УДК 517.988.63+512.625.5

**Х. А. Хачатрян** (Ин-т математики НАН Армении, Ереван),
**С. М. Андриян** (Нац. аграр. ун-т Армении, Ереван)

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

We study and solve one class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity. The existence of two parametric families of monotone and bounded solutions is proved. Under certain additional conditions, we establish the asymptotic behavior of the constructed solutions. The obtained results are extended to the corresponding inhomogeneous discrete matrix equations and to certain more general cases of nonlinearity.

Статтю присвячено вивченню і розв'язанню одного класу дискретних матричних рівнянь із кубічною нелінійністю. Доведено існування двопараметричної сім'ї монотонних і обмежених розв'язків. При деяких додаткових умовах встановлено асимптотичну поведінку побудованих розв'язків. Отримані результати поширено на відповідне неоднорідне дискретне матричне рівняння і деякі більш загальні випадки нелінійності.

**1. Введение.** Рассматривается нелинейное матричное уравнение вида

$$cX_{\text{cube}} + (1-c)X = AXB \tag{1}$$

относительно матрицы $X = (x_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, где $X_{\text{cube}} = \left(x_{ij}^3\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ — матрица с соответствующими элементами искомой матрицы $X$, возведенными в куб, $A = (a_{mi}^*)_{m,i\in\mathbb{Z}}$ и $B = \left(b_{jn}^*\right)_{n,j\in\mathbb{Z}}$ — матрицы Теплица с элементами $a_{mi}^* := a_{m-i}$, $m, i \in \mathbb{Z}$, и $b_{jn}^* := b_{n-j}$, $n, j \in \mathbb{Z}$, соответственно, $c \in (0, 1]$ — числовой параметр.

Уравнение (1) в раскрытой форме запишется в виде следующей бесконечной системы:

$$cx_{mn}^3 + (1-c)x_{mn} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{m-i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{n-j}\, x_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}. \tag{1$'$}$$

Предположим, что числовые последовательности $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и $\{b_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_k, b_s > 0 \quad \forall k,\, s \in \mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1, \qquad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s = 1, \tag{2a}$$

$$a_{-k} = a_k, \qquad b_{-s} = b_s \quad \forall k,\, s \in \mathbb{N}, \qquad a_k, b_s \downarrow \quad \text{на} \quad \mathbb{Z}^+ \equiv \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{2b}$$

Заметим, что из условий (2a) следует, что

$$0 < a_0 < 1, \qquad 0 < b_0 < 1. \tag{2c}$$

* Выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-1A004.

Система уравнений $(1')$ возникает в дискретных задачах в $p$-адической теории струн (см., например, [1 – 3]). При этом физический интерес представляют только вещественные решения системы $(1')$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицы с постоянными элементами вида

$$x_{mn} \equiv 0, \qquad x_{mn} \equiv \pm 1, \qquad (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

являются тривиальными решениями уравнения (1).

Следует отметить, что при $c = 0$ нелинейная система $(1')$ преобразуется в линейную, которая в пространстве ограниченных последовательностей имеет только тривиальные решения. Трудности исследования и построения нетривиального решения системы $(1')$ возникают особенно для значений $c$, близких к нулю.

Целью настоящей работы является построение и исследование поведения нетривиальных решений

$$-1 < x_{mn} < 1, \qquad (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

при любом $c \in (0,1]$.

Полученные результаты могут иметь также прикладной интерес при исследовании соответствующего непрерывного аналога как двумерного, так и одномерного (см. [1 – 7]). Отметим, что одномерному непрерывному аналогу, имеющему важное физическое применение, будет соответствовать уравнение (1) относительно вектора-столбца $X = (\ldots, -x_2, -x_1, x_0, x_1, x_2, \ldots)^T$ с единичной матрицей $B$ (и, следовательно, нет необходимости рассматривать матрицу $B$). В одномерном случае соответствующая линейная система исследовалась в работе [8].

**2. Вспомогательные факты.** Сначала докажем две леммы, которые играют ключевую роль при дальнейшем изложении, а затем еще четыре леммы о некоторых дополнительных свойствах элементов матриц $A$ и $B$, используемые при доказательстве основной теоремы.

***2.1. Сведение системы*** $(1')$ ***к системе, определенной на*** $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Сведем систему уравнений $(1')$ со всей целочисленной решеткой $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ на ее четверть $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих двух лемм.

**Лемма 1.** *Если* $(y_{mn})_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}^+}}$ *— решение системы нелинейных уравнений*

$$c y_{mn}^3 + (1-c) y_{mn} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{m-i} \sum_{j=0}^{\infty} (b_{n-j} - b_{n+j})\, y_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+, \tag{3}$$

*то*

$$x_{mn} = \begin{cases} y_{mn}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z}^+, \\ -y_{m(-n)}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

*— нечетное решение системы уравнений* $(1')$.

**Лемма 2.** *Если* $(z_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ *— решение системы нелинейных уравнений*

$$c z_{mn}^3 + (1-c) z_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) \sum_{j=0}^{\infty} (b_{n-j} - b_{n+j})\, z_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \tag{5}$$

*то*

$$y_{mn} = \begin{cases} z_{mn}, & \textit{если} \quad m \in \mathbb{Z}^+, \\ -z_{-mn}, & \textit{если} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{6}$$

*— нечетное решение системы* (3).

Итак, решение системы ($1'$) сведено к решению системы (5) и к соотношениям (4), (6).

***2.2. Априорные оценки.*** Основной целью этого подпункта является получение оценок для элементов бесконечных матриц $A$ и $B$ (лемма 6), доказательство которых проводится на основании нижеприведенных лемм.

