УДК 517.925

**В. М. Евтухов, А. В. Дрожжина** (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The conditions of existence and asymptotic representations as $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ are obtained for one class of solutions of nonautonomous differential equations of the $n$th order that are asymptotically close, in a certain sense, to the equations with regularly varying nonlinearities.

Встановлено умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення одного класу розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь $n$-го порядку, що у деякому сенсі є асимптотично близькими до рівнянь із правильно змінними нелінійностями.

**1. Введение.** Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.1}$$

где $n \ge 2$, $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \ldots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < < \omega \le +\infty$, $Y_k$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta_{Y_k}$ — некоторая односторонняя окрестность $Y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

**Определение 1.1.** *Пусть* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$. *Непрерывно дифференцируемая* $n$ *раз функция* $y : [t_0, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *называется* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решением уравнения* (1.1), *если она удовлетворяет условиям*

$$y^{(k)}(t) \in \Delta_{Y_k} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \to \omega} y^{(k)}(t) = Y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t \to \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0 \tag{1.3}$$

*и* $y^{(n)}(t) \equiv f(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.

Асимптотическое поведение таких решений уравнения (1.1) ранее исследовалось в работах [1 – 4] при $n = 2$, т. е. в случае дифференциального уравнения второго порядка. При этом предполагалось, что на каждом из этих решений имеет место представление

$$f(t, y(t), y'(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1(y'(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [t_0, \omega[ \longrightarrow ]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_k : \Delta_{Y_k} \longrightarrow ]0, +\infty[$ — непрерывная правильно меняющаяся функция при $y^{(k)} \to Y_k$, $k = 0, 1$, причем $\alpha_0$, $p$ и $\varphi_k$, $k = 0, 1$, зависят от выбранного параметра $\lambda_0$.

**Определение 1.2.** *Измеримая функция* $\varphi : \Delta_Y \longrightarrow ]0, +\infty[$, *где* $Y$ *равно либо нулю, либо* $\pm\infty$ *и* $\Delta_Y$ — *некоторая односторонняя окрестность* $Y$, *называется правильно меняющейся при* $y \to Y$, *если существует число* $\rho \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^\rho \quad \textit{при любом} \quad \lambda > 0.$$

*При этом число* $\rho$ *называют порядком функции* $\varphi$ (*или показателем*).

Из этого определения следует, что правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция $\varphi$ представима в виде

$$\varphi(y) = |y|^\rho L(y),$$

где $L\colon \Delta_y \longrightarrow\, ]0, +\infty[$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{при любом} \quad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

т. е. является правильно меняющейся функцией порядка $\rho = 0$ при $y \to Y$.

**Определение 1.3.** *Правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция $L\colon \Delta_Y \longrightarrow\, ]0, +\infty[$ нулевого порядка, где $Y$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и $\Delta_Y$ — некоторая односторонняя окрестность $Y$, называется медленно меняющейся функцией при $y \to Y$.*

Примерами медленно меняющихся функций при $y \to Y$ ($Y$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$) являются

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$

$$\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$, и многие др.

Если $Y$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta_Y$ — некоторая односторонняя окрестность $Y$ и $L\colon \Delta_Y \longrightarrow\, ]0, +\infty[$ — медленно меняющаяся функция при $y \to Y$, то в силу свойств таких функций (см., например, [5, с. 10, 11, 24], пп. 1.1, 1.2, 1.4):

1) предельное соотношение (1.4) выполняется равномерно по $\lambda$ на любом отрезке $[c, d] \subset\, \subset ]0, +\infty[$;

2) $\lim\limits_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \dfrac{\ln L(y)}{\ln|y|} = 0$;

3) существует непрерывно дифференцируемая функция $L_0\colon \Delta_Y \longrightarrow\, ]0, +\infty[$, называемая нормализованной медленно меняющейся функцией при $y \to Y$, такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

**Определение 1.4.** *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y$ функция $L\colon \Delta_Y \longrightarrow\, ]0, +\infty[$, где $Y$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и $\Delta_Y$ — односторонняя окрестность $Y$, удовлетворяет условию $S_0$, если*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

*где $\nu = \operatorname{sign} y$.*

Условию $S_0$ заведомо удовлетворяют первые две функции из приведенных выше примеров медленно меняющихся функций, а также функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$. Не удовлетворяют этому условию третья и четвертая функции из указанных примеров.

Целью настоящей работы является распространение результатов, полученных в [1] для уравнения (1.1) при $n = 2$, на случай $n \geq 2$, а именно установление условий существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) в случае, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

**2. Некоторые вспомогательные утверждения.** Изучаемые в данной работе решения дифференциального уравнения (1.1) в силу следствия 10.1 из [6] имеют следующие априорные асимптотические свойства.

**Лемма 2.1.** *При* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ *каждое* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решение дифференциального уравнения* (1.1) *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

*где*

$$a_{0k} = (n-k)\lambda_0 - (n-k-1), \quad k = 1, \ldots, n, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \textit{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Наряду с этой леммой будем использовать еще один результат о существовании исчезающих в особой точке решений системы квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$y_j' = h(t) \left[ F_j(t, y_1, \ldots, y_n) + \sum_{k=1}^{n} c_{jk} y_k + Y_j(t, y_1, \ldots, y_n) \right], \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

в которой $c_{jk} \in \mathbb{R},\ j, k = 1, \ldots, n,\ h \colon [t_0, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что

$$h(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \int_{t_0}^{\omega} |h(t)|\, dt = +\infty, \tag{2.3}$$

$F_j, Y_j \colon [t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_c^n \longrightarrow \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n,$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \to \omega} F_j(t, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{равномерно по} \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_c^n, \tag{2.4}$$

$$\lim_{|y_1| + \ldots + |y_n| \to 0} \frac{Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)}{|y_1| + \ldots + |y_n|} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0, \omega[, \tag{2.5}$$

где

$$-\infty < t_0 < \omega \leq +\infty, \quad \mathbb{R}_c^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i| \leq c \ (i = 1, \ldots, n),\ c > 0\}.$$

Из теоремы 2.2 работы [7] непосредственно вытекает следующий результат.

