УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОСТ-ДАРВІНІВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ МАКСВЕЛЛА – ЛОРЕНЦА ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ. ВІДСУТНІСТЬ НЕЙТРАЛЬНОСТІ

The existence of holomorphic (in time) solutions of the nonrelativistic equations of motion of nonneutral systems of point charges that do not contain inverse powers of the velocity of light greater than three is proved by using the Cauchy theorem. The indicated equations contain time derivatives of the accelerations of charges.

На основі теореми Коші доведено існування голоморфних за часом розв'язків нерелятивістських рівнянь руху системи точкових зарядів без умови нейтральності, які не містять обернених степенів швидкості світла більше трьох. Зазначені рівняння містять часові похідні прискорень зарядів.

1. Вступ і основний результат. Будемо розглядати наближене рівняння руху n точкових зарядів $e_1, \ldots, e_n$ третього порядку нерелятивістської електродинаміки Максвелла – Лоренца. Це рівняння дозволяє випромінення зарядів, містить обернені степені швидкості світла менше чотирьох і має вигляд (див. [1], розділ 75)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j} - \frac{\partial L(t)}{\partial x_j} = \frac{2}{3c^3}e_j \sum_{l=1}^{n} \frac{d^3 x_l}{dt^3} e_l, \quad j \in (n) = (1, \ldots, n),$$

де $L(t)$ — лагранжіан Дарвіна n нерелятивістських точкових зарядів, що характеризуються координатами $x_j = \left(x_j^1, x_j^2, x_j^3\right) \in \mathbb{R}^3$ та швидкостями $\dfrac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j = v_j = \left(v_j^1, v_j^2, v_j^3\right) \in \mathbb{R}^3$, залежними від часу t,

$$L = L^1 - U(x_{(n)}),$$

$$U(x_{(n)}) = \frac{1}{2}\sum_{j \neq k=1}^{n} e_k e_j |x_k - x_j|^{-1},$$

$$L^1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}|v_j|^2 + \sum_{j \neq k=1}^{n} e_k e_j (2c)^{-2}[(v_j, v_k)|x_k - x_j|^{-1} +$$

$$+ |x_k - x_j|^{-3}(v_j, x_k - x_j)(v_k, x_k - x_j)],$$

$$(x_k, x_k) = |x_k|^2 = (x_k^1)^2 + (x_k^2)^2 + (x_k^3)^2,$$

m_j — маси точкових зарядів e_j. Енергія $H = L^1 + U(x_{(n)})$ є сталою для рівняння Дарвіна, породженого L (див. [2], розділ 41).

Легко бачити, що

$$L^1 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta}^{3} K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) v_j^{\alpha} v_k^{\beta},$$

де

$$K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = m_j \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta} + K'_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}),$$

$$K'_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = (1-\delta_{j,k})(2c^2)^{-1}e_j e_k[\delta_{\alpha,\beta}|x_k - x_j|^{-1} +$$
$$+|x_k - x_j|^{-3}(x_k^\alpha - x_j^\alpha)(x_k^\beta - x_j^\beta)], \qquad x_j^\alpha, v_j^\alpha \in \mathbb{R},$$

$\delta_{a,b}$ — символ Кронекера.

Рівняння нерелятивістської динаміки Дарвіна, як і у випадку релятивістської динаміки, виводяться формально з лагранжіана для електромагнітних потенціалів та швидкостей точкових зарядів фундаментальної моделі Максвелла – Лоренца за допомогою розкладу електромагнітних потенціалів за степенями оберненої швидкості світла, яка є малим параметром. Цей лагранжіан так само розкладається за степенями оберненої швидкості світла. Його нульове наближення збігається з кулонівським лагранжіаном. Доданок із c^{-1} збігається з часовою похідною повного заряду системи і є нулем, а доданок із c^{-2} збігається з лагранжіаном Дарвіна.

Математично строге виведення наближення Дарвіна, що вимагає перенормування мас зарядів, запропоновано в [3, 4].

Нехтуючи доданками, що залежать від вищих степенів c^{-1} у співвідношенні між імпульсами і швидкостями частинок, тобто використовуючи їхнє звичайне співвідношення, отримуємо наближений (апроксимований) гамільтоніан Дарвіна, наведений в [1].

У статтях [6, 7] доведено існування голоморфних за часом розв'язків рівняння Кулона, рівняння, породженого апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна, і рівняння Дарвіна. В цій статті ми отримаємо подібний результат для вищевказаного наближеного рівняння руху зарядів третього порядку, записаного у вигляді

$$-\frac{\partial L}{\partial x_j^\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})\frac{d^2 x_k^\beta}{dt^2} - G_{j,\alpha}(x_{(n)};\dot{x}_{(n)}) =$$
$$= \frac{2}{3c^3}e_j\sum_{l=1}^{n}\frac{d^3 x_l^\alpha}{dt^3}e_l, \quad j \in (n), \tag{1.1}$$

$$G_{j,\alpha}\big(x_{(n)};v_{(n)}\big) = \frac{\partial L}{\partial x_j^\alpha} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j^\alpha}\right)_-, \qquad x_{(n)} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

де права частина останньої рівності у другому доданку не містить прискорення зарядів.

