УДК 517.956.6

С. З. Джамалов (Ин-т математики АН Республики Узбекистан, Ташкент)

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Under certain conditions imposed on the coefficients of the nonlinear mixed-type equation of the second kind of the second order in the space, we prove the correctness of the solution of a nonlocal boundary-value problem.

Доведено коректність розв'язку однієї нелокальної крайової задачі при деяких обмеженнях на коефіцієнти нелінійного рівняння мішаного типу другого роду другого порядку в просторі.

1. Введение и постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с гладкой границей $\partial\Omega$. Введем обозначения $Q = \Omega \times (0, T)$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$. В цилиндрической области Q рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - \left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u + \beta(t)|u_t|^{\rho}u_t = f(x,t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $0 < \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$ при $n \geq 3$, ρ — произвольное положительное конечное число при $n = 1, 2$. Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n. Будем также предполагать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественнозначные и достаточно гладкие, т. е. $K(x,t), \alpha(x,t), c(x,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C(\overline{Q})$, $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C(\overline{\Omega})$, $\beta(t) \in C^1[0,T]$. Предположим, что $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$. Кроме того, пусть выполнено одно из условий:

(a) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где a_0 — положительная постоянная;

(b) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$, где a_1 — отрицательная постоянная.

***Замечание* 1.** В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай (a) (случай (b) рассматривается аналогично).

Пусть $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$ при $x \in \overline{\Omega}$. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области $\overline{Q}$ не накладываем никаких ограничений, т. е. функция $K(x,t)$ внутри области может менять знак [2, 7, 15].

Для того чтобы более точно сформулировать рассматриваемую задачу, а также найти способы ее решения, мы должны ввести несколько функциональных пространств, неравенств и необходимых лемм.

Через $W_2^2(Q)$ обозначим пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u,v)_2^2 = \int\limits_Q (uv + u_x v_x + u_t v_t + u_{tt} v_{tt} + u_{xt} v_{xt} + u_{xx} v_{xx})\, dx\, dt$$

и нормой

$$\|u\|_2^2 = \int\limits_Q \left(u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xt}^2 + u_{tt}^2\right) dx\, dt,$$

где символы u_t, u_{x_i} и $u_{x_ix_j}$ обозначают производные,

$$v_x u_x = \sum_{i=1}^n v_{x_i} u_{x_i}, \qquad (\nabla u)^2 = u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2, \qquad v_{xx} u_{xx} = \sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_j} u_{x_ix_j},$$

$$u_{xx}^2 = \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2, \qquad u_{tx}^2 = \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2;$$

через $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ — пространство квадратично суммируемых функций; через $L_p(Q)$, $2 < p < \infty$, — банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на Q функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_p(Q)} = \left(\int\limits_Q |u|^p dxdt\right)^{1/p};$$

через $L_{p,\beta}(Q)$ — весовое банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на Q функций с весом $\beta(t) \geq 0$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_{p,\beta}(Q)} = \left(\int\limits_Q \beta(t)|u|^p dxdt\right)^{1/p}.$$

При установлении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Гельдера

$$\left|\int\limits_Q uvdxdt\right| \leq \left(\int\limits_Q |u|^p dxdt\right)^{1/p} \left(\int\limits_Q |v|^q dxdt\right)^{1/q} \quad \forall u \in L_p(Q)\ \forall v \in L_q(Q), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и неравенство Юнга

$$u \cdot v \leq \frac{\sigma^p u^{2p}}{2p} + \frac{v^{2q}}{2q\sigma^q} \quad \forall u, v \geq 0 \quad \forall \sigma > 0, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

При $p = q = 1$ получим неравенства Коши с σ [12, с. 33].

Лемма Вишика. *Пусть дана конечная система нелинейных уравнений*

$$A(\vec{c}) = \vec{h}, \quad \vec{c} = (c_1, \ldots, c_m), \quad \vec{h} = (h_1, \ldots, h_m),$$

где $A(\vec{c}) = \big(A_1(\vec{c}), \ldots, A_m(\vec{c})\big)$ *— непрерывная вектор-функция,* $-\infty < c_j < \infty$. *Если для достаточно больших* $|\vec{c}|$ *выполнено неравенство*

$$\big(A(\vec{c}), \vec{c}\big) \geq \tau^2 |\vec{c}|^{1+\delta}, \quad \delta > 0,$$

то система нелинейных уравнений имеет, по крайней мере, одно решение (*см.* [3; 15, с. 13]).