**Лемма 2.2.** *Пусть выполняются условия* (2.3) – (2.5) *и матрица* $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n$ *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений* (2.2) *имеет хотя бы одно решение* $(y_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[ \longrightarrow \mathbf{R}_c^n,\ t_1 \in [t_0, \omega[$, *стремящееся к нулю при* $t \uparrow \omega$, *причем таких решений существует* $m$*-параметрическое семейство, если среди собственных значений матрицы* $C$ *имеется* $m$ *собственных значений* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции* $h$ *на промежутке* $[t_0, \omega[$.

**3. Основные результаты.** В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_j} = \Delta_{Y_j}(b_j), \quad \Delta_{Y_j}(b_j) = \begin{cases} \text{либо} & [b_j, Y_j[, \\ \text{либо} & ]Y_j, b_j], \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, n-1,$$

где $b_j \in \Delta_{Y_j}$ выбрано так, что $|b_j| < 1$ при $Y_j = 0$ и $b_j > 1$ $(b_j < -1)$ при $Y_j = +\infty$ $(Y_j = -\infty)$.

Теперь введем числа

$$\nu_j = \operatorname{sign} b_j, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

определяющие знаки любого $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_1, \lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1) и его производных до порядка $n-1$ включительно. В силу (1.2) для наличия таких решений у дифференциального уравнения (1.1) необходимо, чтобы при любом $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнялись неравенства

$$\nu_{j-1}\nu_j < 0, \quad \text{если} \quad Y_{j-1} = 0, \quad \text{и} \quad \nu_{j-1}\nu_j > 0, \quad \text{если} \quad Y_{j-1} = \pm\infty. \qquad (3.1)$$

**Определение 3.1.** *Будем говорить, что в дифференциальном уравнении* (1.1) *функция* $f$ *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$ *при* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *если существуют числа* $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, *непрерывная функция* $p\colon [t_0, \omega[ \longrightarrow ]0, +\infty[$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z_j \to Y_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *функции* $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \to ]0, +\infty[$ *порядков* $\sigma_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_j : [t_0, \omega[ \to \Delta_{Y_j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{j-1}(t) = Y_{j-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_{j-1}(t)}{z_{j-1}(t)} = \frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1}, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (3.2)$$

*где* $a_{0j}$, $j = 1, \ldots, n$, *и* $\pi_\omega$ *взяты из леммы* 2.1, *имеет место представление*

$$f(t, z_0(t), \ldots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \qquad (3.3)$$

При выполнении этого условия ниже будем использовать также следующие обозначения:

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \mu_n = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j (n - j - 1), \quad C = \frac{|\lambda_0 - 1|^{\mu_n}}{\prod_{j=0}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n-1} |a_{0i}|^{\sigma_j}},$$

$$J_n(t) = \int_{A_n}^{t} p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \, d\tau, \quad \text{где} \quad A_n = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \, dt = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \, dt < +\infty. \end{cases}$$

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *функция* $f$ *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$ *и* $\gamma \neq 0$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решений дифференциального уравнения* (1.1) *необходимо, а если алгебраическое относительно* $\rho$ *уравнение*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j \prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j} (a_{0k} + \rho) = (1 + \rho) \prod_{k=1}^{n-1} (a_{0k} + \rho) \tag{3.4}$$

*не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы наряду с* (3.1) *выполнялись неравенства*

$$\alpha_0 \nu_{n-1} < 0, \quad \text{если} \quad Y_{n-1} = 0, \quad \text{и} \quad \alpha_0 \nu_{n-1} > 0, \quad \text{если} \quad Y_{n-1} = \pm\infty, \tag{3.5}$$

*а также условия*

$$\nu_{j-1} \nu_j a_{0j} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \alpha_0 \nu_{n-1} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0, \tag{3.6}$$

$$\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_n(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} = \frac{\gamma}{\lambda_0 - 1}. \tag{3.7}$$

*Более того, для каждого такого решения имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \tag{3.8}$$

*где* $y^{(n-1)}(t)$ — *неявная функция вида*

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.9}$$

*определяемая из асимптотического соотношения*

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C J_n(t)[1 + o(1)], \tag{3.10}$$

*в котором* $L_j\left(y^{(j)}\right) = |y^{(j)}|^{-\sigma_j} \varphi_j\left(y^{(j)}\right)$, $j = \overline{0, n-1}$, — *медленно меняющиеся составляющие функций* $\varphi_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *причем существует* $m$*-параметрическое семейство решений с такими представлениями в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (3.4) *имеется* $m$ *корней* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку* $(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)$.