Щоб отримати голоморфні за часом у диску розв'язки рівняння (1.1) чи рівняння Дарвіна, згідно з теоремою існування Коші, необхідно знайти гіпердиск за всіма змінними, в якому матриця K і функція G є голоморфними, та зобразити його у вигляді звичайного диференціального рівняння з голоморфною у знайденому гіпердиску правою частиною. Таке зображення можливе для рівняння Дарвіна, якщо K має обернену матрицю в такому гіпердиску. Зазначений підхід для розглядуваного рівняння є більш складним, ніж для рівняння Дарвіна, оскільки матриця Z із матричними елементами $Z_{j,k} = e_k$, яка визначає його праву частину, не має оберненої. Вона має $n-1$ нульових власних значень та власне значення $e_* = \sum_{l=1}^{n} e_j$, бо $Z^2 = e_* Z$. Це свідчить про те, що вона є нільпотентною для нейтральної системи, тобто при $e_* = 0$. Ми будемо розглядати системи без умови нейтральності і покажемо, що

$$Z = SZ'S^{-1},$$

де $Z'_{k,l} = e_*\delta_{1,l}\delta_{1,k}$, $S^{-1}_{1,j} = e_j$.

Вводячи нові змінні $x_* = S^{-1}x$, отримуємо рівняння

$$\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}\tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)})\dot{v}_{*k}^{\beta} - \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)};v_{*(n)}) = \frac{2}{3c^3}\left(Z'\frac{d^3x_*}{dt^3}\right)_j^{\alpha}, \tag{1.2}$$

де

$$\tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)}) = (S^{-1}\hat{e}_*^{-1}KS)_{j,\alpha;k,\beta}(Sx_{*(n)}),$$

$$\tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)};v_{*(n)}) = (S^{-1}\hat{e}_*^{-1}G)_{j,\alpha}(Sx_{*(n)};Sv_{*(n)}),$$

$$Sx_{*(n)} = (Sx_*)_{(n)}, \qquad (\hat{e}_*y)_j = e_je_*y_j, \qquad (S^{-1}K)_{j,\alpha;k,\beta} = \sum_{l=1}^{n}S_{j,l}^{-1}K_{l,\alpha;k,\beta}.$$

Це означає, що

$$S_{j,\alpha;k,\beta} = S_{j,k}\delta_{\alpha,\beta}, \qquad S_{j,\alpha;k,\beta}^{-1} = S_{j,k}^{-1}\delta_{\alpha,\beta}.$$

Ми записуємо рівняння (1.2) у формі звичайного диференціального рівняння, беручи до уваги, що

$$\left(Z'\frac{d^3x_*}{dt^3}\right)_k = \frac{d^3x_{*1}}{dt^3}\delta_{1,k},$$

і знаходимо гіпердиск, в якому права частина — голоморфна функція, що дасть змогу застосувати теорему існування Коші.

Отриманий результат сформульовано у вигляді теореми 1.1, в якій введено гіпердиск

$$D_l(r;\xi) = \left\{x_j : |x_j - \xi_j|_0 < r,\ x_j,\xi_j \in \mathbb{C},\ j = 1,\ldots,l\right\}.$$

Тоді голоморфні функції визначаються рівномірно й абсолютно збіжними степеневими розкладами за степенями $x_j - \xi_j$ при $|x_j - \xi_j|_0 < r$.

Якщо $x_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1,\ldots,n$, то цей гіпердиск може відповідати будь-якому перенумеруванню цих змінних у порядку зростання їхніх номерів від 1 до nd.

Будемо використовувати такі позначення:

$$|x|_0 = \max_{s,j}|x_j^s|, \quad x_j^s \in \mathbb{R}, \qquad |Sx|_0 \leq \|S\||x|_0.$$

Теорема 1.1. *Нехай $m_j = m + \mu_j, 0 \leq \mu_j \leq \mu$ і $a_j, b_j, b_- \in \mathbb{R}^3, j \in (n)$, — такі вектори, що $|a_j - a_l| \geq r_1,\ |b_j|_0 \leq r_2,\ |b_-|_0 \leq r_3$. Нехай також*

$$R = (mg_1 - \mu g_2 - c_1g_3)^{3n-3} -$$

$$-\sum_{s=0}^{3n-5}(3n-3-s)!(3n-3)^s(mg_1 + \mu g_2 + c_1g_3)^s(\mu g_2 + c_1g_3)^{3n-3-s},$$

де $mg_1 - \mu g_2 - c_1g_3 > 0,\ c_1 = (2c^2r_1)^{-1}$, і додатні $g_l, l = 1,2,3$, залежать лише від зарядів. Якщо $R > 0$, то існує розв'язок рівняння (1.2) з початковими даними $x_{*j}(t_0) = (S^{-1}a)_j$, $v_{*j}(t_0) = (S^{-1}b)_j,\ \dot{v}_{*1}(t_0) = b_-,\ t_0 \geq 0$, такий, що для $j \in (n)$

$$(x_{*j}(t); v_{*j}(t); \dot{v}_{*1}(t)) \in D_{3n}(r, S^{-1}a) \times D_{3n}(r; S^{-1}b) \times D_3(r; b_-) =$$
$$= D_{S(6n+3)}(r; a, b, b_-). \tag{1.3}$$

Тут $\kappa < \dfrac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$, $r = \|S\|^{-1}\kappa r_1$ *і* $x_{*j}(t)$ *— голоморфна функція по* t *у диску* $|t - t_0| < T$ *для певного* T.

