УДК 517.946

А. П. Громик (Поділ. держ. аграр.-техн. ун-т),
І. М. Конет, Т. М. Пилипюк (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка)

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

By the method of integral and hybrid integrated transforms, in combination with the method of principal solutions (matrices of influence and Green matrices), we construct the integral representation of the unique exact analytic solution of a hyperbolic boundary-value problem of mathematical physics for a piecewise homogeneous hollow cylinder.

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом основних розв'язків (матриць впливу і матриць Гріна) побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного порожнистого циліндра.

1. Вступ. Теорія мішаних (початково-крайових) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, хімії, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для рівнянь і систем рівнянь гіперболічного типу одержано в працях Ж. Адамара [1], Л. Гордінга [2], Ю. О. Митропольського, Г. П. Хоми, М. І. Громяка [3], Б. Й. Пташника [4], А. М. Самойленка, Б. П. Ткача [5], М. М. Смирнова [6], В. А. Чернятина [7] та інших.

Відомо, що складність досліджуваних крайових і мішаних задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різних видів виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкості межі, наявності кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На даний час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач у сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не лише в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [8 – 10].

Як виявилося, для досить широкого класу лінійних крайових і мішаних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їхніх точних розв'язків є метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або різні диференціальні оператори, або диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11 – 14].

У цій статті, яка є логічним продовженням [15 – 17], методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом основних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано єдиний точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного порожнистого циліндра.

2. Постановка задачі. Нехай множина $D \equiv D(t, r, \varphi, z) = D_1 \bigcup \cdots \bigcup D_n$, де $D_j = (0, +\infty) \times I_j \times [0, 2\pi) \times (-l_1, l_2)$, $I_j = (R_{j-1}, R_j)$, $R_0 > 0$, $R_n \equiv R < +\infty$, $l_k \geq 0$, $k = 1, 2$, $l_1 + l_2 \equiv l \neq 0$, $n \geq 2$ — кількість інтервалів.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині D 2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [18]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \\ + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z), \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

крайовими

$$\left. \left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \right|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z), \quad \left. \left(\alpha_{22}^n \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^n \right) u_n \right|_{r=R} = g_R(t, \varphi, z), \tag{3}$$

$$\left. \left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_j \right|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi), \quad \left. \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_j \right|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi), \tag{4}$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n},$$

та умовами спряження [15]

$$\left. \begin{bmatrix} \alpha_{11}^k & \beta_{11}^k \\ \alpha_{21}^k & \beta_{21}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_k}{\partial r} \\ u_k \end{bmatrix} \right|_{r=R_k} = \left. \begin{bmatrix} \alpha_{12}^k & \beta_{12}^k \\ \alpha_{22}^k & \beta_{22}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial r} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} \right|_{r=R_k}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{5}$$

У формулах (1) – (5) a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, p_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі сталі, $p_j \geq 0$, $p_1 + p_2 \neq 0$,

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k} c_{2k} > 0, \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0, \quad |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0,$$

$$\alpha_{22}^n \geq 0, \quad \beta_{22}^n \geq 0, \quad \alpha_{22}^n + \beta_{22}^n \neq 0,$$

$f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g^j = (g_1^j, \ldots, g_n^j)$, $w^j = (w_1^j, \ldots, w_n^j)$, $f_m = f_m(t, r, \varphi, z)$, $g_m^j = g_m^j(r, \varphi, z)$, $w_m^j = w_m^j(t, r, \varphi)$, $j = 1, 2$, $g_0(t, \varphi, z)$, $g_R(t, \varphi, z)$ — задані дійсні обмежені неперервні функції, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — шукана функція, $u_m = u_m(t, r, \varphi, z)$, $m = \overline{1, n}$.

Під розв'язком задачі (1) – (5) розуміємо функцію u, компоненти якої при підстановці в рівняння, початково-крайові умови та умови спряження перетворюють їх у тотожність у кожній точці області визначення.

3. Основні результати. Припустимо, що розв'язок задачі спряження (1) – (5) існує, а задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних перетворень [11, 19, 20].