При исследовании нелинейных уравнений важным этапом является обоснование предельного перехода в нелинейных членах. В некоторых случаях такое обоснование предоставляет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* Q — *ограниченная область в* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ *и* g — *такие функции из* $L_q(Q)$, $1 < q < +\infty$, *что* $\|g_\mu\| \leq c$, $g_\mu \to g$ *почти всюду в* Q. *Тогда* $g_\mu \to g$ *слабо в* Q.

Доказательство этой леммы см. в работе [16, с. 25, 26].

Определение 1. *Пусть* V — *рефлексивное пространство Банаха, а* V^* — *сопряженное пространство к* V. *Любой оператор* $A : V \to V^*$, *имеющий свойство* $\big(A(u) - A(\vartheta), u - \vartheta\big) \geq 0$ $\forall u, \vartheta \in V$, *называется монотонным* [16, с. 168].

Рассмотрим следующую нелокальную задачу:

Найти обобщенное решение уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ такое, что u_t принадлежит $L_{p,\beta}(Q)$, $p = \rho + 2$ ($2 < p < \infty$, если $n = 1, 2$; $2 < p < 4$, если $n \geq 3$), и удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, 0) = \gamma\, u(x, T), \tag{2}$$

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

где γ — некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Впервые нелокальные краевые задачи (2), (3) для линейного уравнения (1) смешанного типа второго рода второго порядка, когда γ — постоянное число, отличное от нуля, и $\beta(t) = 0$, были исследованы в работах [5 – 7, 9, 17] в различных пространствах функциональными методами.

Отметим, что в работах [6, 7] в более общем случае для линейного уравнения (1), когда $K(x, 0) \leq 0 \leq K(x, T)$, γ — постоянное число, отличное от нуля, и $\beta(t) = 0$, доказана однозначная разрешимость и изучена гладкость обобщенного решения задачи (2), (3) в пространствах Соболева $W_2^\ell(Q)$, $2 \leq \ell \in \mathbb{N}$. Одним из первых нелинейные уравнения смешанного типа изучал Н. А. Ларькин. Он предложил постановку локальных краевых задач для этого уравнения и исследовал их разрешимость [13]; позднее эти исследования для нелинейных уравнений были продолжены в [4, 14, 15].

Целью настоящей работы является изучение корректности нелокальной краевой задачи (2), (3) для уравнения (1) в случае, когда $\beta(t) \geq 0$, в пространстве $W = W_2^2(Q) \cap L_{p,\beta}(Q)$, $p = \rho + 2$.

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи.

Обозначим через C_L класс функций из пространства $W = W_2^2(Q) \cap L_{p,\beta}(Q)$, $p = \rho + 2$, удовлетворяющих условиям (2), (3).

Определение 2. *Назовем функцию* $u(x, t)$ *обобщенным решением задачи* (1) – (3), *если* u *принадлежит* C_L *и удовлетворяет уравнению* (1) *почти всюду в области* Q.

В дальнейшем нам будет необходима следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (1) *и, кроме того,* $2\alpha(x,t) - K_t(x,t) + \lambda K(x,t) \geq \delta_1 > 0,\ \lambda c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$, $c(x,0) \leq c(x,T)$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, *где* $\lambda = -\dfrac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| < 1$ *в случае* (a). *Тогда для любого обобщенного решения задачи* (1)–(3) *и функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_1^2 + \|u_t\|_{L_{p,\beta}}^p \leq c_1\|f\|_0^2. \tag{4}$$

Здесь и далее через c_i обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Доказательство. Для любой функции $u \in C_L$ после интегрирования тождества

$$2\int\limits_Q (Lu - f)\exp(-\lambda t)u_t dxdt = 0 \tag{5}$$

легко получить тождество

$$2\int\limits_Q Lu\exp(-\lambda t)u_t dxdt =$$

$$= \int\limits_Q e^{-\lambda t}\left\{(2\alpha - K_t + \lambda K)u_t^2 + \lambda a_{ij}\, u_{x_i}u_{x_j} + (\lambda c - c_t)u^2\right\} dxdt +$$

$$+ \int\limits_Q e^{-\lambda t}\beta(t)|u_t|^{\rho+2}dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\left\{Ku_t^2\,\nu_0 - 2a_{ij}u_{x_i}\,u_t\,\nu_i + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,\nu_0 + cu^2\,\nu_0\right\} ds, \tag{6}$$