Більше того, $x(t) = Sx_*(t)$ *є таким розв'язком рівняння* (1.1), *що*

$$(x_j(t); v_j(t)) \in D_{3n}(\kappa r_1; a) \times D_{3n}(\kappa r_1; b) = D_{6n}(\kappa r_1; a, b), \quad j \in (n). \tag{1.4}$$

***Зауваження* 1.1.** (1.4) випливає з (1.3) та нерівностей

$$|(Sx)_k - a_k|_0 = |(S(x - S^{-1}a))_k|_0 \le \|S\||x - S^{-1}a|_0 < \kappa r_1,$$
$$|(Sv)_k - b_k|_0 = |(S(v - S^{-1}b))_k|_0 \le \|S\||v - S^{-1}b|_0 < \kappa r_1.$$

Крім того, (1.3) приводить також до нерівності

$$\left| \sum_{j=1}^{n} e_j \dot{v}_j - b_- \right| < \kappa r_1.$$

З (1.4) випливає, що для розв'язків рівняння (1.1) виконується нерівність

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \ge |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 > (1 - 2\kappa)r_1.$$

Це означає, що зіткнень зарядів немає для $0 \le t - t_0 < T$ і $\kappa < \dfrac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$.

Теорема 1.1 випливає з теореми Коші [5, 8] про існування голоморфних розв'язків l-вимірних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфним векторним полем у результаті редукції рівнянь (1.2) до них. Найпростіша версія теореми Коші формулюється таким чином.

Теорема 1.2. *Нехай система* l*-вимірних звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_{(l)}), \quad j = 1, \ldots, l, \qquad x_{(l)} \in \mathbb{R}^l, \quad t \ge t_0, \tag{1.5}$$

визначається функціями f_j, *які є голоморфними функціями змінних* x_j *в* $D_l(r;\xi)$ *і рівномірно обмежені:* $|f_j| \le C$. *Тоді розв'язок* $x_j(t)$ *системи* (1.5) *з початковими даними* $\xi_j = x_j(t_0)$ *є голоморфною функцією* t *у диску* $|t - t_0| < T = r((n+1)C)^{-1}$ *і належить* $D_l(r;\xi)$.

Ми будемо використовувати такі позначення:

$$(M_{j,k})_{\alpha,\beta} = M_{j,\alpha;k,\beta} = m_j \delta_{j,k} \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \bar{e} = \max_j |e_j|,$$

$$\tilde{K} = \tilde{M} + \tilde{K}', \qquad \tilde{M}_{j,k} = \sum_{s,l=1}^{n} S^{-1}_{j,l} M_{l,s} S_{s,k} = m\delta_{j,k} + \sum_{l=1}^{n} S^{-1}_{j,l} \mu_l S_{l,k},$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x y_j^*, \qquad |x|^2 = (x, x), \qquad (x, y)_* = (x, y^*), \qquad |x|_*^2 = (x, x^*),$$

де зірочка у верхньому індексі позначає комплексне спряження. Якщо змінні мають верхні індекси, то скалярний добуток буде містити додаткову суму за ними.

Дана стаття має таку структуру. У другому пункті рівняння (1.2) записано у формі (1.5) і знайдено $Q = S^{-1}$. У третьому пункті доведено теорему 1.1 за допомогою важливих оцінок із леми 3.1.

2. Звичайна форма рівнянь руху (1.2). Щоб довести теорему 1.1, необхідно спершу перетворити рівняння (1.2) у форму звичайного диференціального рівняння (1.5), не вказуючи на аналітичний характер його правої частини. Для цього покладемо

$$\dot{x}_{*j} = v_{*j}, \qquad \dot{v}_{*1} = u_{*1}.$$

Тоді рівняння (1.2) можна записати у вигляді

$$\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} \tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)})\dot{v}_{*k}^{\beta} - \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)}) = 0, \quad j > 1,$$

$$\frac{3c^3}{2}\left[\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} \tilde{K}_{1,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)})\dot{v}_{*k}^{\beta} - \tilde{G}_{1,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)})\right] = \dot{u}_{*1}^{\alpha},$$

тобто

$$\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=2}^{n} \tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)})\dot{v}_{*k}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{3} \tilde{K}_{j,\alpha;1,\beta}(x_{*(n)})u_{*1}^{\beta} - \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)}) = 0, \quad j > 1,$$

$$\frac{3c^3}{2}\left[\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=2}^{n} \tilde{K}_{1,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)})\dot{v}_{*k}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{3} \tilde{K}_{1,\alpha;1,\beta}(x_{*(n)})u_{*1}^{\beta} - \tilde{G}_{1,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)})\right] = \dot{u}_{*1}^{\alpha}.$$