До задачі (1) – (5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [11]:

$$\Lambda_s[f(z)] = \int_{-l_1}^{l_2} f(z) v_s(z+l_1)dz \equiv f_s, \tag{6}$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \equiv f(z), \tag{7}$$

$$\Lambda_s\left[\frac{d^2 f}{dz^2}\right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0)\left(-\frac{df}{dz} + p_1 f\right)\bigg|_{z=-l_1} + v_s(l)\left(\frac{df}{dz} + p_2 f\right)\bigg|_{z=l_2}. \tag{8}$$

Формули (6) – (8) містять спектральну функцію (ядро перетворення)

$$v_s(z+l_1) = \frac{\gamma_s \cos\gamma_s(z+l_1) + p_1 \sin\gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$\|v_s\|^2 \equiv \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z+l_1)dz = \frac{l}{2} + \frac{(p_1+p_2)(\gamma_s^2 + p_1 p_2)}{2(\gamma_s^2 + p_1^2)(\gamma_s^2 + p_2^2)}.$$

При цьому

$$v_s(0) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}, \quad v_s(l) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_2^2}},$$

$\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma l) = \frac{\gamma^2 - p_1 p_2}{\gamma(p_1 + p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s, який діє за формулою (6), внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1) – (5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t,r,\varphi) | t > 0, r \in I_n^+ = I_1 \cup \ldots \cup I_n, \varphi \in [0; 2\pi)\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{js}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] u_{js} +$$
$$+ \left(a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2\right) u_{js} = \Phi_{js}(t,r,\varphi), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{9}$$

з початковими умовами

$$u_{js}|_{t=0} = g_{js}^1(r,\varphi), \quad \frac{\partial u_{js}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_{js}^2(r,\varphi), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

крайовими

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_{1s}\bigg|_{r=R_0}=g_{0s}(t,\varphi),\quad \left(\alpha_{22}^n\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^n\right)u_{n,s}\bigg|_{r=R}=g_{Rs}(t,\varphi) \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}^k & \beta_{11}^k\\ \alpha_{21}^k & \beta_{21}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_{ks}}{\partial r}\\ u_{ks}\end{pmatrix}\Bigg|_{r=R_k}=\begin{pmatrix}\alpha_{12}^k & \beta_{12}^k\\ \alpha_{22}^k & \beta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_{k+1,s}}{\partial r}\\ u_{k+1,s}\end{pmatrix}\Bigg|_{r=R_k},\quad k=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

де $\Phi_{js}(t,r,\varphi)=f_{js}(t,r,\varphi)+a_{zj}^2v_s(0)\omega_j^1(t,r,\varphi)+a_{zj}^2v_s(l)\omega_j^2(t,r,\varphi)$.

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на проміжку $[0;2\pi)$ щодо кутової змінної φ [19]:

$$F_m[g(\varphi)]=\int_0^{2\pi}g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi\equiv g_m,\quad i=\sqrt{-1}, \tag{13}$$

$$F_m^{-1}[g_m]=\frac{\Re e}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m\exp(im\varphi)\equiv g(\varphi), \tag{14}$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right]=-m^2F_m[g(\varphi)]\equiv -m^2g_m, \tag{15}$$

де $\Re$e — дійсна частина виразу, $\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_k=2,\ k=1,2,3,\ldots$.

Інтегральний оператор F_m, який діє за формулою (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\{(t,r)\,|\,t>0,r\in I_n^+\}$ розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу другого порядку з оператором Бесселя

$$\frac{\partial^2u_{jsm}}{\partial t^2}-a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm}^2}{r^2}\right)u_{jsm}+\left(a_{zj}^2\gamma_s^2+\chi_j^2\right)u_{jsm}=$$

$$=\Phi_{jsm}(t,r),\quad r\in I_j,\quad j=\overline{1,n},\quad \nu_{jm}=ma_{\varphi j}/a_{rj}, \tag{16}$$

з початковими умовами

$$u_{jsm}|_{t=0}=g_{jsm}^1(r),\quad \frac{\partial u_{jsm}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g_{jsm}^2(r),\quad r\in I_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{17}$$

крайовими

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_{1sm}\bigg|_{r=R_0}=g_{0sm}(t),\quad \left(\alpha_{22}^n\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^n\right)u_{n,sm}\bigg|_{r=R}=g_{Rsm}(t) \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}^k & \beta_{11}^k\\ \alpha_{21}^k & \beta_{21}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_{ksm}}{\partial r}\\ u_{ksm}\end{pmatrix}\Bigg|_{r=R_k}=\begin{pmatrix}\alpha_{12}^k & \beta_{12}^k\\ \alpha_{22}^k & \beta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_{k+1,sm}}{\partial r}\\ u_{k+1,sm}\end{pmatrix}\Bigg|_{r=R_k},\quad k=\overline{1,n-1}. \tag{19}$$

До одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля другого роду на кусково-однорідному проміжку I_n^+ з $n-1$ точками спряження на n інтервалах щодо радіальної змінної r [20]:

$$H_{pn}[f(r)] = \int\limits_{R_0}^{R} f(r)V(r,\lambda_p)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda_p), \tag{20}$$

$$H_{pn}^{-1}[\tilde{f}(\lambda_p)] = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_p)\frac{V(r,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2} \equiv f(r), \tag{21}$$

$$\begin{gathered} H_{pn}\Big[B_{(m)}[f(r)]\Big] = -\lambda_p^2\tilde{f}(\lambda_p) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda_p)\sigma_k r dr - \\ -a_1^2R_0\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(R_0,\lambda_p)\left(\alpha_{11}^0\frac{df}{dr}+\beta_{11}^0 f\right)\Big|_{r=R_0} + \\ +a_n^2R\sigma_n(\alpha_{22}^n)^{-1}V_n(R,\lambda_p)\left(\alpha_{22}^n\frac{df}{dr}+\beta_{22}^n f\right)\Big|_{r=R}. \end{gathered} \tag{22}$$

Формули (20)–(22) містять величини і функції

$$V(r,\lambda_p) = \sum_{k=1}^{n} V_k(r,\lambda_p)\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r),$$

$$V_1(r,\lambda_p) = \prod_{j=1}^{n}\Delta^j J_{\nu_{1m}}(b_{1p}r), \quad b_{kp} = a_k^{-1}(\lambda_p^2+\gamma_k^2)^{1/2} \equiv q_k(\lambda_p^2),$$

$$V_k(r,\lambda_p) = \prod_{j=k}^{n}\Delta^j\left[w_{(\nu_m)_k;2}^{(k-1)}(\lambda_p)J_{\nu_{km}}(b_{kp}r) - w_{(\nu_m)_k;1}^{(k-1)}(\lambda_p)N_{\nu_{km}}(b_{kp}r)\right], \quad k=\overline{2,n-1},$$

$$V_n(r,\lambda_p) = w_{(\nu_m);2}^{(n)}(\lambda_p)J_{\nu_{nm}}(b_{np}r) - w_{(\nu_m);1}^{(n)}(\lambda_p)N_{\nu_{nm}}(b_{np}r),$$

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r), \quad \|V(r,\lambda_p)\|^2 = \int\limits_{R_0}^{R} V^2(r,\lambda_p)\sigma(r)rdr,$$

$J_\nu(x)$ — циліндрична функція Бесселя першого роду ν-го порядку, $N_\nu(x)$ — циліндрична функція Бесселя другого роду ν-го порядку, α_k — деякі дійсні числа,

$$a_k \equiv a_{rk}, \quad q_k \equiv q_k(\lambda^2) = a_k^{-1}(\lambda^2+\gamma_k^2)^{1/2}, \quad \gamma_k \ge 0, \quad k=\overline{1,n},$$

$$(\nu_m) \equiv (\nu_m)_n = (\nu_{1m},\,\nu_{2m},\ldots,\nu_{nm}),$$

$$\sigma_k = \frac{1}{a_k^2}\frac{c_{1k}c_{1,k+1}\ldots c_{1,n-1}}{c_{2k}c_{2,k+1}\ldots c_{2,n-1}}, \quad \sigma_n = \frac{1}{a_n^2}, \quad \Delta^j = \frac{2c_{2j}}{\pi R_j},$$

$$J_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}J_\nu(x), \quad N_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}N_\nu(x),$$

$$u^{k1}_{\nu_{km;ij}}(q_pR_k)=\left(\frac{\nu_{km}}{R_k}\alpha^k_{ij}+\beta^k_{ij}\right)J_{\nu_{km},0}(q_pR_k)-R_k^2q_p^2\alpha^k_{ij}J_{\nu_{km+1},1}(q_pR_k),$$

$$u^{k2}_{\nu_{km;ij}}(q_pR_k)=\left(\frac{\nu_{km}}{R_k}\alpha^k_{ij}+\beta^k_{ij}\right)N_{\nu_{km},0}(q_pR_k)-R_k^2q_p^2\alpha^k_{ij}N_{\nu_{km+1},1}(q_pR_k),$$