***Замечание* 3.1.** Алгебраическое уравнение (3.4) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| < |\sigma_{sn-1} - 1|.$$

Действительно, если уравнение (3.4) записать в виде

$$\sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{sj} \prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j} (a_{0k} + \rho) = (1 + \rho - \sigma_{sn-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (a_{0k} + \rho)$$

и допустить, что оно имеет решение вида $\rho = i\rho_0$, где $\rho_0 \in \mathbb{R}$ и $i$ — мнимая единица, то, учитывая, что модуль суммы не превышает суммы модулей, получаем

$$|1 + i\rho - \sigma_{sn-1}| \prod_{k=1}^{n-1} |a_{0k} + i\rho_0| = \left| \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{sj} \prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j} (a_{0k} + \rho) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| \prod_{k=j+1}^{n-1} |a_{0k}| \prod_{k=1}^{j} |a_{0k} + i\rho_0| \leq \sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| \prod_{k=1}^{n-1} |a_{0k} + i\rho_0|,$$

откуда в силу неравенств $a_{0k} \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1$, следует, что

$$\sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| \geq |1 - \sigma_{sn-1} + i\rho_0| \geq |1 - \sigma_{sn-1}|.$$

***Доказательство теоремы* 3.1.** *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega[ \longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда $\operatorname{sign} y^{(k-1)}(t) = \nu_{k-1},\ k = 1, \ldots, n$, при $t \in [t_0, \omega[$, для каждого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется неравенство (3.1) и согласно лемме 2.1 выполняются условия (2.1). В силу этих условий справедливы первые $n-1$ из неравенств (3.6). Кроме того, из (1.2) и (2.1) ясно, что для функций $z_k(t) = y^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, выполняются условия (3.2). Поэтому вследствие выполнения условия $(RN)_{\lambda_0}$

$$f\Big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\Big) = \alpha_0 p(t) \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_k(y^{(k)}(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом (1.1) следует, что

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t)[1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.11}$$

Значит, $\operatorname{sign} y^{(n)}(t) = \alpha_0$ в некоторой левой окрестности $\omega$. Поэтому в силу выполнения при $k = n-1$ условий (1.2) выполняется неравенство (3.5), а в силу (2.1) при $k = n$ — последнее из неравенств (3.6).

Далее, учитывая, что

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t), \quad j = 0, 1, \ldots, n-2,$$

с использованием (2.1) получаем

$$y^{(j)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е. имеют место асимптотические соотношения (3.8). Из (2.1) при $k = n$ следует также справедливость представления (3.9).

В (3.11) каждая функция $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow ]0, +\infty[$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, является правильно меняющейся функцией порядка $\sigma_j$ при стремлении аргумента к $Y_j$ и поэтому допускает представление вида

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}), \tag{3.12}$$

где $L_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow ]0, +\infty[$ — медленно меняющаяся функция при $y^{(j)} \to Y_j$. В силу этих представлений при $j = 0, 1, \ldots, n-1$, асимптотических соотношений (3.8) и указанного во введении свойства 1 медленно меняющихся функций при $t \uparrow \omega$ имеют место соотношения

$$\varphi_j(y^{(j)}(t)) = \frac{|(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)|^{\sigma_j(n-j-1)}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} |a_{0j}|^{\sigma_j}} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_j} L_j\left(\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)[1 + o(1)],$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Используя эти соотношения, из (3.11) находим

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0 C |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} p(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.13}$$

Согласно свойству 3 медленно меняющихся функций для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ существует непрерывно дифференцируемая функция $L_{0j} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow ]0, +\infty[$ такая, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0j}(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0. \tag{3.14}$$

В силу второго из этих условий, а также условий $\gamma \neq 0$,

$$\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)| \longrightarrow Y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}$$

имеем

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)}\right)' = \nu_{n-1} \frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} \times$$

$$\times \left[\gamma - \frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\nu_j |\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)| L'_{0j}\left(|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)}{L_{0j}\left(|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} \times\right.$$

$$\left.\times \left(n - j - 1 + \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}\right)\right] =$$

$$= \nu_{n-1}\gamma \frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому (3.13) с учетом первого из условий (3.14) может быть записано в виде

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)}\right)' = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $t_0$ до $t$ и принимая во внимание правило выбора предела интегрирования $A_n$ в функции $J_n$, получаем

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда с учетом первого из условий (3.14) следует справедливость асимптотического представления (3.10).

Справедливость первого из условий (3.7) непосредственно следует из (3.10), а второго – из асимптотических соотношений (3.10), (3.13) и предельного соотношения (2.1) при $k=n$.

*Достаточность.* Пусть выполняются условия (3.5) – (3.7) и алгебраическое уравнение (3.4) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решения, допускающие асимптотические представления (3.8) – (3.10), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)Y|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+v_n], \tag{3.15}$$

где $L_{0j}:\Delta_{Y_j}\longrightarrow\,]0,+\infty[,\ j=0,1,\ldots,n-1,$ — непрерывно дифференцируемые нормализованные медленно меняющиеся при $y^{(j)}\to Y_j$ функции, удовлетворяющие условиям (3.14), существующие в силу свойства 3 медленно меняющихся функций.

Точно таким же образом, как в работе [8] при рассмотрении соотношения (2.13), устанавливаем, что (3.15) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac12}$, где $t_0\in[a,\omega[$ и $\mathbb{R}_{\frac12}=\left\{v_n\in\mathbb{R}: |v_n|\le\dfrac12\right\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y(t,v_n)$ вида

$$Y(t,v_n)=\nu_{n-1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z(t,v_n)}, \tag{3.16}$$

где функция $z$ такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n)=0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac12}, \tag{3.17}$$

удовлетворяющую условиям

$$\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\in\Delta_{Y_j}, \quad j=0,1,\ldots,n-1, \quad \text{при} \quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac12}, \tag{3.18}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)| = Y_j, \quad j=0,1,\ldots,n-1, \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{3.19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1} \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