где $\nu = \big(\nu_0 = \cos(\nu,t), \nu_i = \cos(\nu,x_i)\big)$, ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q. Условия теоремы 1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Пусть $u \in C_L$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3), тогда граничные интегралы $a_{ij}u_{x_i} \cdot u_t\nu_i$ равны нулю на ∂Q, так как $\nu_i = 0$ на основаниях области Q и $u(x,t) = 0$ на S. Поскольку выражение $\left[Ku_t^2 + a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j} + cu^2\right]\nu_0\exp(-\lambda t)$ положительно на основаниях области Q, а на боковой границе S равно нулю, т. е. относительно функций $K(x,t)$ и $c(x,t)$ требуется выполнение условий $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$, $c(x,0) \leq c(x,T)$ и $\gamma^2 = e^{-\lambda T}$, учитывая изложенное выше, получаем положительность граничного интеграла:

$$J = \int\limits_{\partial Q} \exp(-\lambda t)\left\{Ku_t^2\nu_0 - 2a_{ij}u_{x_i}u_t\nu_i + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\nu_0 + cu^2\nu_0\right\}ds =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} \exp(-\lambda t)\left\{Ku_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + cu^2\right\}\nu_0\, ds - 2\int\limits_{\partial Q} a_{ij}u_{x_i}u_t\nu_i\, ds =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[K(x,T)e^{-\lambda T}u_t^2(x,T) - K(x,0)u_t^2(x,0)\right]dx +$$

$$+\left[e^{-\lambda T}-\gamma^2\right]\int\limits_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[c(x,T)-c(x,0)\right]e^{-\lambda T}\,u^2(x,T)dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left[K(x,T)e^{-\lambda T}u_t^2(x,T)-K(x,0)u_t^2(x,0)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[c(x,T)-c(x,0)\right]e^{-\lambda T}u^2(x,T)dx\geq 0.$$

Теперь, опуская неотрицательные граничные интегралы из тождества (6), имеем

$$2\int\limits_{Q} Lue^{-\lambda t}u_t\,dx\,dt\geq\int\limits_{Q}e^{-\lambda t}\left\{(2\alpha-K_t+\lambda K)u_t^2+\lambda a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}+(\lambda c-c_t)u^2\right\}dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q}e^{-\lambda t}\beta(t)|u_t|^p\,dx\,dt. \tag{7}$$

Применяя неравенство Коши с σ [12, c. 33] к неравенству (7), получаем первую оценку (4).

Теорема 1 доказана.

2. Уравнение составного типа. Рассмотрим в области Q семейство уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon+Lu_\varepsilon=f(x,t), \tag{8}$$

где $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа в пространстве, ε — достаточно малое положительное число. Отметим, что уравнения вида (8) относятся к классу так называемых уравнений составного типа. Ниже используем уравнение составного типа (8) в качестве „ε-регуляризирующего" уравнения для уравнения (1) [2, 15].

Нелокальная краевая задача:

$$D_t^qu_\varepsilon(x,0)=\gamma D_t^qu_\varepsilon(x,T),\quad q=0,1,2, \tag{9}$$

$$u_\varepsilon|_S=0, \tag{10}$$

где $D_t^q=\dfrac{\partial^q}{\partial t^q}$, $q=1,2$, $D_t^0=u$, γ — постоянная, не равная 0, причем $|\gamma|<1$ в случае (a). Обозначим через C_{L_ε} класс функций из пространства $W=W_2^2(Q)\cap L_{p,\beta}(Q)$, $p=\rho+2$, удовлетворяющих соответствующим условиям (9), (10), такой, что $\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\in L_2(Q)$.

Определение 3. *Назовем функцию* $u_\varepsilon(x,t)$ *регулярным решением задачи* (8)–(10), *если* $u_\varepsilon(x,t)\in C_{L_\varepsilon}$ *такое, что*

$$|u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\in L_{2,\beta}(Q),\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\right)\in L_{2,\beta}(Q),\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\right)\in L_{2,\beta}(Q)\quad \forall i=\overline{1,n},$$

и удовлетворяет уравнению (8) *почти всюду в области* Q.