Тепер ми повинні перенумерувати змінні за допомогою відображення

$$(n) \times (3) \to (3n)\colon (j, \alpha) \to 3(j-1) + \alpha,$$

$$x_{*j} \to x'_j = x_{*[\frac{j}{3}]}^{[j]_3}, \qquad v_{*j} \to v'_j = v_{*[\frac{j}{3}]}^{[j]_3}, \qquad u'_\beta = u_{*1}^{\beta},$$

де

$$[(s-1)l + k]_l = k, \qquad \left[\frac{(s-1)l + k}{l}\right] = s, \quad k \le l, \quad s, k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

В результаті перенумерування розглядуване рівняння руху набирає вигляду

$$\sum_{k=4}^{3n} \tilde{K}_{j,k}(x'_{(3n)})\dot{v'}_k + \sum_{k=1}^{3} \tilde{K}_{j,k}(x'_{(3n)})u'_k - \tilde{G}_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}) = 0, \quad j > 3,$$

$$\frac{3c^3}{2}\left[\sum_{k=4}^{3n} \tilde{K}_{j,k}(x'_{(3n)})\dot{v'}_k + \sum_{k=1}^{3} \tilde{K}_{j,k}(x'_{(3n)})u'_k - \tilde{G}_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)})\right] = \dot{u'}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Щоб знайти звичайну форму цих рівнянь, необхідно визначити матрицю $\tilde{K}_1$ з матричними елементами $\tilde{K}_{j,k},\ j,k = 4,\ldots,3n$, і припустити, що існує обернена до неї матриця $\tilde{K}_1^{-1}$ з елементами $\tilde{K}_{1j.k}^{(-1)}$.

Отже, якщо матриця $\tilde{K}_1$ має обернену (ми обґрунтуємо це далі), то розглядувані рівняння мають звичайний вигляд

$$\dot{x'}_j = v'_j, \qquad \dot{v'}_j = V_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big), \quad 3 < j \le 3n, \tag{2.1}$$

$$\dot{x'}_j = v'_j, \qquad \dot{v'}_j = u'_j, \qquad \dot{u'}_j = V_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big), \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

де

$$V_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big) = \sum_{k=4}^{3n} \tilde{K}^{(-1)}_{1j,k}\big(x'_{(3n)}\big) G'_k\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big), \quad 3 < j \leq 3n,$$

$$G'_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big) = -\sum_{k=1}^{3} \tilde{K}_{j,k}\big(x'_{(3n)}\big) u'_k + \tilde{G}_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}\big),$$

$$V_j\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big) =$$

$$= \frac{3c^3}{2}\left[-G'_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}) + \sum_{k=4}^{3n} \tilde{K}_{j,k}(x'_{(3n)}) V_k\big(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)}\big)\right], \quad j = 1, 2, 3.$$

Таким чином, рівняння (2.1), (2.2) збігаються з (1.5) при $l = 6n + 3$.

Тепер необхідно знайти матрицю Q з $e_* = \sum_{l=1}^{n} e_j \neq 0$, виходячи з рівняння

$$QZ = Z'Q, \tag{2.3}$$

яке приводить до

$$Z = Q^{-1} Z' Q,$$

якщо $\operatorname{Det} Q \neq 0$. Тут

$$Z_{k,l} = e_l, \qquad Z'_{k,l} = e_* \delta_{1,l} \delta_{1,k}.$$

З рівнянь

$$(QZ)_{s,k} = e_k \sum_{l=1}^{n} Q_{s,l}, \qquad (Z'Q)_{s,k} = e_* Q_{s,k} \delta_{1,s},$$

і (2.3) випливає, що

$$e_k \sum_{l=1}^{n} Q_{1,l} = e_* Q_{1,k}, \qquad \sum_{l=1}^{n} Q_{s,l} = 0, \quad s > 1. \tag{2.4}$$

Із рівнянь (2.4) відповідно отримуємо

$$Q_{1,k} = e_k,$$

$$Q_{s,1} = 1, \qquad Q_{s,k} = -\delta_{s,k}, \quad s, k > 1.$$

Матриця Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В результаті

$$\operatorname{Det} Q = (-1)^{n-1} e_*. \tag{2.5}$$

Щоб довести цю рівність, потрібно розкласти її детермінант за елементами його першого рядка:

$$\operatorname{Det} Q = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} e_l \operatorname{Det} Q'_l,$$

де Q'_l — така $((n-1)\times(n-1))$-матриця, що у її l-му рядку ($l > 1$) та першому стовпчику стоїть лише один ненульовий елемент — одиниця. Розкладаючи $\operatorname{Det} Q'_l$ за елементами цього рядка, отримуємо

$$\operatorname{Det} Q'_l = (-1)^l \operatorname{Det}(-I_{n-2}) = (-1)^l (-1)^{n-2},$$

де I_{n-2} — одинична $((n-2)\times(n-2))$-матриця. Це і доводить (2.5).