**Лемма 3.** *Пусть выполняются условия* (2a) *и* (2b). *Тогда для любых чисел* $c \in (0, 1]$ *и* $q > 1$ *характеристические уравнения относительно* $p$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q^{-p|i|} = \varepsilon \quad \textit{и} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j q^{-p|j|} = \varepsilon, \tag{7}$$

*где*

$$\varepsilon = \frac{1 + \max\left\{a_0, b_0, \sqrt{1-c}\right\}}{2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{8}$$

*имеют единственные положительные решения* $p_1 \equiv p_1(c)$ *и* $p_2 \equiv p_2(c)$ *соответственно.*

***Доказательство.*** Рассмотрим функцию $\chi_1(p) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q^{-p|i|} - \varepsilon$, $p \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$. В предположениях леммы имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1. \tag{9}$$

С учетом (8) и (9) нетрудно убедиться в следующих свойствах функции $\chi_1$:

1) $\chi_1 \in C(\mathbb{R}^+)$;

2) $\chi_1(p) \downarrow$ по $p$ на $\mathbb{R}^+$;

3) $\chi_1(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k - \varepsilon = \dfrac{1 - \max\left\{a_0, b_0, \sqrt{1-c}\right\}}{2} > 0$;

4) $\chi_1(+\infty) = \lim_{p \to +\infty} \chi_1(p) = a_0 - \dfrac{1 + \max\left\{a_0, b_0, \sqrt{1-c}\right\}}{2} \leq a_0 - \dfrac{1 + a_0}{2} = \dfrac{a_0 - 1}{2} < 0$

(последнее неравенство выполняется в силу условия (2c)). Тогда на основании теоремы Больцано – Коши и вследствие убывания функции $\chi_1$ на $\mathbb{R}^+$ существует единственное положительное число $p_1 \equiv p_1(c)$, являющееся корнем уравнения $\chi_1(p) = 0$, откуда приходим к завершению доказательства леммы 3.

Зафиксируем число $c \in (0, 1]$ $\big($а следовательно, и числа $p_1 \equiv p_1(c)$, $p_2 \equiv p_2(c)\big)$ для дальнейшего изложения.

В связи с тем, что элементы матриц $A$ и $B$ имеют одинаковые свойства (см. (2a), (2b)), доказательство утверждений нижеприведенных лемм будет проведено только для матрицы $A$. Как утверждения, так и их доказательства для матрицы $B$ получаются заменой элементов матрицы $A$ на элементы $B$ и числа $p_1 \equiv p_1(c)$ на $p_2 \equiv p_2(c)$.

**Лемма 4.** *Если выполняются условия* (2a) *и* (2b), *а число* $\varepsilon$ *определено формулой* (8), *то справедлива следующая оценка снизу*:

$$\sum_{i=-\infty}^{m} a_i q^{p_1 i} + q^{2p_1 m} \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i q^{-p_1 i} \geq \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+. \tag{10}$$

**Лемма 5.** *В условиях леммы* 4 *справедлива оценка*

$$1+a_m-2\sum_{i=m}^{\infty}a_i-q^{-p_1m}\sum_{i=-\infty}^{m}a_iq^{p_1i}+q^{p_1m}\sum_{i=m}^{\infty}a_iq^{-p_1i}\geq\varepsilon\big(1-q^{-p_1m}\big)\quad\forall m\in\mathbb{Z}^+. \tag{11}$$

***Доказательство*** (лемма 4 доказывается аналогично). Рассмотрим последовательность $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$:

$$S_m=1+a_m-2\sum_{i=m}^{\infty}a_i-q^{-p_1m}\sum_{i=-\infty}^{m}a_iq^{p_1i}+q^{p_1m}\sum_{i=m}^{\infty}a_iq^{-p_1i}-\varepsilon\big(1-q^{-p_1m}\big)\,,\quad m\in\mathbb{Z}^+.$$

С учетом (9) и (2a), (2b) заметим, что $S_0=2\Big(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)-2\sum_{i=0}^{\infty}a_i=0$. При $m\geq 1$ после несложных преобразований получаем

$$S_{m+1}-S_m\geq\left(q^{p_1}-1\right)\,q^{-p_1(m+1)}\left(\sum_{i=-\infty}^{m}a_iq^{p_1i}+q^{2p_1m}\sum_{i=m+1}^{\infty}a_iq^{-p_1i}-\varepsilon\right)\geq 0$$

в силу оценки (10) и предположения, что $q>1$. Итак, последовательность $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ неубывающая, откуда следует, что $S_m\geq S_0=0\ \forall m\in\mathbb{Z}^+$.

**Лемма 6.** *Пусть выполняются все условия леммы* 5. *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})(1-q^{-p_1i})\geq\varepsilon(1-q^{-p_1m}),\quad m\in\mathbb{Z}^+. \tag{12}$$

***Доказательство*** проводится простейшими преобразованиями с использованием неравенства $a_{m-i}-a_{m+i}\geq 0\ \forall m,\ i,n,j\in\mathbb{Z}^+$ (см. (2a), (2b)) и оценки (11).

**3. О разрешимости вспомогательной граничной задачи для системы (5).** ***3.1. Построение последовательных приближений для системы* (5)*. Ограниченность и монотонность итераций.*** Перейдем к построению нетривиального решения следующей вспомогательной граничной задачи для (5):

$$cz_{mn}^3+(1-c)z_{mn}=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})\,z_{ij},$$

$$0\leq z_{mn}<1\quad\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\quad z_{mn}\not\equiv 0, \tag{5$'$}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}z_{mn}=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}z_{mn}=1.$$

Заметим, что $z_{mn}=0$ при $m\cdot n=0$ $\big((m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\big)$, т. е. $z_{0n}=z_{m0}=z_{00}=0\ \forall m,\ n\in\mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение последовательные приближения

$$c\Big(z_{mn}^{(k+1)}\Big)^3+(1-c)z_{mn}^{(k+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})z_{ij}^{(k)},\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

$$z_{mn}^{(0)}=1,\quad(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+.$$

Индукцией по $k$ докажем, что последовательность $\left\{z_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ при $(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ ограничена сверху:

$$z_{mn}^{(k)}\leq 1,\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Действительно, при $k=0$ в (14) имеет место равенство в силу определения нулевого приближения (13). Предполагая, что (14) выполняется при некотором $k\in\mathbb{N}$, и используя неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})=1+a_m-2\sum_{i=m}^{\infty}a_i\leq 1,\qquad \sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})\leq 1,$$

получаем $c\left(z_{mn}^{(k+1)}\right)^3+(1-c)z_{mn}^{(k+1)}\leq 1$, откуда следует, что

$$\left(z_{mn}^{(k+1)}-1\right)\left(c\left(z_{mn}^{(k+1)}\right)^2+cz_{mn}^{(k+1)}+1\right)\leq 0. \tag{15}$$

Выделяя из второго сомножителя (15) полный квадрат и учитывая, что $c\in(0,1]$, имеем

$$c\left(z_{mn}^{(k+1)}+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{c}{4}\geq 1-\frac{c}{4}>0,$$

поэтому согласно (15) первый сомножитель неположителен: $z_{mn}^{(k+1)}-1\leq 0$, откуда $z_{mn}^{(k+1)}\leq 1$. Следовательно, неравенство (14) имеет место при любых $k\in\mathbb{N}$ и $(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$.