Теорема 2. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (8) *и, кроме того, всюду в области выполнены условия* $2\alpha(x,t) - |K_t(x,t)| + \lambda K(x,t) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$, $c(x,0) = c(x,T)$, $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, *где* $\lambda = -\dfrac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| < 1$ *в случае* (a), $\max|K_{x_i}| \leq \delta_* = \min\{\delta_1, \lambda\}$, $\max|\beta_t(t)| \leq \delta_0 = \min\{\delta_*, \delta_1\}$, $|\gamma|^\rho \beta(T) = \beta(0)$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, *такой, что* $f(x,0) = \gamma f(x,T)$, *существует единственное регулярное решение задачи* (8)–(10), *и для нее справедливы следующие оценки*:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\left(\|u_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \lambda\|\nabla u_{\varepsilon t}\|_0^2\right) + \|u_\varepsilon\|_1^2 + \|u_{\varepsilon t}\|_{L_{p,\beta}(Q)}^P \leq c_2\|f\|_0^2, \\
\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\right\|_0^2 + \varepsilon\lambda\|\nabla u_{\varepsilon t}\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 + \frac{\rho+1}{(0,5\rho+1)^2}\times \\
\times\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\right)\right\|_{L_{2,\beta}(Q)}^2 + a_0\left\|\nabla\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\right)\right\|_{L_{2,\beta}(Q)}^2\right) + \\
+\left\||u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}\right\|_{L_{2,\beta}(Q)}^2 \leq c_3\left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right].
\end{gathered} \tag{11}
$$

***Замечание* 2.** В формулировке теоремы 2 относительно функции $0 \leq \beta(t)$ на границе отрезка $[0,T]$ можно потребовать выполнения равносильного условия $\beta(T) = \beta(0) = 0$.

Доказательство. Доказательство первого из неравенств (11) проводится так же, как и доказательство теоремы 1. Разрешимость задачи (8)–(10) докажем методом Галеркина. Пусть $\phi_j(x,t)$ — собственные функции следующей задачи:

$$
\begin{gathered}
\Delta\phi_j = \frac{\partial^2\phi_j}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi_j}{\partial x_i^2} = -\mu_j^2\phi_j, \\
D_t^p\phi_j|_{t=0} = D_t^p\phi_j|_{t=T}, \quad p = 0,1, \\
\phi_j|_S = 0.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Из общей теории линейных самосопряженных эллиптических операторов известно, что все собственные функции задачи (12) образуют базис в пространстве $W_2^2(Q)$ и различным собственным значениям соответствуют различные собственные функции. Отметим, что все собственные функции $\phi_j(x,t)$ линейно независимы, а линейные комбинации плотны в $W = W_2^2(Q) \cap L_p(Q)$, $p = \rho + 2$ [1; 15, с. 213; 16, с. 53]. Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$
\begin{gathered}
\ell\omega_j = e^{\frac{-\lambda t}{2}}\frac{\partial\omega_j}{\partial t} = \phi_j, \\
\omega_j(x,0) = \gamma\omega_j(x,T),
\end{gathered} \tag{13}
$$

где γ — постоянная, не равная нулю, причем $|\gamma| < 1$ в случае (a). Очевидно, что задача (13) однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$\ell^{-1}\phi_j = \omega_j = \int\limits_0^t \exp\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)\phi_j\,d\tau + \frac{1}{\gamma-1}\int\limits_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j\,dt.$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$ для произвольной последовательности функций $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$, то, действуя на эту сумму оператором ℓ, получаем $\sum_{j=1}^N c_j\ell\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j = 0$. Отсюда следует, что для всех $j=\overline{1,N}$ коэффициенты $c_j=0$. Отметим, что из построения функций $\phi_j(x,t)$ вытекают следующие условия на функции $\omega_j(x,t)\in W$:

$$\begin{gathered} D_t^q\,\omega_j\big|_{t=0} = \gamma D_t^q\,\omega_j\big|_{t=T}, \quad q=0,1,2, \\ \omega_j\big|_S = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Теперь приближенное решение задачи (8) – (10) ищем в виде $w = u_\varepsilon^N = \sum_{j=1}^N c_j\omega_j$, где коэффициенты c_j, $j=\overline{1,N}$, определяются как решение нелинейной алгебраической системы

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j\,dx\,dt = \int\limits_Q f\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j\,dx\,dt. \tag{15}$$

Разрешимость нелинейной алгебраической системы (15) следует из полученных ниже априорных оценок с применением леммы Вишика [3; 15, с. 13] для приближенных решений задачи (8) – (10). Умножая каждое уравнение из (15) на $2c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая задачи (12), (13), из (15) получаем тождество

$$\int\limits_Q L_\varepsilon w\exp(-\lambda t)w_t\,dx\,dt = \int\limits_Q f\exp(-\lambda t)w_t\,dx\,dt. \tag{16}$$

Отсюда в силу условия теоремы 2 интегрированием тождества (16) получим для приближенного решения задачи (8) – (10) первую априорную оценку из (11), т. е.