Теперь уравнение (1.1) с помощью замен

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}}[1+v_{j+1}(t)], \quad j=\overline{0,n-2}, \quad y^{(n-1)}(t) = Y(t,v_n(t)), \tag{3.21}$$

с учетом того, что функция $y^{(n-1)}(t) = Y(t,v_n(t))$ при $t \in [t_0,\omega[$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+v_n(t)], \tag{3.22}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
v'_j = \frac{1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\left[1 + a_{0j}v_{j+1} - (n-j)(\lambda_0-1)v_j - \right. \\
\left. - R(t,v_1,\ldots,v_n)(1+v_j)\right], \quad j=1,\ldots,n-2, \\
v'_{n-1} = \frac{1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\left[1 - (\lambda_0-1)v_{n-1} - R(t,v_1,\ldots,v_n)(1+v_{n-1})\right], \\
v'_n = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{\gamma}{\lambda_0-1}R(t,v_1,\ldots,v_n)(1+v_n) - \right. \\
\left. - \frac{\pi_\omega(t)J'_n(t)}{J_n(t)}(1+v_n) - \varepsilon(t,v_1,\ldots,v_n)(1+v_n)\right],
\end{gathered} \tag{3.23}$$

где

$$\varepsilon(t,v_1,\ldots,v_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|L'_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)}{L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)} \times$$

$$\times\left[n-j-1+\frac{1}{\lambda_0-1}R(t,v_1,\ldots,v_n)\right], \quad R(t,v_1,\ldots,v_n) = (\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\times$$

$$\times \frac{f\left(t, \frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-1}Y(t,v_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} a_{0i}}(1+v_1),\ldots,\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)Y(t,v_n)}{a_{0n-1}}(1+v_{n-1}), Y(t,v_n)\right)}{Y(t,v_n)}.$$

Эту систему рассмотрим на множестве $[t_1,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n\colon |v_i|<\dfrac{1}{2},\ i=1,\ldots,v_n\right\}$ и $t_1\in[t_0,\omega[$ выбрано с учетом (3.6), (3.18), (3.19) так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}(1+v_{j+1})\in\Delta_{Y_j},$$

$$j=0,\ldots,n-2,\quad \text{при}\quad t\in[t_1,\omega[,\quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

На этом множестве правые части системы (3.23) непрерывны. Кроме того, в силу (3.20)

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_1)(1+v_{j+1})}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)'_t}{\dfrac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_1)(1+v_{j+1})}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}}=n-j-1+\frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n)'_t}{Y(t,v_n)}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow n-j-1+\frac{1}{\lambda_0-1}=\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1},\quad j=0,\ldots,n-2,\quad \text{равномерно по}\quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому согласно условию $(RN)_{\lambda_0}$

$$f\left(t,\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-1}Y(t,v_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}a_{0i}}(1+v_1),\ldots,\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)Y(t,v_n)}{a_{0n-1}}(1+v_{n-1}),Y(t,v_n)\right)=$$

$$=\alpha_0p(t)\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)[1+\delta_1(t,v_1,\ldots,v_n)],$$

где $\delta_1(t,v_1,\ldots,v_n)\longrightarrow 0$ при $t\uparrow\omega$ равномерно по $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$. Здесь в силу представлений (3.12), а также свойств 1 и 3 медленно меняющихся функций

$$\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)=$$

$$=|Y(t,v_n)|^{\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{|(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)|^{\sigma_j(n-j-1)}}{\prod_{j=0}^{n-2}|a_{0i}|^{\sigma_j}}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-2}L_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)=$$

$$= C|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)[1+\delta_2(t,v_1,\ldots,v_n)]=$$

$$= C|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)[1+\delta(t,v_1,\ldots,v_n)],$$

где $L_{0j},\ j=0,\ldots,n-1,$ — функции из (3.15), $\delta_2(t,v_1,\ldots,v_n)\longrightarrow 0$ при $t\uparrow\omega$ равномерно по $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\delta(t,v_1,\ldots,v_n)=0\quad\text{равномерно по}\quad(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{3.24}$$

В силу вышеизложенного и соотношения (3.22), которому удовлетворяет функция $y^{(n-1)}(t) = = Y(t,v_n)$, имеем

$$R(t,v_1,\ldots,v_n)=$$

$$=\frac{\alpha_0\nu_{n-1}(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}}{|Y(t,v_n)|^\gamma}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)\times$$

$$\times[1+\delta(t,v_1,\ldots,v_n)]=\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)J_n'(t)}{\gamma J_n(t)(1+v_n)}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}[1+\delta(t,v_1,\ldots,v_n)], \tag{3.25}$$

где функция $\delta$ удовлетворяет условию (3.24).

Теперь, учитывая (3.14), (3.18), (3.19), (3.25) и (3.7), замечаем также, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\varepsilon(t,v_1,\ldots,v_n)=0\quad\text{равномерно по}\quad(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

Вводя функцию

$$V(v_1,\ldots,v_n)=\frac{\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})}{1+v_n}-1-\sum_{j=0}^{n-2}\sigma_j v_{j+1}+v_n,$$

удовлетворяющую условиям

$$V(0,\ldots,0)=0,\qquad\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0}\frac{V(v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\ldots+|v_n|}=0, \tag{3.27}$$

и принимая во внимание представление (3.25), записываем систему дифференциальных уравнений (3.23) в виде

$$v_j' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \Bigg[ f_j(t, v_1, \ldots, v_n) - a_{0j} v_j + a_{0j} v_{j+1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} + v_n + V_j(v_1, \ldots, v_n) \Bigg], \quad j = 1, \ldots, n-2,$$

$$v_{n-1}' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \left[ f_{n-1}(t, v_1, \ldots, v_n) - \lambda_0 v_{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} + v_n + V_{n-1}(v_1, \ldots, v_n) \right],$$

$$v_n' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \left[ f_n(t, v_1, \ldots, v_n) + \gamma \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} - \gamma v_n + V_n(v_1, \ldots, v_n) \right],$$