Далее, покажем ограниченность снизу итераций (13). Прежде всего заметим, что $0<$ $<\sqrt{\dfrac{\varepsilon^2+c-1}{c}}<1$, так как $c\in(0;1]$ и $1>\varepsilon>\dfrac{\sqrt{1-c}+\max\left(a_0,\sqrt{1-c}\right)}{2}\geq\sqrt{1-c}$.

Теперь убедимся, что все члены последовательности $\left\{z_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ при $(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ удовлетворяют следующей оценке снизу:

$$z_{mn}^{(k)}\geq(1-q^{-p_1m})(1-q^{-p_2n})\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}},\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

Неравенство, очевидно, справедливо при $mn=0$ в силу второго условия ($5'$). Пусть $(m,n)\in$ $\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. При $k=0$ оценка (16) справедлива согласно определению нулевого приближения (13). Пусть (16) выполняется при некотором $k\in\mathbb{N}$. Тогда с использованием оценки (12) для любой пары $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ из (13) имеем

$$c\left(z_{mn}^{(k+1)}\right)^3+(1-c)z_{mn}^{(k+1)}\geq\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})(1-q^{-p_1i})\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})(1-q^{-p_2j})\geq\varepsilon^2\left((1-q^{-p_1m})(1-q^{-p_2n})\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\right).$$

С учетом того, что $c\in(0,1],\ q>1,\ 0<1-q^{-p_is}<1\ \forall s\in\mathbb{N},\ i=1,2,$ и неравенства

$$c\Big(\big(1-q^{-p_1 m}\big)\big(1-q^{-p_2 n}\big)\Big)^2\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}+1-c<c\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}+1-c=\varepsilon^2\quad\forall m,\,n\in\mathbb{N},$$

получаем

$$c\Big(z_{mn}^{(k+1)}\Big)^3+(1-c)z_{mn}^{(k+1)}\geq c\left(\big(1-q^{-p_1 m}\big)\big(1-q^{-p_2 n}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\right)^3+$$

$$+(1-c)\left(\big(1-q^{-p_1 m}\big)\big(1-q^{-p_2 n}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\right).$$

Поскольку $c$ принадлежит $(0,1]$ и кубическая функция

$$H(t)=ct^3+(1-c)t,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{17}$$

монотонна на всей действительной оси: $H(t)\uparrow$ по $t$ на $\mathbb{R}$, из полученного выше неравенства получаем оценку (16).

Индукцией по $k$ также можно доказать монотонность итераций:

$$z_{mn}^{(k)}\downarrow\quad\text{по}\quad k,\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\ldots; \tag{18}$$

при фиксированном $m\in\mathbb{Z}^+$

$$z_{mn}^{(k)}\uparrow\quad\text{по}\quad n\quad\text{на}\quad\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{19}$$

при фиксированном $n\in\mathbb{Z}^+$

$$z_{mn}^{(k)}\uparrow\text{по}\ m\quad\text{на}\quad\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{20}$$

$\Big($последовательность $\Big\{z_{mn}^{(k)}\Big\}_{k=0}^{\infty}$ неубывающая на $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\ k=0,1,2,\ldots\Big)$.

***3.2. Существование предела итераций.*** Из (14), (16) и (18) следует, что при $k\to+\infty$ последовательность $\Big\{z_{mn}^{(k)}\Big\}_{k=0}^{\infty}$ имеет предел (см. [9]) $\lim_{k\to+\infty}z_{mn}^{(k)}=z_{mn}(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, причем элементы предельной матрицы $(z_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ удовлетворяют системе (5) и для них имеет место двусторонняя оценка

$$\big(1-q^{-p_1 m}\big)\big(1-q^{-p_2 n}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\leq z_{mn}\leq 1\quad\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+. \tag{21}$$

С другой стороны, согласно (14), (19) и (20) существует предел

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}z_{mn}=\lim_{m\to+\infty}z_{m+\infty}=\lambda,\qquad 0<\sqrt{\frac{\varepsilon^2+c-1}{c}}\leq\lambda<+\infty,$$

причем из представления системы уравнений (5) и условий, наложенных на нее, следует, что $\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\ z_{mn}=\lim_{n\to+\infty}z_{+\infty\,n}=\lambda$. Записывая систему уравнений (5) в виде

$$cz_{mn}^3+(1-c)z_{mn}=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_{n-j}\,z_{ij}-\sum_{j=n}^{\infty}b_j\,z_{i\,j-n}\right),\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,$$

и при фиксированном $m \in \mathbb{Z}^+$ переходя к пределу при $n \to +\infty$ с учетом непрерывности кубической функции (17), известного предельного соотношения (см. [10])

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n-j}\, x_j \,=\, \lim_{n\to+\infty} x_j \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s$$

и $0 < \sum_{j=n}^{\infty} b_j z_{i\,j-n} \le \sum_{j=n}^{\infty} b_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \;\forall i \in \mathbb{Z}^+$ (в силу (14) и (2a)), имеем

$$cz^3_{m\;+\infty} + (1-c) z_{m\;+\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) z_{i\;+\infty}. \tag{22}$$

Затем в полученной системе уравнений устремляя $m$ к $+\infty$, аналогично находим $c\lambda^3 + (1 - c)\lambda = \lambda$. Поскольку $\lambda > 0$, из последнего равенства получаем $\lambda = 1$. Следовательно, для решения граничной задачи ($5'$) справедлива указанная асимптотика.