$$\varepsilon\Big(\left\|u_{\varepsilon tt}^N\right\|_0^2 + \lambda\left\|\nabla u_{\varepsilon t}^N\right\|_0^2\Big) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_1^2 + \left\|u_{\varepsilon t}^N\right\|_{L_{p,\beta}(Q)}^P \le c_4\|f\|_0^2. \tag{17}$$

Отсюда в силу монотонности оператора $|u_t|^\rho u_t$ и неравенства (17) следует однозначная разрешимость нелинейной алгебраической системы (15) [3; 15, с. 13, 213]. Докажем теперь вторую априорную оценку из (11). Благодаря задаче (12), (13), из тождества (15) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2}\int\limits_Q L_\varepsilon w\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta\ell\omega_j\,dx\,dt = -\frac{1}{\mu_j^2}\int\limits_Q f\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta\ell\omega_j\,dx\,dt, \tag{18}$$

где

$$\Delta\ell w = \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\left[\frac{\partial\Delta w}{\partial t} - \lambda w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4}\,w_t\right].$$

Умножая каждое уравнение из (18) на $2\mu_j^2 c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая условия (14), из (18) получаем тождество

$$2\int\limits_Q (L_\varepsilon - f)we^{-\lambda t}\left[\frac{\partial\Delta w}{\partial t} - \lambda w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4}\,w_t\right]dx\,dt = 0. \tag{19}$$

Интегрируя (19), с учетом условия теоремы 2 и краевых условий (14) имеем неравенство

$$m\left(\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\right) \geq \varepsilon\left\|\frac{\partial\,\Delta w}{\partial\,t}\right\|_0^2 + \int\limits_Q e^{-\lambda t}\left\{(2\alpha + K_t + \lambda\,K\,)w_{\,tt}^{\,2} + \right.$$

$$\left. +(2\alpha - K_t + \lambda K)a_0 w_{\,tx}^{\,2} + \lambda a_0 w_{xt}^2 + \lambda a_0 w_{xx}^2\right\}dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\left\{K(w_{\,tt}^{\,2} + w_{\,tx}^{\,2}) + \alpha\,w_t w_{tt} + (a_{ij}w_{x_i})_{x_j}(w_{x_ix_j} + w_{tt}) + \right.$$

$$\left. +2\,cw\big(w_{tt} + w_{x_ix_j}\big)\right\}\nu_0\,ds +$$

$$+\int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\left\{Kw_{tt}w_{tx_i} + 2\alpha\,w_t w_{tx_i} + (a_{ij}\,w_{x_i})_{x_jt}w_{tt}\right\}\nu_i\,ds +$$

$$+2(\rho+1)\left[\int\limits_Q e^{-\lambda t}\beta(t)\left\{a_0|w_t|^\rho(\nabla w_t)^2 + |w_t|^\rho w_{tt}^2\right\}dx\,dt\right] +$$

$$+2\int\limits_Q \beta_t e^{-\lambda t}|w_t|^\rho w_t w_{tt}\,dx\,dt -$$

$$-2\int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\beta\left[\,|w_t|^\rho w_t w_{tt}\nu_0 - |w_t|^\rho w_t\nabla w_t\nu_i\right]ds = \sum_{i=1}^{7} J_i, \tag{20}$$

где J_1 — интеграл по области, J_2 и J_3 — интегралы по границе (для линейных членов), J_4 и J_5 — интегралы по области с нелинейными членами, J_6 и J_7 — интегралы по границе (для нелинейных членов). Учитывая условия теоремы 2 и используя неравенство Коши с σ, убеждаемся, что интеграл по области J_1 допускает оценку

$$J_1 = \varepsilon\left\|\frac{\partial\Delta w}{\partial t}\right\|_0^2 + \varepsilon\lambda a_0\,\|w_{tx}\|_0^2 + c_5\int\limits_Q e^{-\lambda t}\ \left[w_{tt}^2 + w_{tx}^2 + w_{xx}^2\right]dx\,dt \leq \mathrm{const}\left(\widehat{N}\right). \tag{21}$$

Символом $\mathrm{const}\big(\widehat{N}\big)$ здесь и далее обозначена постоянная, не зависящая от N. Учитывая краевые условия (14) и условия теоремы 2, получаем, что граничные интегралы по границе для линейных членов таковы: $J_2 \geq 0,\ J_3 = 0,$ а граничные интегралы J_6 и J_7 по границе для нелинейных членов равны нулю.

