n,n-2}^{v,\alpha-6} + B_n^{v,\alpha} k_{n,n-1}^{v,\alpha-6} - k_{n+1,n-1}^{v,\alpha}\right), \qquad (20)$$
$$k_{n,p}^{v,\alpha} = \left(\frac{\alpha}{2} - 1 + n\right) k_{n,p}^L + k_{n-1,p}^{\partial L}.$$

Зокрема, при $\alpha = 6$ (20) збігається з (11).

3. Узагальнення резонансних рівнянь для поліномів типу Лежандра на рівняння четвертого порядку. Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\mathfrak{B}_n y(x) = (x^2-1)^2 \frac{d^4y(x)}{dx^4} + 8x(x^2-1)\frac{d^3y(x)}{dx^3} +$$

$$+ (4\alpha+12)\,(x^2-1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 8\alpha x\frac{dy(x)}{dx} - \lambda(n)y(x) = 0, \quad x > 0. \tag{21}$$

Як показано у [12], при

$$\lambda = \lambda(n) = 8\alpha n + (4\alpha+12)\,n(n-1) + 8n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

поліноміальними розв'язками рівняння (21) будуть

$$y(x) = v_n(x) = \alpha P_n(x) - x\frac{d}{dx}P_n(x) + \frac{1}{2}n(n+1)P_n(x), \tag{22}$$

де $P_n(x)$ — поліном Лежандра. Ці поліноміальні розв'язки є ортогональними в сенсі скалярного добутку

$$(v_n, v_m) = \frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1} v_n(x)v_m(x)dx + \frac{1}{2}v_n(-1)v_m(-1) + \frac{1}{2}v_n(1)v_m(1) =$$

$$= \delta_{n,m}\frac{\alpha}{2n+1}\left[\alpha + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]\left[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)n\right]$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = A_n x v_n(x) - C_n v_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n = \frac{(2n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n+1)n\right]}{(n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)n\right]}, \qquad C_n = \frac{n\left[\alpha + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]}{(n+1)\left[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)n\right]}. \tag{23}$$

Нашою основною задачею є побудова частинного розв'язку резонансного рівняння

$$\mathfrak{B}_n y(x) = v_n(x). \tag{24}$$

Для її розв'язання скористаємось наведеним вище алгоритмом. Використовуючи зображення поліномів Лежандра через гіпергеометричну функцію

$$P_n(x) = F\left(-n, n+11; \frac{1-x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(n+1)_k}{(k!)^2}x^k$$

і теорему 1, одержуємо

$$\lambda'(n)u_n(x) = \frac{1}{2}(2n+1)P_n(x) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\alpha - x\,\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}n(n+1)\right]F\left(-\nu, \nu+1, 1; \frac{1-x}{2}\right)\Big|_{\nu=n}.$$

Звідси маємо

$$\chi_0(x) = \frac{1}{4\alpha-2}\left[\alpha\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\right],$$
$$\chi_1(x) = \frac{1}{12\alpha+6}\left[\alpha x\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{(2\alpha+1)x^2+x-2\alpha-2}{2x+2}\right], \tag{25}$$
$$\chi_2(x) = \frac{1}{20\alpha+50}\left[v_2(x)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{4(x+1)}((7\alpha+16)x^3+ \right.$$
$$\left. +(\alpha+10)x^2-(7\alpha+18)x-\alpha-8)\right],$$

На наступному кроці алгоритму, використовуючи теорему 1, диференціюємо рекурентне співвідношення (23) по n і одержуємо

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda'(n+1)}\left[A_n x\lambda'(n)u_n(x) - C_n\lambda'(n-1)u_{n-1}(x)+\right.$$
$$\left.+A'_n x v_n(x) - C'_n\lambda'(n)v_{n-1}(x)\right], \quad n=1,2,\ldots. \tag{26}$$

Підстановка у (26) при $n=1$ початкових даних із (25) приводить до функції, яка є розв'язком резонансного рівняння (24) при $n=2$ і збігається з $\chi_2(x)$. Тому підправляти початкові дані з (25) не потрібно, і ми переходимо до доведення такого твердження.

Теорема 4. *Функції, що одержуються за допомогою рекурентного співвідношення* (26) *із початковими даними* $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$ *з* (25), *є розв'язками резонансного рівняння* (24).

Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n=1$ теорема є правильною. Припустимо, що вона є правильною при $n=2,3,\ldots,k$, і покажемо, що вона буде правильною при $n=k+1$. Покладемо у (26) $n=k$, подіємо на обидві частини одержаної рівності оператором $\mathfrak{B}_{k+1}$ і скористаємося припущенням індукції. Тоді отримаємо

$$\mathfrak{B}_{k+1}u_{k+1}(x) = \frac{1}{\lambda'(k+1)}\left\{4l'(k)A_k\left[(x^2-1)^2\frac{d^3}{dx^3}u_k(x) + 6x(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}u_k(x)+\right.\right.$$
$$\left.+2(\alpha+3)(x^2-1)\frac{d}{dx}u_k(x) + 2x\left(\alpha+\frac{\lambda(k)-\lambda(k+1)}{8}\right)u_k(x)\right]-$$
$$-l'(k-1)\left(\lambda(k-1)-\lambda(k+1)\right)C_k u_{k-1}(x) + 4A'_k\left[(x^2-1)^2\frac{d^3}{dx^3}v_k(x)+\right.$$
$$+6x(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}v_k(x) + 2(\alpha+3)(x^2-1)\frac{d}{dx}v_k(x)+$$
$$\left.+2x\left(\frac{A_k\lambda'(k)}{8A'_k} + \left(\alpha+\frac{\lambda(k)-\lambda(k+1)}{8}\right)\right)v_k(x)\right]-$$
$$\left.-\left(\lambda(k-1)-\lambda(k+1)+\frac{C_k l'(k-1)}{C'_k}\right)C'_k v_{k-1}(x)\right\}. \tag{27}$$

Для спрощення правої частини формули (27) нам знадобиться формула диференціювання узагальнених поліномів Лежандра (22), яка має вигляд

$$(x^2-1)^2\frac{d^3v_n(x)}{dx^3}+6x(x^2-1)\frac{d^2v_n(x)}{dx^2}+2(x^2-1)(\alpha+3)\frac{dv_n(x)}{dx}+$$
$$+\left(-2n\alpha-\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right)v_n(x)+\left(2n\alpha+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right)v_{n-1}(x)=0,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{28}$$

Крім цієї формули нам знадобиться ще формула диференціювання частинних розв'язків резонансного рівняння (12). Диференціюючи (28) по параметру n, згідно з теоремою 1 про зображення частинних розв'язків абстрактних резонансних рівнянь у банаховому просторі маємо

$$\lambda'(n)\left\{(x^2-1)^2\frac{d^3u_n(x)}{dx^3}+6x(x^2-1)\frac{d^2u_n(x)}{dx^2}+2(x^2-1)(\alpha+3)\frac{du_n(x)}{dx}+\right.$$
$$\left.+\left(-2n\alpha-\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right)u_n(x)\right\}+(-2\alpha-2n-1)\,v_n(x)+$$
$$+\lambda'(n-1)\left(2n\alpha+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right)u_{n-1}(x)+(2\alpha+2n+1)\,v_{n-1}(x)=0,\quad n=0,1,2,\ldots,$$
$$\lambda(n)=4n^3+6n^2+(8a-2)n+4a-2. \tag{29}$$

Доведення формули (28) проводиться з використанням зображення (10) і властивостей поліномів Лагранжа. Повертаючись до (27), після нескладних, проте досить громіздких викладок із використанням формул диференціювання (28), (29) переконуємось у тому, що права частина (27) збігається з поліномом $v_{k+1}(x)$.

Теорему 4 доведено.

Література

1. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 14 – 22.
2. *Backhouse N. B.* Resonant equations and special functions // J. Comput. and Appl. Math. – 2001. – **133**, № 1-2. – P. 163 – 169.
3. *Backhouse N. B.* The resonant Legendre equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – **117**, № 2. – P. 310 – 317.
4. *Макаров В. Л.* Ортогональные многочлены и разностные схемы с точными и явными спектрами: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1976. – 255 с.
5. *Макаров В. Л., Аразмырадов Т.* О построении частных решений резонансных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1255 – 1261.
6. *Макаров В. Л.* FD-метод — экспоненциальная скорость сходимости // Обчислюв. и прикл. математика. – 1997. – № 82. – С. 69 – 74.
7. *Makarov V. L., Romaniuk N. M.* Exponentially convergent symbolic algorithm of the functional-discrete method for the fourth order Sturm – Liouville problems with polynomial coefficients // J. Comput. and Appl. Math. – 2019. – **358**. – P. 405 – 423.
8. *Gavrilyuk I., Makarov V.* The classical orthogonal polynomials in resonant equations. I // J. Numer. and Appl. Math. – 2019. – **130**, № 1. – P. 58 – 70.
9. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 2. – С. 190 – 209.
10. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 4. – С. 455 – 470.
11. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
12. *Krall A. M.* Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1981. – **87**, № 3-4. – P. 271 – 288.

Одержано 19.06.19