***3.3. Об одном дополнительном свойстве решения системы* (5).** Пусть

$$l_1(\mathbb{Z}^+) \equiv \left\{ h = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots) \colon \sum_{i=0}^{\infty} |h_i| < +\infty \right\},$$

$$l_1(\mathbb{Z}^-) \equiv \left\{ \tilde{h} = (\ldots, \tilde{h}_{-n}, \ldots, \tilde{h}_{-2}, \tilde{h}_{-1}) \colon \sum_{i=-\infty}^{-1} |\tilde{h}_i| < +\infty \right\}.$$

Сначала докажем, что если, дополнительно, предположить, что

$$m_a \equiv 2\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_i < \infty, \qquad m_b \equiv 2\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) b_j < \infty, \tag{23}$$

то имеют место включения

$$U^{(k)} := \Big( 1 - z^{(k)}_{0+\infty}, 1 - z^{(k)}_{1+\infty}, 1 - z^{(k)}_{2+\infty}, \ldots \Big) \in l_1(\mathbb{Z}^+), \tag{24}$$

$$V^{(k)} := \Big( 1 - z^{(k)}_{+\infty 0}, 1 - z^{(k)}_{+\infty 1}, 1 - z^{(k)}_{+\infty\, 2}, \ldots \Big) \in l_1(\mathbb{Z}^+). \tag{25}$$

Индукцией по $k$ докажем включение (24). С этой целью для системы (22) рассмотрим последовательные приближения

$$\begin{gathered} c\Big(z^{(k+1)}_{m+\infty}\Big)^3 + (1-c) z^{(k+1)}_{m+\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) z^{(k)}_{i+\infty}, \quad k = 0, 1, \ldots, \\ z^{(0)}_{m+\infty} = 1, \quad m \in \mathbb{Z}^+. \end{gathered} \tag{26}$$

При $k = 0$ включение (24), очевидно, справедливо. Допустим, (26) имеет место при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом (2a), (2b), (14) и (26) имеем

$$0 \leq 1 - z_{m+\infty}^{(k+1)} \leq \Big(1 - z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\bigg(1 + cz_{m+\infty}^{(k+1)} + c\Big(z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)^2\bigg) =$$

$$= 1 - \bigg(c\Big(z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)^3 + (1-c)z_{m+\infty}^{(k+1)}\bigg) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i} - a_{m+i})z_{i+\infty}^{(k)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) + \sum_{i=m}^{\infty} a_i \leq 2\sum_{i=m}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big).$$

Поскольку в силу (23) и (2a) имеем соответственно $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \dfrac{m_a}{2}$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m-i} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) < +\infty,$$

то $1 - z_{m+\infty}^{(k+1)} \in l_1(\mathbb{Z}^+)$.

Заметим, что существуют такие натуральные числа $r_1$ и $r_2$, что

$$\rho_1 \equiv \sum_{i=-\infty}^{r_1} a_i < 1, \quad \rho_2 \equiv \sum_{j=-\infty}^{r_2} b_j < 1. \tag{27}$$

Зафиксируем $r_1$ и $r_2$. Воспользовавшись (16) и доказанным выше неравенством

$$\Big(1 - z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\bigg(1 + c\big(1 - q^{-p_1 m}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2 + c - 1}{c}} + \big(1 - q^{-p_1 m}\big)^2\big(\varepsilon^2 + c - 1\big)\bigg) \leq$$

$$\leq \Big(1 - z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\bigg(1 + cz_{m+\infty}^{(k+1)} + c\Big(z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)^2\bigg) \leq 2\sum_{i=m}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad m \in \mathbb{Z}^+,$$

с учетом (23), (27) и (2a) оценим следующую сумму сверху:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(1 - z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\bigg(1 + c\big(1 - q^{-p_1 m}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2 + c - 1}{c}} + \big(1 - q^{-p_1 m}\big)^2\big(\varepsilon^2 + c - 1\big)\bigg) \leq$$

$$\leq 2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=m}^{\infty} a_i + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) \leq$$

$$\leq m_a + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r_1} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=r_1+1}^{\infty} a_{m-i}\Big(1 - z_{i+\infty}^{(k)}\Big) \leq$$

$$\leq\ m_a+\sum_{i=0}^{r_1}\Big(1-z_{i+\infty}^{(k)}\Big)\sum_{k=-\infty}^{i}a_k+\sum_{i=r_1+1}^{\infty}\Big(1-z_{i+\infty}^{(k)}\Big)\leq$$

$$\leq m_a+\rho_1\sum_{i=0}^{r_1}\Big(1-z_{i+\infty}^{(k)}\Big)+\sum_{i=r_1+1}^{\infty}\Big(1-z_{i+\infty}^{(k)}\Big).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{m=0}^{r_1}\Big(1-z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\Big(1-\rho_1+\big(1-q^{-p_1m}\big)\sqrt{c(\varepsilon^2+c-1)}+\big(1-q^{-p_1m}\big)^2\big(\varepsilon^2+c-1\big)\Big)+$$

$$+\sum_{m=r_1+1}^{\infty}\Big(1-z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\Big(\big(1-q^{-p_1m}\big)\sqrt{c(\varepsilon^2+c-1)}+\big(1-q^{-p_1m}\big)^2\big(\varepsilon^2+c-1\big)\Big)\leq m_a.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\bigg(\Big(1-q^{-p_1(r_1+1)}\Big)\sqrt{c(\varepsilon^2+c-1)}+\Big(1-q^{-p_1(r_1+1)}\Big)^2\big(\varepsilon^2+c-1\big)\bigg)\sum_{i=m+1}^{\infty}\Big(1-z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)+$$

$$+(1-\rho_1)\sum_{m=0}^{r_1}\Big(1-z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\leq\ m_a.$$

Полагая

$$\delta_1=\min\Big\{1-\rho_1;\Big(1-q^{-p_1(r_1+1)}\Big)\sqrt{c(\varepsilon^2+c-1)}+\Big(1-q^{-p_1(r_1+1)}\Big)^2\big(\varepsilon^2+c-1\big)\Big\},$$

из последнего неравенства получаем $\sum_{m=0}^{\infty}\Big(1-z_{m+\infty}^{(k+1)}\Big)\leq\dfrac{m_a}{\delta_1}\quad\forall k=0,1,\ldots$. Отсюда, переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем $\sum_{m=0}^{\infty}(1-z_{m+\infty})\leq\dfrac{m_a}{\delta_1}$, следовательно,

$$U:=(1-z_{0+\infty},1-z_{1+\infty},1-z_{2+\infty},\ldots)\in l_1(\mathbb{Z}^+). \tag{28}$$