Члены из формулы (20), не являющиеся билинейными, можно записать в виде

$$J_4 = \frac{2(\rho+1)}{(0,5\rho+1)^2}\int\limits_Q e^{-\lambda t}\beta(t)\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(|w_t|^{\rho/2}w_t\right)\right\}^2 + \left\{a_0\Big(\nabla(|w_t|^{\rho/2}w_t)\Big)^2\right\}^2\right]dx\,dt. \tag{22}$$

Из представления (22) видно, что интеграл с нелинейными членами положительно определен, т. е. $J_4 > 0$. Осталось оценить интеграл по области J_5 для нелинейного члена, т. е.

$$J_5 = 2 \int\limits_Q \beta_t e^{-\lambda t} |w_t|^\rho w_t w_{tt}\, dx\, dt. \tag{23}$$

В силу неравенства Гельдера имеем

$$J_4 \geq -2 \max_{t\in[0,T]} |\beta_t|\, \||w_t|^\rho\|_{L_n(Q)} \|w_t\|_{L_q(Q)} \|w_{tt}\|_{L_2(Q)}, \tag{24}$$

где q (как и в теореме вложения Соболева) определяется из равенства $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2}=1$. Поскольку из $0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$ следует $\rho n \leq q$, то в силу первой из оценок (11) имеем

$$\||w_t|^\rho\|_{L_n(Q)} \leq \|w_t\|^\rho_{L_2(Q)} \leq \mathrm{const}\,(\|f\|_{L_2(Q)}). \tag{25}$$

Итак,

$$J_5 \geq \mathrm{const}\,(\|f\|_0) \max_{t\in[0,T]} |\beta_t|\; \|w_t\|_{L_q(Q)} \|w_{tt}\|_{L_2(Q)}. \tag{26}$$

При выполнении условий теоремы на ρ имеем вложения $W_2^1(Q) \subset L_q(Q)$ [16, с. 31]. Теперь, выбирая $\mathrm{const}\,(\ \|f\|_0) \max|\beta_t(t)| < \delta_0 = \min\{\delta, \lambda\}$ и применяя неравенство Коши с σ к (26), получаем

$$J_5 \geq -\frac{\delta_0}{2}\|w_t\|_{W_2^1(Q)} - \frac{\delta_0}{2}\|w_{tt}\|_{L_2(Q)}. \tag{27}$$

Следовательно, из (17) – (27) вытекает вторая априорная оценка для приближенного решения задачи (8) – (10):

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t}\, \Delta u_\varepsilon^N \right\|_0^2 + \varepsilon\lambda a_0 \left\|u^N_{\varepsilon t x_i}\right\|_0^2 + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_2^2 + \frac{\rho+1}{(0,5\rho+1)^2} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|u^N_{\varepsilon t}\right|^{\rho/2} u^N_{\varepsilon t}\right)\right\|^2_{L_{2,\beta}(Q)} + \right.$$

$$\left. + a_0 \left\| \nabla \left(\left|u^N_{\varepsilon t}\right|^{\rho/2} u^N_{\varepsilon t}\right)\right\|^2_{L_{2,\beta}(Q)} \right) + \left\|\left|u^N_{\varepsilon t}\right|^{\rho/2} u^N_{\varepsilon t}\right\|^2_{L_{2,\beta}(Q)} \leq c_6 \left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right]. \tag{28}$$

Итак, мы получили необходимые первую (17) и вторую (28) априорные оценки для приближенного решения задачи (8) – (10).

Теперь с помощью этих оценок докажем разрешимость задачи (8) – (10). Согласно известной теореме о слабой компактности [12; 15, с. 220; 16, с. 56], из ограниченной последовательности $\left\{w = u_\varepsilon^N\right\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций $\left\{u_\varepsilon^{N_k}\right\}$ такую, что при $N_k \to \infty$ имеем

$$u_\varepsilon^{N_k}(x,t) \to u_\varepsilon(x,t) \quad \text{слабо в} \quad W_2^2(Q), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\Delta u_\varepsilon^{N_k} \to \frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|u^{N_k}_{\varepsilon t}\right|^{\rho/2} u^{N_k}_{\varepsilon t}\right) \to \Im_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|u^{N_k}_{\varepsilon t}\right|^{\rho/2} u^{N_k}_{\varepsilon t}\right) \to \Im_2 \quad \forall i = \overline{1,n} \quad \text{слабо в} \quad L_{2,\beta}(Q),$$

$$\left|u_{\varepsilon t}^{N_k}\right|^{\rho/2} u_{\varepsilon t}^{N_k} \to \Im_3 \quad \text{слабо в} \quad L_{2,\beta}(Q), \quad \left|u_{\varepsilon t}^{N_k}\right|^{\rho} u_{\varepsilon t}^{N_k} \to \Psi \quad \text{слабо в} \quad L_{q,\beta}(Q),$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