Неважко перевірити, що обернену до Q матрицю визначено так:

$$(Q^{-1})_{j,1} = e_*^{-1}, \qquad (Q^{-1})_{j,k} = e_*^{-1} e_k, \quad k > 1, \quad j \neq k,$$
$$(Q^{-1})_{k,k} = e_*^{-1}(e_k - e_*), \qquad k > 1,$$

тобто

$$Q^{-1} = e_*^{-1} \begin{pmatrix} 1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ 1 & e_2 - e_* & e_3 & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ 1 & e_2 & e_3 - e_* & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_{n-1} & e_n - e_* \end{pmatrix}.$$

3. Основні оцінки. У статті [7] доведено, що компоненти матриці K і вектора G в (1.1) — це голоморфні функції відповідно в $D_{3n}(r;a)$ і $D_{3n}(r;a) \times D_{3n}(r;b) = D_{6n}(r;a,b)$.

Тепер можна довести, що компоненти матриці $\tilde{K}$ і вектора $\tilde{G}$ в (1.2) — це голоморфні функції відповідно в

$$D_{3n}(\|S\|^{-1} r; S^{-1}a) = D_{S(3n)}(r;a)$$

і

$$D_{3n}(\|S\|^{-1} r; S^{-1}a) \times D_{3n}(\|S\|^{-1} r; S^{-1}b) = D_{S(6n)}(r;a,b).$$

При цьому ми будемо спиратись на такі твердження і лему.

Твердження 3.1. *Нехай $f(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j \in \mathbb{C}$, — голоморфна в деякому гіпердиску обмежена функція, модуль якої більший за нуль. Тоді функції f^{-1}, $\sqrt{f}$, $f^{-1/2}$ голоморфні в цьому гіпердиску.*

Доведення випливає з леми Осгуда чи другої теореми Гартокса [9], оскільки зазначено три функції, голоморфні за кожною зі змінних z_j.

Лема 3.1. *Нехай $x_j \in D_{S(3n)}(r;a)$ і $r = \kappa r_1$, a_k — ті ж, що і в теоремі* 1.1. *Якщо $\kappa < \dfrac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$, то*

$$\frac{\left|(Sx)_j - (Sx)_k\right|_0^s}{\left|\left|(Sx)_j - (Sx)_k\right|_*^l\right|} < \kappa_0^s \kappa_2^{l/2} |a_k - a_j|^{s-l} \leq \kappa_0^s \kappa_2^{l/2} r_1^{s-l}, \qquad 0 < s < l, \tag{3.1}$$

де $\kappa_0 = 2\kappa + 1, \kappa_2^{-1} = 1 - 12\kappa^2 - 2\sqrt{12}\kappa > 0$ *і* $\big|(Sx)_j - (Sx)_k\big|_*^l$ — *голоморфна функція в гіпердиску* $D_{S(3n)}(r;a)$, *якщо* $l \in \mathbb{Z}^+$.

Доведення. Виконуються такі нерівності:

$$\big|(Sx)_k - (Sx)_j\big|_0 \le |(Sx)_k - a_k|_0 + |(Sx)_j - a_j|_0 + |a_k - a_j| =$$
$$= \big|(S(x - S^{-1}a))_k\big|_0 + \big|(S(x - S^{-1}a))_j\big|_0 + |a_k - a_j| <$$
$$< 2\kappa r_1 + |a_k - a_j| \le \kappa_0 |a_k - a_j|, \qquad \kappa_0 = 2\kappa + 1, \tag{3.2}$$

і

$$\big|(Sx)_k - (Sx)_j\big| \le \sqrt{3}\big|(Sx)_k - (Sx)_j\big|_0 < \kappa_1 |a_k - a_j|, \quad \kappa_1 = \sqrt{3}(2\kappa + 1). \tag{3.3}$$

Тут ми використали нерівність

$$|(Sy)_k|_0 \le \|S\| |y|_0, \quad y \in \mathbb{C}^n.$$

Покладемо $(Sx)_k - a_k + a_j - (Sx)_j = Sx_{k,j}$. Тоді

$$\frac{1}{2}|Sx_{k,j}|^2 \le |(Sx)_k - a_k|^2 + |(Sx)_j - a_j|^2 \le$$
$$\le 3|(Sx)_k - a_k|_0^2 + 3|(Sx)_j - a_j|_0^2 < 6\kappa^2 r_1^2 \le 6\kappa^2 |a_k - a_j|^2. \tag{3.4}$$

З $|x|^2 = |x^2|, x \in \mathbb{C}$, виводимо

$$\big||(Sx)_k - (Sx)_j|_*^2\big| \le |a_k - a_j|^2 + 2|a_k - a_j|\,|Sx_{k,j}| + |Sx_{k,j}|^2 <$$
$$< \big(1 + 12\kappa^2 + 2\sqrt{12}\kappa\big)|a_k - a_j|^2 < 2|a_k - a_j|^2.$$

З (3.4) випливає, що

$$\big||(Sx)_k - (Sx)_j|_*^2\big| \ge |a_k - a_j|^2 - 2|a_k - a_j|\,|Sx_{k,j}| - |Sx_{k,j}|^2 \ge \kappa_2^{-1}|a_k - a_j|^2.$$

Функція в лівій частині в степені s голоморфна у зазначеному гіпердиску завдяки твердженню 3.1. З цих нерівностей та з

$$\|x_j - x_k|_*^l| = \big|(|x_j - x_k|_*^2)^{l/2}\big| = \big||x_j - x_k|_*^2\big|^{l/2}$$

отримуємо (3.1). Останнє твердження леми випливає з твердження 3.1.