Доказательство включения (25) проводится аналогично. Повторяя те же выкладки, приходим к оценке $\sum_{n=0}^{\infty}(1-z_{+\infty\,n})\leq\dfrac{m_b}{\delta_2}$, где $m_b$ задано формулой (23) и

$$\delta_2=\min\left\{1-\rho_2;\Big(1-q^{-p_2(r_2+1)}\Big)\sqrt{c(\varepsilon^2+c-1)}+\Big(1-q^{-p_2(r_2+1)}\Big)^2\big(\varepsilon^2+c-1\big)\right\}.$$

Следовательно,

$$V:=(1-z_{+\infty0},1-z_{+\infty\,1},\ 1-z_{+\infty\,2},\ldots)\in l_1(\mathbb{Z}^+). \tag{29}$$

**4. Двупараметрическое семейство ограниченных решений нелинейной системы ($1'$). Основная теорема.** Справедлива следующая лемма.

**Лемма 7.** *Пусть выполняются условия* (2a) *и* (2b). *Тогда если при любом* $c \in (0,1]$ *матрица* $(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *является решением уравнения* (1), *то при любых* $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$ *матрицы сдвигов* $X_{\tau_1\tau_2} = (x_{mn}^{\tau_1\tau_2})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *с элементами вида*

$$x_{mn}^{\tau_1\tau_2} = x_{m+\tau_1 n+\tau_2} \tag{30}$$

*также являются решениями уравнения* (1).

***Доказательство*** проводится непосредственной подстановкой (30) в левую часть системы ($1'$).

Согласно пп. 2.1 матрица $(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, являющаяся нечетным продолжением посредством формул (4) и (6) на всю целочисленную решетку $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ решения $(z_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ граничной задачи ($5'$), является решением уравнения (1), при этом наследуя свойства монотонности и ограниченности ее элементов, а также соответствующее асимптотическое поведение в бесконечности. Тогда на основании леммы 7 при любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$ для матриц $X_{\tau_1\tau_2} = (x_{mn}^{\tau_1\tau_2})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ с элементами вида (30) согласно включениям (24) и (25) имеем

$$\begin{gathered}
\left(1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{\pm\infty\, 0}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_1}_{\pm\infty\, 1}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{\pm\infty\, 2}, \ldots\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\
\left(1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{0\, \pm\infty}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{1\, \pm\infty}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{2\, \pm\infty}, \ldots\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\
\left(\ldots, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{\mp\infty\, -3},\ 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{\mp\infty\, -2}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{\mp\infty\, -1}\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\
\left(\ldots, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{-3\, \mp\infty},\ 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{-2\, \mp\infty}, 1 \mp x^{\tau_1\tau_2}_{-1\, \mp\infty}\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}).
\end{gathered} \tag{31}$$

Итак, справедлива следующая основная теорема.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (2a) *и* (2b). *Тогда при любом значении параметра* $c \in (0,1]$ *задача для уравнения* (1) *с граничными условиями*

$$\lim_{|m|\to\infty}\lim_{|n|\to\infty} x_{mn} = \lim_{|n|\to\infty}\lim_{|m|\to\infty} x_{mn} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad mn \ge 0, \\ -1, & \textit{если} \quad mn < 0, \end{cases}$$

*имеет двупараметрическое семейство решений* $X_{\tau_1\tau_2} = (x_{mn}^{\tau_1\tau_2})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$, *с монотонно возрастающими и ограниченными элементами вида* (30), *в котором* $(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ — *нечетное продолжение решения граничной задачи* ($5'$) *на всю целочисленную решетку* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *посредством формул* (4) *и* (6). *Более того, если, дополнительно, имеют место условия* (23), *то при любых* $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$ *имеют место включения* (31).

**5. О разрешимости соответствующего неоднородного уравнения с кубический нелинейностью.** ***5.1. О разрешимости граничной задачи для неоднородной системы, соответствующей системе* ($5'$).** Пусть выполняются условия (2a), (2b) и $c \in (0,1]$. Рассмотрим относительно неизвестной матрицы $F = (f_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ неоднородное уравнение

$$cF_{\text{cube}} + (1-c)F = G + AFB, \tag{32}$$

в котором матрица $F_{\text{cube}} = (f^3_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$, а $G = (g_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ имеет следующие свойства:

$$g_{mn} \geq 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \quad \text{причем} \quad g_{mn} = 0, \quad \text{если} \quad mn = 0, \tag{33a}$$

$$g_{mn} \uparrow \quad \text{по } m \text{ и } n \text{ на} \quad \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \tag{33b}$$

$$g_{mn} \quad \text{ограничены на} \quad \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+: \text{ существует } K > 0 \text{ такое, что } g_{mn} \leq K \ \ \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \tag{33c}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_0 - g_{m+\infty}) < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 - g_{+\infty\, n}) < \infty, \tag{33d}$$

где

$$g_{m+\infty} := \lim_{n\to+\infty} g_{mn},\ g_{+\infty\, n} := \lim_{n\to+\infty} g_{mn},\ \lim_{m\to+\infty} g_{m+\infty} = \lim_{n\to+\infty} g_{+\infty n} \equiv c_0 < +\infty. \tag{34}$$

Введем в рассмотрение характеристическое уравнение

$$cx^3 - cx = c_0 \tag{35}$$

относительно $x \in \mathbb{R}^+$. Заметим, что при любом значении параметра $c \in (0,1]$ уравнение (35) имеет единственное решение $c_*$, причем $c_* \geq 1$. Действительно, рассматривая функцию $h(x) \equiv \equiv cx^3 - cx - c_0, x \in \mathbb{R}^+$, нетрудно проверить, что

$h(0) = h(1) = -c_0,\ h(+\infty) = +\infty,$

$h'(x) \leq 0$, если $x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $h'(x) \geq 0$, если $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Отсюда следует существование единственного корня $c_* \geq 1$ уравнения $h(x) = 0$. Следовательно,

$$c \cdot c_*^3 - c \cdot c_* = c_0, \quad c_* \geq 1. \tag{36}$$

Запишем уравнение (32) в раскрытом виде

$$cf_{mn}^3 + (1-c) f_{mn} = g_{mn} + \sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) \sum_{j=0}^{\infty} (b_{n-j} - b_{n+j})\, f_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \tag{32$'$}$$