$$i,j=1,2,\quad k=\overline{1,n-1},\quad p=\overline{1,n},$$

$$\Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});ij}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)=u^{ki}_{\nu_{km;11}}(q_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1,m;22}}(q_{k+1}R_k)-$$

$$-u^{ki}_{\nu_{km;21}}(q_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1,m;12}}(q_{k+1}R_k),\quad k=\overline{1,n-1},$$

$$w^{(1)}_{(\nu_m)2;p}(q_1R_1,q_2R_1)\equiv\Psi^1_{(\nu_{1m},\nu_{2m});1p}(q_1R_1,q_2R_1)\equiv w^{(1)}_{(\nu_m)2;p}(\lambda),\quad p=1,2,$$

$$w^{(k)}_{(\nu_m)k+1;j}(\lambda)=w^{(k)}_{(\nu_m)k+1;j}(q_1R_1,q_2R_1,\ldots,q_kR_k,q_{k+1}R_k)=$$

$$=\Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});1j}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)w^{(k-1)}_{(\nu_m)k;2}(q_1R_1,q_2R_1,\ldots$$

$$\ldots,q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1})-\Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});2j}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)\times$$

$$\times w^{(k-1)}_{(\nu_m)k;1}(q_1R_1,q_2R_1,\ldots,q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1}),$$

$$k=\overline{2,n-1},\quad j=1,2,\quad (k)=123\ldots k,\quad (\nu_m)k=(\nu_{1m},\nu_{2m},\ldots,\nu_{km}),$$

$$B_{(m)}=\sum_{k=1}^n a_k^2\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)B_{\nu_{km}},$$

де $B_{\nu_{km}}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu^2_{km}}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда;

$\{\lambda_p\}_{p=1}^\infty$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$u^{n1}_{\nu_{nm;22}}(q_nR)w^{(n)}_{(\nu_m);2}(q_1R_1,q_2R_1,\ldots,q_{n-1}R_{n-1},q_nR_{n-1})-$$

$$-u^{n2}_{\nu_{nm;22}}(q_nR)w^{(n)}_{(\nu_m);1}(q_1R_1,q_2R_1,\ldots,q_{n-1}R_{n-1},q_nR_{n-1})=0,$$

які утворюють дискретний спектр.

Запишемо диференціальні рівнянння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2_{r1}B_{\nu_{1m}}+q^2_{1s}\right)u_{1sm}\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2_{r2}B_{\nu_{2m}}+q^2_{2s}\right)u_{2sm}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2_{rn}B_{\nu_{nm}}+q^2_{ns}\right)u_{nsm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{1sm}(t,r)\\ \Phi_{2sm}(t,r)\\ \cdots\cdots\\ \Phi_{nsm}(t,r)\end{bmatrix},\tag{23}$$

$$\left.\begin{bmatrix}u_{1sm}(t,r)\\ u_{2sm}(t,r)\\ \cdots\cdots\\ u_{nsm}(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}g^1_{1sm}(r)\\ g^1_{2sm}(r)\\ \cdots\cdots\\ g^1_{nsm}(r)\end{bmatrix},\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_{1sm}(t,r)\\ u_{2sm}(t,r)\\ \cdots\cdots\\ u_{nsm}(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}g^2_{1sm}(r)\\ g^2_{2sm}(r)\\ \cdots\cdots\\ g^2_{nsm}(r)\end{bmatrix},\tag{24}$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2$, $j = \overline{1, n}$.

Інтегральний оператор H_{pn}, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{pn}[v(r)] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} v_1(r) V_1(r, \lambda_p) \sigma_1 r dr \ \ldots \int\limits_{R_{n-1}}^{R} v_n(r) V_n(r, \lambda_p) \sigma_n r dr \right], \tag{25}$$

де $v(r) = (v_1(r), \ldots, v_n(r))$, і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). З огляду на тотожність (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_p^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2 \right) \tilde{u}_{jsm}(t, \lambda_p) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Phi}_{jsm}(t, \lambda_p) +$$

$$+ (-a_1^2 R_0 \sigma_1)(\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_p) g_{0sm}(t) + a_n^2 R \sigma_n (\alpha_{22}^n)^{-1} V_n(R, \lambda_p) g_{Rsm}(t), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{jsm}(t, \lambda_p) \bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{jsm}^1(\lambda_p), \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{jsm}(t, \lambda_p) \bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{jsm}^2(\lambda_p), \tag{27}$$