где функции

$$f_j(t, v_1, \ldots, v_n) = -\frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{\gamma J_n(t)} \frac{(1 + v_j) \prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i}}{1 + v_n} \delta(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \left( 1 + \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{\gamma J_n(t)} \right) \frac{(1 + v_j) \prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i}}{1 + v_n)},$$

$$V_j(v_1, \ldots, v_n) = -V(v_1, \ldots, v_n)(1 + v_j) - v_j \left( \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} - v_n \right), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$f_n(t, v_1, \ldots, v_n) = -(\lambda_0 - 1)\varepsilon(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} \prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i} \delta(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \left( \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} - \gamma \right) \left( \prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i} - 1 - v_n \right),$$

$$V_n(v_1, \ldots, v_n) = \gamma(1 + v_n) V(v_1, \ldots, v_n) + \gamma v_n \left( \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} - v_n \right)$$

и в силу условий (3.7), (3.24), (3.26), (3.27) таковы, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_j(t, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}, \tag{3.28}$$

$$V_j(0, \ldots, 0) = 0, \quad \lim_{|v_1| + \ldots + |v_n| \to 0} \frac{V_j(v_1, \ldots, v_n)}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.29}$$

К данной системе дифференциальных уравнений, с целью упрощения ее вида, применим дополнительное преобразование

$$v_j = y_j - \frac{1}{\gamma} y_n, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad v_n = y_n. \tag{3.30}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений вида

$$y_j' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \left[F_j(t, y_1, \ldots, y_n) - a_{0j} y_j + \right.$$

$$\left. + a_{0j} y_{j+1} + Y(y_1, \ldots, y_n)\right], \quad j = 1, \ldots, n-2,$$

$$y_{n-1}' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \left[F_{n-1}(t, y_1, \ldots, y_n) - a_{0n-1} y_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{0n-1}}{\gamma} y_n + Y_{n-1}(y_1, \ldots, y_n)\right], \tag{3.31}$$

$$y_n' = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \left[F_n(t, y_1, \ldots, y_n) + \right.$$

$$\left. + \gamma \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k-1} y_k + (\sigma_{n-1} - 1) y_n + Y_n(y_1, \ldots, y_n)\right],$$

где

$$F_n(t, y_1, \ldots, y_n) = f_n\left(t, y_1 - \frac{1}{\gamma} y_n, \ldots, y_{n-1} - \frac{1}{\gamma} y_n, y_n\right),$$

$$Y_n(y_1, \ldots, y_n) = V_n\left(y_1 - \frac{1}{\gamma} y_n, \ldots, y_{n-1} - \frac{1}{\gamma} y_n, y_n\right),$$

$$F_j(t, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= f_j\left(t, y_1 - \frac{1}{\gamma} y_n, \ldots, y_{n-1} - \frac{1}{\gamma} y_n, y_n\right) - \frac{1}{\gamma} F_n(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$Y_j(y_1, \ldots, y_n) = V_j\left(y_1 - \frac{1}{\gamma} y_n, \ldots, y_{n-1} - \frac{1}{\gamma} y_n, y_n\right) - \frac{1}{\gamma} Y_n(y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений (2.2), в которой функция $h(t) = \dfrac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}$ удовлетворяет условиям (2.3), а функции $F_j, Y_j,\ j = 1, \ldots, n,$ удовлетворяют в силу (3.28) и (3.29) условиям (2.3) и (2.4). Кроме того, матрица $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n$ из системы (2.2) в данном случае состоит из элементов вида

$$c_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1\}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$c_{jj} = -a_{0j}, \quad c_{jj+1} = a_{0j} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad c_{n-1n-1} = -a_{0n-1}, \quad c_{n-1n} = \frac{a_{0n-1}}{\gamma},$$

$$c_{nk} = \gamma \sigma_{k-1} \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad c_{nn} = \sigma_{n-1} - 1.$$

Нетрудно проверить, что характеристическое уравнение этой матрицы $\det(C - \rho E) = 0$, где $E$ — единичная $(n \times n)$-матрица, имеет вид (3.4), и поэтому в силу условий теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью. Значит, для системы дифференциальных уравнений (3.31) выполнены все условия леммы 2.2. Согласно этой лемме система дифференциальных уравнений (3.31) имеет по крайней мере одно решение $(y_j)_{j=1}^n : [t_2, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ t_2 \in [t_1, \omega[$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем таких решений существует $m$-параметрическое семейство, если среди корней уравнения (3.4) имеется $m$ корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции $(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)$ на промежутке $[a, \omega[$. Каждому такому решению системы дифференциальных уравнений (3.31) в силу замен (3.30) и (3.21) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[ \longrightarrow \Delta_{Y_0}$ с асимптотическими при $t \uparrow \omega$ представлениями (3.8), (3.9), которое является $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решением.

Теорема 3.1 доказана.