и построим следующие последовательные приближения:

$$c\Big(f_{mn}^{(k+1)}\Big)^3 + (1-c) f_{mn}^{(k+1)} = g_{mn} + \sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) \sum_{j=0}^{\infty} (b_{n-j} - b_{n+j}) f_{ij}^{(k)}, \tag{37}$$

$$f_{mn}^{(0)} = c_*, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Сначала убедимся, что

$$f_{mn}^{(k)} \downarrow \quad \text{по} \quad k \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+. \tag{38}$$

Применим индукцию. Докажем, что $f_{mn}^{(1)} \leq f_{mn}^{(0)} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Из свойств (33a) – (33c), (34) свободного члена системы следует, что $g_{mn} \leq c_0 \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Тогда с учетом очевидного неравенства $\sum_{i=0}^{\infty} (a_{m-i} - a_{m+i}) \leq 1$ и (36) из (37) имеем

$$c\Big(f_{mn}^{(1)}\Big)^3 + (1-c) f_{mn}^{(1)} \leq c_0 + c_* = c \cdot c_*^3 - c \cdot c_* + c_* = c \cdot c_*^3 + (1-c) \cdot c_*, \tag{39}$$

а в силу монотонности и непрерывности кубической функции $H$ (см. (17)) из (39) получаем $f_{mn}^{(1)} \le c_* = f_{mn}^{(0)},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Тогда в предположении, что $f_{mn}^{(k)} \le f_{mn}^{(k-1)}$ при некотором натуральном $k$, снова с использованием монотонности функции $H$ нетрудно получить, что $f_{mn}^{(k+1)} \le f_{mn}^{(k)},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

Как и при доказательстве утверждений (16)–(20) для системы уравнений (13), нетрудно проверить, что последовательность $\left\{f_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ является

ограниченной: для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(1 - q^{-p_1 m})(1 - q^{-p_2 n})\sqrt{\frac{\varepsilon^2 + c - 1}{c}} \le f_{mn}^{(k)} \le c_* \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \tag{40}$$

неубывающей: при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$\text{при фиксированном} \quad m \in \mathbb{Z}^+ \quad f_{mn}^{(k)} \uparrow \quad \text{по} \quad n \quad \text{на} \quad \mathbb{Z}^+, \tag{41}$$

$$\text{при фиксированном} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad f_{mn}^{(k)} \uparrow \quad \text{по} \quad m \quad \text{на} \quad \mathbb{Z}^+ \tag{42}$$

$\Big($последовательность $\left\{f_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ неубывающая на $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,\ k = 0, 1, 2, \ldots\Big)$.

Из (38) и (40) следует, что при $k \to +\infty$ последовательность $\left\{f_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ имеет предел $\lim_{k\to+\infty} f_{mn}^{(k)} = f_{mn},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, причем предельная матрица $F = (f_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ удовлетворяет уравнению (32), а для ее элементов справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\big(1 - q^{-p_1 m}\big)\big(1 - q^{-p_2 n}\big)\sqrt{\frac{\varepsilon^2 + c - 1}{c}} \le f_{mn} \le c_* \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+. \tag{43}$$

Далее, согласно (40)–(43) заключаем, что существует предел

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_{mn} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} f_{mn} = \zeta, \qquad 0 < \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + c - 1}{c}} \le \zeta < +\infty.$$

Покажем, что $\zeta = c_*$. Действительно, как и пп. 3.2, из (32$'$) получаем $c\zeta^3 + (1-c)\zeta = c_0 + \zeta$ или $c\zeta^3 - c\zeta = c_0$. Поскольку $\zeta > 0$, из (35) и (36) получаем $\zeta = c_*$ или $\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_{mn} = c_*$.

Пусть выполняются условия (23), (27) и (33d). Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, вводя обозначения

$$f_{m+\infty} := \lim_{n\to+\infty} f_{mn}, \qquad f_{+\infty n} := \lim_{n\to+\infty} f_{mn},$$

$$æ_1 \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (c_0 - g_{m+\infty}) + (1 + c_*)\frac{m_a}{2}, \qquad æ_2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 - g_{+\infty n}) + (1 + c_*)\frac{m_b}{2},$$

$$\vartheta_1 \equiv \min\Big\{1 - \rho_1; c_*\Big(1 - q^{-p_1(r_1+1)}\Big)\sqrt{c(\varepsilon^2 + c - 1)} + \Big(1 - q^{-p_1(r_1+1)}\Big)^2\big(\varepsilon^2 + c - 1\big)\Big\},$$

$$\vartheta_2 \equiv \min\Big\{1 - \rho_2; c_*\Big(1 - q^{-p_2(r_2+1)}\Big)\sqrt{c(\varepsilon^2 + c - 1)} + \Big(1 - q^{-p_2(r_2+1)}\Big)^2\big(\varepsilon^2 + c - 1\big)\Big\},$$

для любого $k = 0, 1, \ldots$ получаем следующие равномерные оценки:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(c_* - f_{m+\infty}) \leq \frac{æ_1}{\vartheta_1 + c(c_*^2 - 1)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(c_* - f_{+\infty\, n}) \leq \frac{æ_2}{\vartheta_2 + c(c_*^2 - 1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{U} := (c_* - f_{0+\infty}, c_* - f_{1+\infty}, c_* - f_{2+\infty}, \ldots) \in l_1(\mathbb{Z}^+), \tag{44}$$

$$\mathcal{V} := (c_* - f_{+\infty\, 0}, c_* - f_{+\infty\, 1}, c_* - f_{+\infty 2}, \ldots) \in l_1(\mathbb{Z}^+). \tag{45}$$

***5.2. Нечетное продолжение решения задачи на*** $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$***.*** Построим нечетное продолжение на всю целочисленную решетку $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ решения задачи (32). По аналогии с задачей для уравнения (1) заметим, что если матрица $F = (f_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ — решение уравнения (32), то матрица $W = (w_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ с элементами вида

$$w_{mn} \equiv \begin{cases} f_{|m||n|}, & \text{если} \quad mn \geq 0, \\ -f_{|m||n|}, & \text{если} \quad mn < 0, \end{cases} \tag{46}$$