де

$$\tilde{u}_{jsm}(t, \lambda_p) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jsm}(t, r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{\Phi}_{jsm}(t, \lambda_p) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{\Phi}_{jsm}(t, r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{g}_{jsm}^k(\lambda_p) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jsm}^k(r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі (1)–(5), що $\max\{q_{1s}^2, q_{2s}^2, \ldots$ $\ldots, q_{ns}^2\} = q_{1s}^2$, і покладемо скрізь $\alpha_j^2 = q_{1s}^2 - q_{js}^2$, $j = \overline{1, n}$. Якщо $\max\{q_{1s}^2, q_{2s}^2, \ldots, q_{ns}^2\} = q_{ms}^2$, то покладемо $\alpha_j^2 = q_{ms}^2 - q_{js}^2$. Тоді задача Коші (26), (27) набере вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)}{dt^2} + \delta_s^2(\lambda_p) \tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p) = \tilde{T}_{sm}(t, \lambda_p), \tag{28}$$

$$\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)\big|_{t=0} = \tilde{g}_{sm}^1(\lambda_p), \quad \frac{d\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)}{dt} \bigg|_{t=0} = \tilde{g}_{sm}^2(\lambda_p), \tag{29}$$

де

$$\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{jsm}(t, \lambda_p), \quad \tilde{T}_{sm}(t, \lambda_p) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Phi}_{jsm}(t, \lambda_p) +$$

$$+ (-a_1^2 R_0 \sigma_1)(\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_p) g_{0sm}(t) + a_n^2 R \sigma_n (\alpha_{22}^n)^{-1} V_n(R, \lambda_p) g_{Rsm}(t),$$

$$\tilde{g}^k_{sm}(\lambda_p) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}^k_{jsm}(\lambda_p), \quad k = 1, 2, \quad \delta^2_s(\lambda_p) = \lambda^2_p + a^2_{z1}\gamma^2_s + \chi^2_1.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (28), (29) є функція

$$\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p) = G_s(t, \lambda_p)\tilde{g}^2_{sm}(\lambda_p) + \frac{d}{dt}G_s(t, \lambda_p)\tilde{g}^1_{sm}(\lambda_p) + \int\limits_0^t G_s(t-\tau, \lambda_p)\tilde{T}_{sm}(\tau, \lambda_p)d\tau, \qquad (30)$$

де функція Коші (розв'язуюча функція) $G_s(t, \lambda_p) = \dfrac{\sin(\delta_s(\lambda_p)t)}{\delta_s(\lambda_p)}$.

Оператор H^{-1}_{pn}, як обернений до оператора (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}_{pn}[\tilde{v}(\lambda_p)] = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{v}_1(\lambda_p)\frac{V_1(r, \lambda_p)}{\|V(r, \lambda_p)\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{v}_n(\lambda_p)\frac{V_n(r, \lambda_p)}{\|V(r, \lambda_p)\|^2} \end{bmatrix}. \qquad (31)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)]$, де функцію $\tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)$ визначено формулою (30). Одержимо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16) – (19):

$$u_{jsm}(t, r) = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_{sm}(t, \lambda_p)\frac{V_j(r, \lambda_p)}{\|V(r, \lambda_p)\|^2}, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (32)$$

Застосовуючи послідовно до функцій $u_{jsm}(t, r)$, визначених формулами (32), обернені оператори Λ^{-1}_s, F^{-1}_m, і виконуючи нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^t \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi)\sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g^1_k(\rho, \alpha, \xi)\sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g^2_k(\rho, \alpha, \xi)\sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a^2_{zk} \int\limits_0^t \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \int\limits_0^{2\pi} [W^1_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z) w^1_k(\tau, \rho, \alpha) + W^2_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z) \times$$

$$\times w_k^2(\tau,\rho,\alpha)]\sigma_k\rho d\alpha d\rho d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-l_1}^{l_2}[W_{jr}^1(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)g(\tau,\alpha,\xi)+$$