Теперь приведем результат, вытекающий из данной теоремы и позволяющий записывать асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений в явном виде.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *функция* $f$ *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$, $\gamma \neq 0$ *и медленно меняющиеся составляющие* $L_j$ *функций* $\varphi_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *в представлении* (3.3) *удовлетворяют условию* $S_0$. *Тогда для каждого* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-*решения дифференциального уравнения* (1.1) (*в случае их существования*) *имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (3.8) *и*

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} \left| \gamma C J_n(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)]. \tag{3.32}$$

***Доказательство.*** Допустим, что дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решение $y\colon [t_0, \omega[ \longrightarrow \Delta_{Y_0}$. Тогда в силу теоремы 3.1 выполняются условия (3.5) – (3.7) и для данного решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения (3.8) – (3.10). Поскольку функции $L_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию $S_0$ и имеет место представление (3.9), то

$$L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} |y^{(n-1)}(t)| \right) = L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1+\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)} \right) =$$

$$= L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}+o(1)} \right) = L_j \left( \nu_j e^{[1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}}} \right) =$$

$$= L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}} \right) [1 + o(1)], \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, записываем соотношение (3.10) в виде

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C J_n(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left( \nu_j |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда следует, что для $y^{(n-1)}(t)$ при $t \uparrow \omega$ имеет место асимптотическое представление (3.32).

Поскольку в теоремах 3.1 и 3.2 $a < \omega \leq +\infty$, то они охватывают также случай, когда $\omega < +\omega_0$ и функция $f$ непрерывна на множестве

$$\Omega_0 = [a, \omega_0[\, \times \Delta_{Y_0} \times \ldots \times \Delta_{Y_{n-1}}. \tag{3.33}$$

Поэтому данные теоремы позволяют описывать также и асимптотику некоторых типов сингулярных решений.

**Определение 3.2.** *Решение дифференциального уравнения* (1.1) *будем называть сингулярным* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решением, если оно является* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решением и при этом функция* $f$ *в уравнении* (1.1) *является непрерывной на множестве* (3.33), *где* $\omega_0$ *таково, что* $a < \omega < \omega_0$.

**Определение 3.3.** *Пусть функция* $f$ *непрерывна на множестве* (3.33). *Будем говорить, что она удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0, \omega}$ *при* $\lambda_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ *и* $\omega \in\, ]a, \omega_0[$, *если существуют числа* $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, *непрерывная функция* $p\colon [t_0, \omega] \longrightarrow\, ]0, +\infty[$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z_j \to Y_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *функции* $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \to\, ]0, +\infty[$ *порядков* $\sigma_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_j : [t_0, \omega[\, \to \Delta_{Y_j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяющих условиям* (3.2), *имеет место представление* (3.3).

В случае, когда в представлении (3.3) функция $p$ такова, что $p(\omega) = \mathrm{const} > 0$, имеем

$$J_n(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{p(\omega)(\omega - t)^{\mu_n + 1}}{\mu_n + 1}, & \text{если} \quad \mu_n \neq -1, \\ -p(\omega) \ln(\omega - t), & \text{если} \quad \mu_n = -1, \end{cases} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и поэтому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} = \mu_n + 1.$$

Значит, в данном случае второе из условий (3.7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu_n \neq -1 \quad \text{и} \quad \mu_n + 1 = \frac{\gamma}{\lambda_0 - 1},$$

т. е. с учетом значений $\lambda_0$ лишь в случае, когда

$$\lambda_0 = 1 + \frac{\gamma}{\mu_n + 1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}. \tag{3.34}$$

При этом первое из условий (3.7) и условия (3.6) примут вид

$$\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma (\mu_n + 1) < 0, \quad \nu_{j-1} \nu_j \left[ 1 + (n - j) \frac{\gamma}{\mu_n + 1} \right] \gamma (\mu_n + 1) < 0, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{3.35}$$

Следовательно, из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 3.1.** *Пусть функция* $f$ *непрерывна на множестве* (3.33). *Пусть, кроме того,* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, $\omega \in \,]a, \omega_0[$, *функция* $f$ *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0, \omega}$, $\gamma \neq 0$ *и* $p(\omega) > 0$. *Тогда для существования сингулярных* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решений дифференциального уравнения* (1.1) *необходимо, а если алгебраическое относительно* $\rho$ *уравнение* (3.4) *не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы наряду с* (3.1), (3.5) *выполнялись условия* (3.34) *и* (3.35). *Более того, для каждого такого решения при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t) = \frac{\left(\dfrac{\gamma(t-\omega)}{\mu_n + 1}\right)^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1}\left[1 + (n-i)\dfrac{\gamma}{\mu_n + 1}\right]} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = 0, \ldots, n-2, \tag{3.36}$$

*где* $y^{(n-1)}(t)$ — *неявная функция вида*

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1}(\omega - t)^{\frac{\mu_n + 1}{\gamma} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

*определяемая из асимптотического соотношения*

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j(\omega - t)^{n-j-1}|y^{(n-1)}(t)|\right)} = -\frac{\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C p(\omega)}{\mu_n + 1}(\omega - t)^{\mu_n + 1}[1 + o(1)],$$

*в котором* $L_j\left(y^{(j)}\right) = |y^{(j)}|^{-\sigma_j}\varphi_j\left(y^{(j)}\right)$, $j = \overline{0, n-1}$, — *медленно меняющиеся составляющие функций* $\varphi_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, *причем существует* $m$*-параметрическое семейство решений с такими представлениями в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (3.4) *имеется* $m$ *корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, совпадающий со знаком числа* $\gamma(\mu_n + 1)$.