является решением уравнения

$$cW_{\text{cube}} + (1 - c)W = V + AWB, \tag{47}$$

где $W_{\text{cube}} = (w_{mn}^3)_{m,n \in \mathbb{Z}}$, $V = (v_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ — матрица с элементами

$$v_{mn} = \begin{cases} g_{|m||n|}, & \text{если} \quad mn \geq 0, \\ -g_{|m||n|}, & \text{если} \quad mn < 0. \end{cases} \tag{48}$$

Тогда с учетом (44), (45) из (46) непосредственно следуют включения

$$\begin{gathered} (c_* \mp w_{0\,\pm\infty}, c_* \mp w_{1\pm\infty}, c_* \mp w_{2\pm\infty}, \ldots) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\ (c_* \mp w_{\pm\infty\, 0}, c_* \mp w_{\pm\infty\, 1}, c_* \mp w_{\pm\infty\, 2}, \ldots) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\ (\ldots, c_* \mp w_{\mp\infty -3}, c_* \mp w_{\mp\infty -2}, c_* \mp w_{\mp\infty -1}) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}), \\ (\ldots, c_* \mp w_{-3\mp\infty}, c_* \mp w_{-2\mp\infty}, c_* \mp w_{-1\mp\infty}) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}). \end{gathered} \tag{49}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть элементы матриц $A$ и $B$ удовлетворяют условиям* (2a) *и* (2b), *элементы матрицы $G$ — условиям* (33a) – (33c), *а матрица $V$ задана согласно* (48). *Тогда при любом значении параметра $c \in (0, 1]$ матричное уравнение* (47) *имеет решение $W$ с ограниченными и определенными по формуле* (46) *элементами, являющимися нечетным продолжением решения системы* (32) *на всю целочисленную решетку $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, причем*

$$\lim_{|m|\to\infty} \lim_{|n|\to\infty} w_{mn} = \lim_{|n|\to\infty} \lim_{|m|\to\infty} w_{mn} = \begin{cases} c_*, & \textit{если} \quad mn \geq 0, \\ -c_*, & \textit{если} \quad mn < 0, \end{cases}$$

*где предел $c_* \geq 1$ определен согласно* (36). *Более того, если, дополнительно, выполняются условия* (23) *и* (33d), *то имеют место включения* (49).

**6. Некоторые обобщения полученных результатов.** Рассмотрим более общую по сравнению с $(1')$ нелинейную систему

$$Q(\widehat{x}_{mn}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{m-i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{n-j}\widehat{x}_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \tag{50}$$

относительно матрицы $\widehat{X} = (\widehat{x}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, элементы которой удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{|m|\to\infty}\lim_{|n|\to\infty}\widehat{x}_{mn} = \lim_{|n|\to\infty}\lim_{|m|\to\infty}\widehat{x}_{mn} = \begin{cases} \eta, & \text{если} \quad mn \geq 0, \\ -\eta, & \text{если} \quad mn < 0, \end{cases} \qquad \eta > 0. \tag{51}$$

Пусть выполняются условия (2a), (2b), а $Q$ — нечетная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, для которой существуют такие числа $\delta \in \left(\max\left\{a_0^2, b_0^2,\right\}, 1\right)$ и $\xi \in (0,\eta)$, что

$$0 \leq Q(u) \leq \delta u, \quad u \in [0,\xi] \quad \text{и} \quad Q(u)\uparrow \quad \text{по} \quad u \quad \text{на отрезке} \quad [0,\eta] \quad \text{и} \quad Q(\eta)=\eta, \tag{52}$$

где $\eta$ — первый положительный корень уравнения $Q(u) = u$.

Построим нетривиальные решения уравнения (50). Сначала отметим, что по аналогии с доказательствами лемм 3 – 6 можно показать, что справедливы соответственно следующие леммы.

**Лемма 8.** *В условиях* (2a) *и* (2b) *при любом* $q > 1$ *характеристические уравнения*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q^{-p|i|} = \sqrt{\delta} \quad \text{и} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j q^{-p|j|} = \sqrt{\delta}$$

*относительно* $p$ *имеют единственные положительные решения* $p_1^*$ *и* $p_2^*$ *соответственно.*

**Лемма 9.** *При условиях леммы* 8 *справедливы следующие оценки снизу*:

$$\sum_{i=-\infty}^{m} a_i q^{p_1^* i} + q^{2p_1^* m}\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i q^{-p_1^* i} \geq \sqrt{\delta},$$

$$\sum_{j=-\infty}^{n} b_j q^{p_2^* j} + q^{2p_2^* j}\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j q^{-p_2^* j} \geq \sqrt{\delta} \quad \forall m,\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

**Лемма 10.** *При условиях леммы* 9 *справедливы оценки*

$$1 + a_m - 2\sum_{i=m}^{\infty} a_i - q^{-p_1^* m}\sum_{i=-\infty}^{m} a_i q^{p_1^* i} + q^{p_1 m}\sum_{i=m}^{\infty} a_i q^{-p_1^* i} \geq \sqrt{\delta}\left(1 - q^{-p_1^* m}\right) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+,$$

$$1 + b_n - 2\sum_{j=n}^{\infty} b_j - q^{-p_2^* n}\sum_{j=-\infty}^{n} b_j q^{p_2^* j} + q^{p_2 n}\sum_{j=n}^{\infty} b_j q^{-p_2^* j} \geq \sqrt{\delta}\left(1 - q^{-p_2^* n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

**Лемма 11.** *Пусть выполняются все условия леммы* 10. *Тогда при любых* $m, n \in \mathbb{Z}^+$ *справедливы оценки*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})(1-q^{-p_1^* i})\geq\sqrt{\delta}(1-q^{-p_1^* m}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})(1-q^{-p_2^* j})\geq\sqrt{\delta}(1-q^{-p_2^* n}).$$

Далее, рассмотрим вспомогательную систему

$$Q(\widehat{z}_{mn})=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})\widehat{z}_{ij},\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+, \tag{53}$$

относительно тождественно ненулевой матрицы $\widehat{Z}=(\widehat{z}_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ с элементами $0\leq\widehat{z}_{mn}<\eta$, удовлетворяющими граничным условиям

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\widehat{z}_{mn}=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\widehat{z}_{mn}=\eta. \tag{54}$$