Согласно лемме 1.3 о предельном переходе (см. лемму 1.3 из [16, с. 25 – 27, 56]), в нелинейном члене имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho}u_{\varepsilon t}\right)=\Im_1, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon t}|^{\rho}u_{\varepsilon t}\right)=\Im_2, \qquad |u_{\varepsilon t}|^{\rho/2}u_{\varepsilon t}=\Im_3, \qquad |u_{\varepsilon t}|^{\rho}u_{\varepsilon t}=\Psi.$$

Поскольку последовательность базис-функции $\{\varphi_j(x,t)\}$ плотна в пространстве $W = W_2^2(Q)\cap L_{p,\beta}(Q),\ p=\rho+2$, и удовлетворяет условиям (9), (10), то тождество (15) выполняется и для произвольной функции $\vartheta(x,t)\in W$, удовлетворяющей условиям (9), (10), т. е.

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\vartheta(x,t)\,dx\,dt=\int\limits_Q f\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\vartheta(x,t)\,dx\,dt. \tag{15$'$}$$

Теперь, используя лемму 1.3 (см. [16, с. 26]), мы можем осуществить предельный переход в тождестве (15$'$) при $N_k\to\infty$. Отсюда следует, что последовательность функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ является единственным регулярным решением задачи (8) – (10). Тем самым теорема 2 доказана (см. [15, с. 214] (формула 1.28), [16, с. 26] (формула 1.48)).

3. Разрешимость нелокальной краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Метод „ε-регуляризации”. Перейдем к доказательству однозначной разрешимости задачи (1) – (3). Для этого используем уравнение составного типа (8) в качестве „ε-регуляризирующего” уравнения для уравнения (1) [2, 15].

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда обобщенное решение задачи* (1) – (3) *из* $W=W_2^2(Q)\cap L_{p,\beta}(Q),\ p=\rho+2,$ *существует и единственно.*

Доказательство. Сначала докажем *единственность* обобщенного решения задачи (1) – (3) из указанного пространства методом от противного. Пусть существуют два различных решения $\zeta(x,t),\ \vartheta(x,t)$ задачи (1) – (3).

Тогда функция $u(x,t)=\zeta(x,t)-\vartheta(x,t)$ удовлетворяет однородному нелинейному уравнению

$$Lu=K(x,t)\,u_{tt}-\Delta_x u+\alpha\,(x,t)\,u_t+c\,(x,t)\,u+\beta(t)\left[|\zeta_t|^{\rho}\zeta_t-|\vartheta_t|^{\rho}\vartheta_t\right]=0$$

с краевыми условиями (2), (3). Непосредственно из теоремы 1 следует неравенство

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)}+\int\limits_Q e^{-\lambda t}\beta(t)\big[|\zeta_t|^{\rho}\zeta_t-|\vartheta_t|^{\rho}\vartheta_t\big](\zeta_t-\vartheta_t)\,dx\,dt\le 0. \tag{29}$$

Учитывая монотонность оператора $|u_t|^{\rho}u_t$ [16, с. 53] и неравенство $0\le\beta(t)$, получаем

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}\big[|\zeta_t|^{\rho}\zeta_t-|\vartheta_t|^{\rho}\vartheta_t\big](\zeta_t-\vartheta_t)\,dx\,dt\ge 0. \tag{30}$$

В силу (30) из (29) следует, что $\|u\|^2_{W_2^1(Q)}\le 0$, и, значит, $u(x,t)=0$. Отсюда следует единственность решения задачи (1) – (3).

Теперь докажем *существование* обобщенного решения задачи (1)–(3). Для этого рассмотрим в области уравнение (8) с краевыми условиями (9), (10) при $\varepsilon > 0$. Поскольку выполнены все условия теорем 2, 3, то существует единственное обобщенное решение задачи (8)–(10) при $\varepsilon > 0$ и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ при $\varepsilon > 0$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций в W такую, что

$$u_{\varepsilon_j}(x,t) \to u_\varepsilon(x,t) \quad \text{слабо в} \quad W_2^2(Q), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\varepsilon_j} \to \frac{\partial}{\partial t}\Delta u \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q),$$
$$\left|u_{t\varepsilon_j}\right|^\rho u_{t\varepsilon_j} \to |u_t|^\rho u_t \quad \text{слабо в} \quad L_{q,\beta}(Q), \tag{31}$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ при $\varepsilon_j \to 0$.