$$+W_{jr}^2(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)g_R(\tau,\alpha,\xi)]d\xi d\alpha d\tau, \quad j=\overline{1,n}, \tag{33}$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1) – (5). Формули (33) містять компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_m G_s(t,\lambda_p)\frac{V_j(r,\lambda_p)V_k(\rho,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2}\times$$

$$\times\cos(m\varphi), \quad j,k=\overline{1,n},$$

матриці впливу (функції впливу) $E=[E_{jk}]_{j,k=1}^n$, компоненти $W_{jk}^1 = E_{jk}|_{\xi=-l_1}$ нижньої тангенціальної матриці Гріна (нижні тангенціальні функції Гріна) $W^1 = \left[W_{jk}^1\right]_{j,k=1}^n$, компоненти $W_{jk}^2 = E_{jk}|_{\xi=l_2}$ верхньої тангенціальної матриці Гріна (верхні тангенціальні функції Гріна) $W^2 = \left[W_{jk}^2\right]_{j,k=1}^n$, компоненти $W_{jr}^1 = -a_1^2R_0\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{j1}|_{\rho=R_0}$ лівої радіальної матриці Гріна (ліві радіальні функції Гріна) $W_r^1 = \left[W_{jr}^1\right]_{j=1}^n$ і компоненти $W_{jr}^2 = a_n^2R\sigma_n(\alpha_{22}^n)^{-1}E_{jn}|_{\rho=R}$ правої радіальної матриці Гріна (праві радіальні функції Гріна) $W_r^2 = \left[W_{jr}^2)\right]_{j=1}^n$ розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j,\ g_j^p,\ w_j^p,\ p=1,2,$ *задовольняють умови*:

1) *двічі неперервно диференційовні за кожною змінною*;

2) *мають обмежену варіацію за геометричними змінними*;

3) *справджують умови спряження, а функції* $g_0,\ g_R$ *задовольняють умови* 1, 2,

то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1) – (5) *має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами* (33).

З використанням властивостей функцій впливу E_{jk} і функцій Гріна $W_{jk}^p,\ W_{jr}^p$ безпосередньо перевіряється, що функції u_j, визначені за формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) й умови спряження (5) у сенсі теорії узагальнених функцій [21].

Єдиність розв'язку (33) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності основних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1) – (5).

Методами з [22] можна довести, що при відповідних умовах на початкові дані формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1) – (5).

***Зауваження*. 1.** У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1) – (5) в ізотропному кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

2. Параметри $\alpha_{11}^0,\ \beta_{11}^0,\ \alpha_{22}^n,\ \beta_{22}^n$ дозволяють виділяти з формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальних поверхнях $r=R_0,\ r=R$ крайових умов першого, другого і третього роду та їхніх можливих комбінацій.

3. Параметри p_j, $j = 1, 2$, дозволяють виділяти з формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1$, $z = l_2$ крайових умов першого і другого роду та їхніх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 2-1, 2-2).

4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням Даламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

5. Якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга, то умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту

$$u_k|_{r=R_k} = u_{k+1}|_{r=R_k}, \quad E_1^k \frac{\partial u_k}{\partial r}\bigg|_{r=R_k} = E_2^k \frac{\partial u_{k+1}}{\partial r}\bigg|_{r=R_k}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Таким чином, у випадках, зазначених у зауваженнях 4 і 5, розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) охоплює відомі класичні математичні моделі коливних процесів у кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

4. Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом основних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного порожнистого циліндра. Одержаний розв'язок має алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як у подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Література

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 122 с.
3. *Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
4. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
5. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
6. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1969. – 292 с.
7. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1991. – 112 с.
8. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
9. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
10. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
11. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
12. *Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. – 200 с.

13. *Конет І. М.* Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
14. *Конет І. М., Пилипюк Т. М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
15. *Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М.* Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика. Механіка. – 2018. – Вип. 1(39). – С. 19 – 25.
16. *Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М.* Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з порожниною // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика. Механіка. – 2018. – Вип. 1(39). – С. 25 – 28.
17. *Конет І. М., Пилипюк Т. М.* Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного суцільного циліндра // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 4. – С. 485 – 495.
18. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2006. – 424 с.
19. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.
20. *Быблив О. Я., Ленюк М. П.* Гибридные интегральные преобразования Ханкеля II-го рода для кусочно-однородных сегментов // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 82 – 85.
21. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
22. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

Одержано 14.02.19,
після доопрацювання — 25.07.19