Лему 3.1 доведено.

Переходимо до оцінювання матриці $\tilde{K}$ та вектора $\tilde{G}$.

Нехай

$$|K|_{SD} = \max_{j,k \in (n), \alpha,\beta \in (3)} \sup_{x_{(n)} \in D_{S(3n)}(r;a)} \big|\tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})\big|$$

і

$$|\tilde{K}|_{SD} \le g_1 m + g_2 \mu + |S|_* |\hat{e}_*^{-1} K'|_{SD},$$

де

$$g_1 = (e_*^-)^{-1}, \qquad g_2 = g_1 |S|_*, \qquad |S|_* = \max_{j,k \in (n)} \sum_{l=1}^n |S_{j,l}^{-1}\|S_{l,k}|, \qquad e_*^- = \min_j |e_j|\,|e_*|.$$

Враховуючи те, що чисельник у другому доданку у виразі для K' менший за $|(Sx)_j - (Sx)_k|_0^2$, і застосовуючи (3.1) при $s = 0,\ l = 1$ та $s = 2,\ l = 3$ відповідно для першого і другого доданків у виразі для K', отримуємо нерівність

$$|\hat{e}_*^{-1} K'|_{SD} < (2c^2 r_1)^{-1} \kappa_* \bar{e}_* = c_1 \kappa_* \bar{e}_*,$$

де

$$\kappa_* = \sqrt{\kappa_2}(1 + (1 + 2\kappa)^2 \kappa_2), \qquad \bar{e}_* = \bar{e}|e_*|^{-1}.$$

***Наслідок* 3.1.** $|\tilde{K}|_{SD} < mg_1 + \mu g_2 + c_1 g_3, \qquad g_3 = \bar{e}_* |S|_* . \kappa_*.$

Нерівності з леми 3.1 приводять до такої леми.

Лема 3.2. *Нехай*

$$|\tilde{G}|_{SD} = \max_{j \in (n), \alpha \in (3)} \sup_{(x,v)_{(n)} \in D_{S(6n)}(r;a,b)} \left| \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)}) \right| =$$

$$= \max_{j \in (3n)} \sup_{(x',v')_{(3n)} \in D_{S(6n)}(r;a,b)} \left| \tilde{G}_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}) \right|,$$

де змінні зі штрихами відповідають перенумерованим початковим змінним. Тоді

$$|\tilde{G}|_{SD} < (n-1)\|S^{-1}\| \bar{e}_* r_1^{-2} \left[\eta_0 + c^{-2} \eta_1 (\kappa r_1 + r_2)^2 \right] = c_2,$$

де

$$\eta_0 = \kappa_0 \kappa_2^{3/2}, \qquad \eta_1 = \kappa_0 \kappa_2^{3/2} \left(9 + 5\sqrt{3} \kappa_1 \kappa_0^{-1} + 15 \kappa_1^2 \kappa_2 \right).$$

Доведення. З означення випливає, що

$$\left| \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)}) \right| \le \|S^{-1}\| \, |\hat{e}_*^{-1} G|_{SD}.$$

Для доведення леми потрібно оцінити $G_{j,\alpha}(Sx_{(n)}; Sv_{(n)})$ для $x, v \in D_{S(6n)}(r; a, b)$. Виконаємо це для першого доданка у виразі для $G_{j,\alpha}$ з комплексними змінними. Для комплексних змінних ми повинні замінити $|.|, (.,.)$ на $|.|_*, (.,.)_*$. Тоді

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = e_j \sum_{k=1, k \ne j}^{n} e_k \left\{ \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|_*^3} [1 - (2c^2)^{-1} (v_j, v_k)_*] - \right.$$

$$-3(2c^2)^{-1} |x_k - x_j|_*^{-5} (x_j - x_k)(v_j, x_k - x_j)_* (v_k, x_k - x_j)_* -$$

$$\left. -(2c^2)^{-1} |x_k - x_j|_*^{-3} [v_j (v_k, x_k - x_j)_* + v_k (v_j, x_k - x_j)_*] \right\}.$$

Для оцінювання другого і третього доданків у правій частині потрібно застосувати нерівність для b з теореми 1.1. Тоді

$$\left|(Sv)_k\right|_0 = \left|(Sv)_k - b_k + b_k\right|_0 \le |(Sv)_k - b_k|_0 + r_2 = \left|(S(v - S^{-1}b)_k\right|_0 + r_2 \le$$

$$\le \|S\| |v - S^{-1} b|_0 + r_2 < r + r_2, \tag{3.5}$$

$$\left|((Sv)_j, (Sv)_k)_*\right| \le |(Sv)_j| |(Sv)_k| < 3(r + r_2)^2. \tag{3.6}$$