Покажем, что предельная функция $u(x,t) \in C_L$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду. Действительно, так как справедливо (31), а последовательность $\left\{\dfrac{\partial \Delta u_{\varepsilon_j}(x,t)}{\partial t}\right\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, то имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_j} + \varepsilon_j \frac{\partial\, \Delta u_{\varepsilon_j}}{\partial\, t} + \beta(t)\left[\left|u_{t\varepsilon_j}\right|^\rho u_t - |u_t|^\rho u_t\right] =$$
$$= L\left(u - u_{\varepsilon_j}\right) + \varepsilon_j \frac{\partial\, \Delta u_{\,\varepsilon_j}}{\partial\, t} + \beta(t)\left[\left|u_{t\varepsilon_j}\right|^\rho u_t - |u_t|^\rho u_t\right]. \tag{32}$$

Из равенства (32), используя лемму 1.3 (о предельном переходе в нелинейных членах) из [16, с. 26] и переходя к пределу при $\varepsilon_j \to 0$, получаем единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Таким образом, теорема 3 доказана.

***Замечание* 3.** Как мы видели, в постановке задачи (1)–(3) знак квадратичной формы существенной роли не играет, хотя в случае (a) в класс уравнений (1) входят параболические уравнения, а в случае (b) — обратно-параболические уравнения; тем не менее, для задачи (1)–(3) в случаях (a) и (b) получены аналогичные результаты лишь для разных значений γ, т. е. в случае (a) $|\gamma| < 1$, а случае (b) $|\gamma| > 1$.

Возникает вопрос: существенны ли ограничения на γ при постановке задачи? В связи с этим рассмотрим следующие примеры.

Примеры. В прямоугольнике $Q = (0,\ell) \times (0,T)$ рассмотрим модельную задачу

$$\begin{aligned} &\Pi_1 u = u_t - u_{xx} = 0, \\ &u(x,0) = \gamma \cdot u(x,T), \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Решая задачу (33) методом Фурье, находим $\gamma_k = \exp(\lambda_k T) > 1$, $\lambda_k = \dfrac{2\pi k}{\ell}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1 выполнены, но, несмотря на это, функции $u_k = C_k e^{-\lambda_k t} \sin \lambda_k x$ (где C_k — произвольные постоянные) являются нетривиальными решениями этой краевой задачи.

Точно так же рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\Pi_2 u = u_t + u_{xx} = 0, \\ &u(x,0) = \gamma \cdot u(x,T), \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Решая задачу (34) методом Фурье, убеждаемся, что функции $u_k = C_k e^{\lambda_k t} \sin \lambda_k x$ с произвольными C_k являются нетривиальными решениями этой задачи. В этом случае $\gamma_k = \exp(-\lambda_k T) < < 1$.

Итак, мы видели, что ограничения на γ в случаях (a) и (b) существенны. При невыполнении этих условий, как показано, единственность задачи нарушается.

Автор благодарит профессора Р. Р. Ашурова за ряд замечаний, которые способствовали улучшению данной статьи.

Литература

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1983. – 84 с.
3. *Вишик М. И.* Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму, при периодических граничных условиях // Докл. АН СССР. – 1961. – **137**, № 3. – С. 502 – 505.
4. *Глазатов С. Н.* Краевые задачи для одного класса нелинейных вырождающихся гиперболических уравнений. – Новосибирск, 1984. – 21 с. – (Препринт / СО АН СССР. Ин-т математики, № 50).
5. *Глазатов С. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 6. – С. 162 – 164.
6. *Джамалов С. З.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // Узб. мат. журн. – 2014. – **1**, № 1. – С. 5 – 14.
7. *Djamalov S. Z.* On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle // IIUM J. – 2016. – **17**, № 2. – P. 95 – 104.
8. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
9. *Каратопраклиева М. Г.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 1. – С. 68 – 79.
10. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1990. – 130 с.
11. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Л.: Ленинград. гос. ун-т, 1990. – 204 с.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
13. *Ларькин Н. А.* Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 6. – С. 1308 – 1314.
14. *Ларькин Н. А.* О разрешимости в целом краевых задач для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 1. – С. 111 – 119.
15. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 267 с.
16. *Лионс Ж. -Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 580 с.
17. *Терехов А. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. – С. 148 – 159.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

Получено 10.03.17,
после доработки — 02.03.18