***Следствие* 3.2.** *Пусть выполняются условия следствия* 3.1 *и медленно меняющиеся составляющие* $L_j$ *функций* $\varphi_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *в представлении* (3.3) *удовлетворяют условию* $S_0$. *Тогда для каждого сингулярного* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решения дифференциального уравнения* (1.1) (*в случае их существования*) *при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления* (3.36) *и*

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1}\left|\frac{\gamma C p(\omega)}{\mu_n + 1}(\omega - t)^{\mu_n + 1}\prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j(\omega - t)^{\frac{\mu_n + 1 + (n-j-1)\gamma}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1 + o(1)].$$

***Замечание* 3.2.** Аналогичные утверждения могут быть получены и для случая, когда $p(\omega) = 0$. В этом случае в условиях этих утверждений и асимптотических соотношениях останется, как и в теоремах 3.1, 3.2, интеграл $J_n$, поскольку он уже асимптотически не вычисляется.

Проиллюстрируем полученные результаты на двух примерах. Сначала рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}{\sum_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}, \tag{3.37}$$

в котором $\alpha_k \in \{-1,1\}$, $p_k\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(\omega \le +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_{kj}\colon \Delta_{Y_j} \longrightarrow ]0,+\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^j \to Y_j$ функция порядка $\sigma_{kj}$, $Y_j$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta_{Y_j}$ — некоторая односторонняя окрестность $Y_j$, $k=1,\ldots,m, j=0,1,\ldots,n-1$.

Выбрав произвольным образом число $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, предположим, что существуют $s\in\{1,\ldots,l\}$ и $r\in\{l+1,\ldots,m\}$, для которых выполняются неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|}<\frac{\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{\lambda_0-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj}-\sigma_{kj})a_{0j+1}\quad \text{при всех}\quad k\in\{1,\ldots,l\}\setminus\{s\} \tag{3.38}$$

и

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_r(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|}<$$

$$<\frac{\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{\lambda_0-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{rj}-\sigma_{kj})a_{0j+1}\quad \text{при всех}\quad k\in\{l+1,\ldots,m\}\setminus\{r\}, \tag{3.39}$$

где $a_{0k}$, $k=1,\ldots,n$, определены в лемме 2.1.

Покажем, что при выполнении этих условий правая часть уравнения (3.37) удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$.

Пусть $z_j\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$, $j=0,1,\ldots,n-1$, — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (3.2). Тогда для них имеют место асимптотические соотношения

$$\ln|z_j(t)|=\left(\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}+o(1)\right)\ln|\pi_\omega(t)|,\quad j=0,1,\ldots,n-1,\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Учитывая их, представления вида

$$\varphi_{kj}(y^{(j)})=|y^{(j)}|^{\sigma_{kj}}L_{kj}(y^{(j)}),\quad k=1,\ldots,m,\quad j=0,\ldots,n-1,$$

где $L_{kj}(y^{(j)})\colon \Delta_{Y_j}\longrightarrow ]0,+\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)}\longrightarrow Y_j$, а также свойство 2 медленно меняющихся функций (из введения), при $k\in\{1,\ldots,l\}\setminus\{s\}$ имеем

$$\ln\left(\frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}\right)=\ln p_k(t)-\ln p_s(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\ln\varphi_{kj}(z_j(t))-\ln\varphi_{sj}(z_j(t))\right)=$$

$$=\ln p_k(t)-\ln p_s(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\left((\sigma_{kj}-\sigma_{sj})\ln|z_j(t)|+\ln L_{kj}(z_j(t))-L_{sj}(z_j(t))\right)=$$

$$=\ln p_k(t)-\ln p_s(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\ln|z_j(t)|\left(\sigma_{kj}-\sigma_{sj}+\frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}-\frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}\right)=$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln|\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{(\sigma_{kj} - \sigma_{sj})a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1} + o(1) \right) =$$

$$= |\ln|\pi_\omega(t)|| \left( \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} - \frac{\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})a_{0j+1} + o(1) \right) \right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда в силу выполнения условия (3.38) следует, что выражение, стоящее слева, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, и поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} \left( \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогично, с использованием условия (3.39) устанавливаем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \left( \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{r\}.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\frac{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}{\sum_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е. имеет место асимптотическое соотношение (3.3), в котором

$$\alpha_0 = \alpha_s \alpha_r, \quad p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

причем здесь $\varphi_j$ — непрерывная правильно меняющаяся при $z_j \longrightarrow Y_j$ функция порядка $\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj}$ и ее медленно меняющаяся составляющая $L_j$ равна отношению медленно меняющихся составляющих $L_{sj}$ и $L_{rj}$ функций $\varphi_{sj}$ и $\varphi_{rj}$.

Следовательно, правая часть уравнения (3.37) удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$. Поэтому в случае, когда при некоторых $s \in \{1, \ldots, l\}$, $r \in \{l+1, \ldots, m\}$ выполняются условия (3.38), (3.39) и отлична от нуля постоянная $\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{rj})$, для уравнения (3.37) справедливы теоремы 3.1 и 3.2 о существовании и асимптотике $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений с заменой в них постоянных $\alpha_0$, $\sigma_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и функций $p$, $\varphi_j$, $L_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, на указанные выше постоянные и функции.