З нерівностей (3.5), (3.6) та (3.3) отримуємо

$$\left|((Sv)_k, (Sx)_j - (Sx)_k)_*\right| \le |(Sv)_k\|(Sx)_j - (Sx)_k| < \sqrt{3}\kappa_1(r + r_2)|a_j - a_k|. \qquad (3.7)$$

З (3.1) та останніх нерівностей випливає, що

$$\left|e_j^{-1}\frac{\partial L}{\partial x_j}\right|_0 < (n-1)\bar{e}_*\kappa_0\kappa_2^{3/2}r_1^{-2}\left[1 + (2c^2)^{-1}(3 + 9\kappa_1^2\kappa_2 + 2\sqrt{3}\kappa_1\kappa_0^{-1})(\kappa r_1 + r_2)^2\right]. \qquad (3.8)$$

Крім того,

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = m_j v_j + (2c^2)^{-1}e_j\sum_{k=1,k\neq j}^{n} e_k\{v_k|x_k - x_j|^{-1} +$$

$$+|x_k - x_j|^{-3}(x_k - x_j)(v_k, x_k - x_j)\},$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j}\right)_- = (2c^2)^{-1}e_j\sum_{k=1,k\neq j}^{n} e_k\{|x_k - x_j|^{-3}[v_k(v_j - v_k, x_k - x_j) +$$

$$+(v_k - v_j)(v_k, x_k - x_j) + (x_k - x_j)(v_k, v_k(t) - v_j(t))] +$$

$$+3|x_k - x_j|^{-5}(x_j - x_k)(v_j - v_k, x_j - x_k)(v_k, x_k - x_j)\}.$$

З (3.1) та (3.5)–(3.7) для $x = Sx', v = Sv', x', v' \in D_{S(6n)}(r; a, b)$, отримуємо

$$\left|(v_j - v_k, x_k - x_j)_*\right| < 2\sqrt{3}\kappa_1(r + r_2)|a_j - a_k|,$$

$$\frac{1}{\|x_j - x_k|_*^3|} < \kappa_2^{3/2}|a_k - a_j|^{-3},$$

$$|v_k|_0 < r + r_2, \qquad |v_j - v_k|_0 < 2(r + r_2),$$

$$\left|(v_k, v_k - v_j)_*\right| \le |(v_k, v_k)_*| + |(v_k, v_j)_*| < 6(r + r_2)^2,$$

$$\left|e_j^{-1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j}\right)_-\right|_0 < 3(n-1)c^{-2}\bar{e}_*(\kappa r_1 + r_2)^2 r_1^{-2}\kappa_2^{3/2}\kappa_0\left[\sqrt{3}\kappa_1\kappa_0^{-1} + 2 + 2\kappa_1^2\kappa_2\right]. \qquad (3.9)$$

Додаючи праві частини (3.8) і (3.9), завершуємо доведення леми 3.2.

***Доведення теореми* 1.1.** Функції G'_j, $\tilde{G}_j$ і $\tilde{K}_{j,l}$ голоморфні у гіпердиску з теореми 1.1. Для доведення теореми потрібно показати, що векторне поле у правій частині (2.1), (2.2) — голоморфна функція у цьому гіпердиску. Для цього, в свою чергу, потрібно показати, що $\tilde{K}_{1j,k}^{(-1)}$ — голоморфна функція в гіпердиску $D_{S(3n)}(r; a)$. При цьому врахуємо, що

$$\tilde{K}_{1j,l} = \tilde{K}_{j,l}, \quad j,\ l = 4, \ldots, 3n.$$

Тоді

$$\mathrm{Det}\,\tilde{K}_1 = \sum_{\sigma\in\pi^0_{(3n\setminus 3)}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{j=4}^{3n}\tilde{K}_{j,\sigma j} =$$

$$= \prod_{l=4}^{3n}\tilde{K}_{l,l} + \sum_{s=0}^{3n-5}\sum_{j_k\neq j_l\neq 1,2,3}\prod_{l=1}^{s}\tilde{K}_{j_l,j_l}\sum_{\sigma\in\pi'_{(3n)\setminus j_{(s)}\cup(3)}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{k=1}^{3n-3-s}\tilde{K}_{j'_k,\sigma j'_k},$$

де $\cup j_k \cup j'_k = (3n-3)$, $\pi^0_{(3n)}$ — множина перестановок у множині $(3n)$, $\pi'_{(3n)\setminus j_{(s)}} = \pi'_{(3n)\setminus(j_1,\ldots,j_s)}$ — множина перестановок, які змінюють всі елементи множини $(3n)\setminus j_{(s)}$, і $|\sigma|$ — число інверсій, тобто число таких пар $(\sigma j'; \sigma j)$ у множині $(\sigma j,\, j \in (3n))$, що $j' < j$ і $\sigma j' > \sigma j$ [10]. Беручи до уваги нерівності на $D_{S(3n)}(r;a)$

$$|\tilde{K}_{j,k}| \leq \mu g_2 + |\tilde{K}'|_{SD}, \quad j \neq k,$$

$$|\tilde{K}_{j,j}| \geq mg_1 - \mu g_2 - |\tilde{K}'|_{SD} > 0, \qquad |\tilde{K}_{j,j}| \leq mg_1 + \mu g_2 + |\tilde{K}'|_{SD}$$