Введем для (53) последовательные приближения

$$Q\left(\widehat{z}_{mn}^{(k+1)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})\widehat{z}_{ij}^{(k)},$$
$$\widehat{z}_{mn}^{(0)}\equiv\eta,\qquad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{55}$$

Поскольку $Q$ — нечетная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция со свойствами (52), аналогично доказательству теоремы 1, с использованием леммы 11 можно проверить справедливость следующих свойств последовательности $\left\{\widehat{z}_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\widehat{z}_{mn}^{(k)}\downarrow\quad\text{по}\quad k,\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+, \tag{56}$$

$$\widehat{z}_{mn}^{(k)}\uparrow\quad\text{по}\quad m\quad(\text{и}\quad n)\quad\text{на}\quad\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{57}$$

$$\xi\left(1-q^{-p_1^* m}\right)\left(1-q^{-p_2^* n}\right)\leq\widehat{z}_{mn}^{(k)}\leq\eta,\qquad k=0,1,2,\ldots,\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+. \tag{58}$$

Из (56) – (58) следует, что при $k\to+\infty$ последовательность $\left\{\widehat{z}_{mn}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{k\to+\infty}\widehat{z}_{mn}^{(k)}=\widehat{z}_{mn},\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,$$

причем предельная матрица $\widehat{Z}=(\widehat{z}_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ удовлетворяет уравнению (53) и $\widehat{z}_{mn}=0$ при $mn=0$ $\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, $\widehat{z}_{mn}\uparrow$ по $m$ (и $n$) на $\mathbb{Z}^+$ и $0<\xi\big(1-q^{-p_1^* m}\big)\big(1-q^{-p_2^* n}\big)\leq\widehat{z}_{mn}\leq\eta$, $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\widehat{z}_{mn}=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\widehat{z}_{mn}=\nu, \tag{59}$$

$$0 < \xi \le \nu \le \eta. \tag{60}$$

Наконец, установим, что $\nu = \eta$, т. е. имеет место граничное условие (54). Действительно, с одной стороны, используя непрерывность функции $Q$ и (59), имеем

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} Q(\widehat{z}_{mn}) = Q\left(\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\widehat{z}_{mn}\right) = Q(\nu),$$

а, с другой, повторяя рассуждения, проведенные в пп. 3.2, находим

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(a_{m-i}-a_{m+i})\sum_{j=0}^{\infty}(b_{n-j}-b_{n+j})\widehat{z}_{ij}\right) = \nu.$$

Отсюда на основании (50) имеем $Q(\nu) = \nu$. Тогда, имея в виду (60) и предположение, что $\eta$ — первый положительный корень уравнения $Q(u) = u$, получаем $\nu = \eta$.

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия* (2a) *и* (2b), *а* $Q$ *— нечетная и непрерывная на* $\mathbb{R}$ *функция, удовлетворяющая условиям* (52). *Тогда граничная задача* (50) *и* (51) *имеет двупараметрическое семейство решений* $\tilde{X}_{\tau_1\tau_2} = (\tilde{x}_{mn}^{\tau_1\tau_2})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *с элементами вида* $\widehat{x}_{mn}^{\tau_1\tau_2} = \widehat{x}_{m+\tau_1\, n+\tau_2}$, $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{Z}$, *где* $(\widehat{x}_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *— нечетное продолжение решения граничной задачи* (53), (54) *на всю целочисленную решетку* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$\widehat{x}_{mn} \equiv \begin{cases} \widehat{z}_{|m||n|}, & \textit{если} \quad mn \ge 0, \\ -\widehat{z}_{|m||n|}, & \textit{если} \quad mn < 0, \end{cases} \qquad (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

*Более того, если, дополнительно, имеют место условия* (23), *а функция* $Q$ *удовлетворяет условию* $0 < Q(u) \le \dfrac{cu^3}{\eta^2} + (1-c)u,\ c\in(0,1],\ u\in[0,\eta]$ (*более сильному, чем первое условие* (52)), *то при любых* $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{Z}$ *имеют место включения*

$$\left(\eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{\pm\infty\,0}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_1}_{\pm\infty\,2},\ \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{\pm\infty\,2},\ldots\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}),$$

$$\left(\eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{0\,\pm\infty}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{1\,\pm\infty}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{2\,\pm\infty},\ldots\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}),$$

$$\left(\ldots,\eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{(\mp\infty)-3}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{\mp\infty\,-2}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{\mp\infty\,-1}\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}),$$

$$\left(\ldots,\eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{-3\,\mp\infty}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{-2\,\mp\infty}, \eta \mp \widehat{x}^{\tau_1\tau_2}_{-1\,\mp\infty}\right) \in l_1(\mathbb{Z}^{\pm}).$$

***Доказательство*** проводится аналогично доказательству второй части теоремы 1 и леммы 7.

***Замечание.*** Теорема 3 обобщает теорему 1 $\left(\delta = \varepsilon^2,\ \xi = \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2+c-1}{c}},\ \eta = 1\right)$.

## Литература

1. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теор. и мат. физика. – 2006. – **146**, № 3. – С. 402 – 409.
2. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории $p$-адической струны // Теор. и мат. физика. – 2004. – **138**, № 3. – С. 355 – 368.
3. *Frampton P. H., Okada Yasuhiro.* Effective scalar field theory of p-adic string // Phys. Rev. D. – 1989. – **37**, № 10. – P. 3077 – 3079.
4. *Brekke Lee, Freund P. G. O.* $p$-Adic numbers in physics // Phys. Rep. – 1993. – **233**, № 1. – P. 1 – 66.
5. *Volovich I. V.* $p$-Adic string // Classical Quantum Gravity. – 1987. – **4**, № 4. – P. L83 – L87.
6. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории $p$-адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. – 2018. – **82**, № 2. – С. 172 – 193.
7. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной граничной задачи в $p$-адической теории струн //Тр. Моск. мат. о-ва. – 2018. – **79**, № 1. – С. 117 – 132.
8. *Арабаджян Л. Г.* Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае // Мат. заметки. – 2011. – **89**, № 1. – С. 3 – 11.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1966. – Т. 2. – 800 с.
10. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 7. – С. 45 – 62.

Получено 05.07.18