Заметим также, что если $\omega$ является внутренней точкой промежутка, на котором в уравнении (3.37) непрерывны и положительны все функции $p_i$, $i = 1, \ldots, m$, то неравенства (3.38), (3.39) принимают соответственно вид

$$(\lambda_0 - 1) \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})a_{0j+1} < 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}$$

и

$$(\lambda_0 - 1)\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{rj} - \sigma_{kj})a_{0j+1} < 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{l+1,\ldots,m\} \setminus \{r\}.$$

В данном случае при выполнении этих неравенств и неравенства $1 - \sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj} - \sigma_{rj}) \neq$ $\neq 0$ для дифференциального уравнения (3.37) справедливы следствия 3.1 и 3.2 о наличии и асимптотике сингулярных $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений с заменой в них постоянных $\alpha_0$, $\sigma_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и функций $p$, $\varphi_j$, $L_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, на те же, что и выше.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = p(t)|y|^\sigma \ln(1 + |y|), \tag{3.40}$$

где $p\colon [a, +\infty[ \longrightarrow ]0, +\infty[$ — непрерывная функция и $\sigma > 1$. Известно (см. [9, с. 262–273], § 11), что при любом $\omega > a$ уравнение (3.40) имеет сингулярное решение второго рода $y\colon$ $[a, \omega[ \longrightarrow ]0, +\infty[$ такое, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty.$$

Выясним, используя следствия 3.1 и 3.2, вопрос о наличии у дифференциального уравнения (3.40) сингулярных $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$. Правая часть данного уравнения при любом $\lambda_0 \in R \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ и $\omega > a$ заведомо удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0,\omega}$, причем здесь

$$\alpha_0 = 1, \quad \varphi(y) = |y|^\sigma \ln(1 + |y|), \quad \gamma = 1 - \sigma < 0, \quad \mu_n = \sigma(n-1),$$

медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ составляющая функции $\varphi$ удовлетворяет условию $S_0$, и алгебраическое уравнение (3.4) принимает вид

$$(1 + \rho)\prod_{k=1}^{n-1}(a_{0k} + \rho) - \sigma = 0. \tag{3.41}$$

В силу изложенного перед следствием 3.1 уравнение (3.40) может иметь сингулярные $P_\omega(Y_0, \ldots$ $\ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения лишь в случае, когда $\lambda_0 = 1 + \dfrac{\gamma}{\mu_n + 1}$. При таком $\lambda_0$ условия (3.34) и (3.35) будут выполняться лишь в случае, когда $\nu_{j-1} = 1$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. если $Y_{j-1} = +\infty$, $j = 1, \ldots, n$. Кроме того, учитывая неравенства $1 - \sigma < 0$ и $a_{0k} > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, нетрудно убедиться в том, что уравнение (3.41) не имеет чисто мнимых корней. Поэтому согласно следствиям 3.1 и 3.2 дифференциальное уравнение (3.41) имеет сингулярные $P_\omega(+\infty, \ldots, +\infty, \lambda_0)$-решения, где $\lambda_0 = 1 + \dfrac{\gamma}{\mu_n + 1}$, и каждое из них допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \frac{[\sigma(n-1)+1]^j\,[(1-\sigma)(t-\omega)]^{n-j-1}}{\prod_{i=1}^{n-1}[\sigma(i-1)+n-i+1]}y^{(n-1)}(t)[1+o(1)], \quad j = 0, \ldots, n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t) = \left|\frac{(n-1)(\sigma-1)^{\sigma(n-1)+1}p(\omega)}{[\sigma(n-1)+1]\prod_{i=0}^{n-1}[\sigma(i-1)+n-i+1]^\sigma}(\omega-t)^{\sigma(n-1)+1}\ln(\omega-t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)].$$

Каждое такое решение дифференциального уравнения (3.40), очевидно, является сингулярным (по И. Т. Кигурадзе) решением второго рода.

Известно также (см. [9, с. 280 – 289], § 13), что если $n$ четно и

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}p(t)\,dt = +\infty, \tag{3.42}$$

то уравнение (3.40) имеет континуум исчезающих в бесконечности кнезеровских решений.

В случае четного $n$, использовав теоремы 3.1 и 3.2, выясним вопрос о наличии у дифференциального уравнения (3.40) при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ исчезающих в бесконечности $P_{+\infty}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_0)$-решений. В силу теоремы 3.1 такие решения дифференциального уравнения (3.40) могут существовать лишь в случае, когда

$$\frac{n-2}{n-1} < \lambda_0 < 1, \quad \nu_{n-1} = 1, \quad \nu_{j-1} = (-1)^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{tJ_n'(t)}{J_n(t)} = \frac{1-\sigma}{\lambda_0 - 1},$$

т. е. лишь тогда, когда существует отличный от нуля конечный предел $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{tJ_n'(t)}{J_n(t)}$,

$$\lambda_0 = 1 + \frac{(1-\sigma)J_n(t)}{tJ_n'(t)} \quad \text{и} \quad \frac{n-2}{n-1} < \lambda_0 < 1.$$

При таком $\lambda_0$ выполняется условие (3.42), алгебраическое уравнение (3.41) не имеет чисто мнимых корней, а имеет (см. [10, с. 91], глава II, § 8) по крайней мере один корень с положительной действительной частью. В этом случае, согласно теоремам 3.1 и 3.2, у дифференциального уравнения (3.40) существует бесконечное множество положительных $P_{+\infty}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_0)$-решений и для каждого из них при $t \to +\infty$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)t]^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}}\, y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t) = -\left| \frac{(1-\sigma)|\lambda_0 - 1|^{\sigma(n-1)-1}[(n-1)\lambda_0 - (n-2)]}{\prod_{i=1}^{n-1} |a_{0i}|^{\sigma}} J_n(t) \ln t \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)].$$

Эти решения уравнения (3.40) являются, очевидно, кнезеровскими.

## Литература

1. *Евтухов В. М., Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 4. – С. 424 – 438.
2. *Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 333 – 349.

3. *Кусик Л. И.* Условия существования и асимптотика некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2014. – **41**, № 2. – С. 184 – 197.
4. *Евтухов В. М., Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2009. – **14**, вип. 20. – С. 57 – 74.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.
8. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 5. – С. 584 – 600.
9. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Получено 17.06.19