і наслідок 3.1, отримуємо оцінку для $D_{S(3n)}(r;a)$:

$$\bigl|\operatorname{Det} \tilde{K}_1\bigr| > (mg_1 - \mu g_2 - c_1 g_3)^{3n-3} -$$

$$- \sum_{s=0}^{3n-5} (3n-3-s)!(3n-3)^s (mg_1 + \mu g_2 + c_1 g_3)^s (\mu g_2 + c_1 g_3)^{3n-3-s} = R.$$

Тут ми використали те, що

$$\sum_{j_k \neq j_l \neq 1,2,3} 1 \leq (3n-3)^s.$$

Відомо, що

$$K^{(-1)}_{1j,k}(x'_{(3n)}) = (-1)^{j+k} (\operatorname{Det} \tilde{K}_1)^{-1} (\operatorname{Det} K^-_{1j,k})(x'_{(3n)}),$$

де $K^-_{1j,k}$ — матриця $\tilde{K}_1$ без j-го стовпчика та k-го рядка.

Якщо $R > 0$, то функція $\tilde{K}^{(-1)}_{1j,k}$ голоморфна в $D_{S(3n)}(r;a)$ згідно з твердженням 3.1. Ми також маємо

$$\bigl|\operatorname{Det} K^-_{1j,k}(x'_{(3n)})\bigr| \leq (3n-4)! |\tilde{K}|^{3n-4}_{SD}, \qquad x'_{(3n)} \in D_{S(3n)}(r;a).$$

В результаті

$$\bigl|\tilde{K}^{(-1)}_1\bigr|_{SD} \leq (3n-4)! R^{-1} (mg_1 + \mu g_2 + c_1 g_3)^{3n-4} = c_3, \qquad l = 1.$$

Нехай

$$|V|'_{SD} = \max_{j \in (3n \setminus 3)} \sup_{u'_{(3)} \in D_3(r;b_-)} \sup_{(x',v')_{(3n)} \in D_{S(6n)}(r;a,b)} \bigl|V_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)})\bigr|,$$

$$|V|''_{SD} = \max_{j \in (3)} \sup_{u'_{(3)} \in D_3(r;b_-)} \sup_{(x',v')_{(3n)} \in D_{S(6n)}(r;a,b)} \bigl|V_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}; u'_{(3)})\bigr|.$$

З умови теореми 1.1 і наслідку 3.1 випливає, що

$$|G'|_{SD} < 3(mg_1 + \mu g_2 + c_1 g_3)(r + r_3) + |\tilde{G}|_{SD} \leq c_4 + c_2.$$

Тоді

$$|V|'_{SD} \leq (3n-3) \bigl|\tilde{K}^{(-1)}_1\bigr|_{SD} |G'|_{SD} \leq (3n-3)|c_3(c_4 + c_2) = c',$$

$$|V|''_{SD} \leq \frac{3c^3}{2} \Bigl[(3n-3)|\tilde{K}|_{SD} |V|'_{SD} + |G'|_{SD}\Bigr] \leq$$

$$\leq \frac{3c^3}{2}\left[(3n-3)^2|\tilde{K}|_{SD}\big|\tilde{K}_1^{(-1)}\big|_{SD}+1\right]|G'|_{SD} <$$

$$< \frac{3c^3}{2}\left[(3n-3)^2(mg_1+\mu g_2+c_1g_3)c_3+1\right](c_4+c_2) = c''.$$

Отже, якщо $R > 0$, то векторне поле f у правій частині (2.1), (2.2) — це голоморфна обмежена функція в $D_{S(6n+3)}(r; a, b, b_-)$, що є аналогом $D_l(r;\xi)$ з теореми 1.2 при

$$C = \max(c', c'', r + r_2, r + r_3).$$

Теорема 1.1 випливає з теореми 1.2 при

$$T = r((6n+4)C)^{-1}.$$

Література

1. *Landau L., Lifshitz E.* The classical theory of fields. – Pergamon Press, 1959.
2. *Wittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
3. *Kunze M., Spohn H.* Slow motion of charges interacting through the Maxwell field // Commun. Math. Phys. – 2000. – **212**, № 2. – P. 437–467.
4. *Spohn H.* Dynamics of charged particles and their radiation field. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
5. *Siegel C., Moser J.* Lectures on celestial mechanics. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
6. *Skrypnik W.* On holomorphic solutions of Hamiltonian equations of motion of point charges // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 2. – P. 270–280.
7. *Skrypnik W.* On holomorphic solutions of Darwin equation of motion of point charges // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 4. – P. 546–564.
8. *Koddington E., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. – Krieger Publ. Co., 1984.
9. *Bochner S., Martin W. T.* Several complex variables. – Princeton, 1948.
10. *Фадеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

Одержано 06.06.17