УДК 517.925

В. М. Евтухов, А. Г. Черникова (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

We establish the conditions of existence for one class of monotone solutions of two-term nonautonomous differential equations of the second order with rapidly varying nonlinearities and the asymptotic representations of these solutions and their first-order derivatives as $t\uparrow\omega$ $(\omega\le+\infty)$.

Встановлено умови існування одного класу розв'язків двочленного неавтономного диференціального рівняння другого порядку з швидко змінною нелінійністю, а також асимптотичні при $t\uparrow\omega$ $(\omega\le+\infty)$ зображення для таких розв'язків та їхніх похідних першого порядку.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''=\alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y)\neq 0 \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)=Z_0\in\{0;+\infty\}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}=1, \tag{1.2}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — некоторая односторонняя окрестность Y_0. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0}=\begin{cases}[y_0,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \ \text{— левая окрестность} \quad Y_0,\\ ]Y_0,y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \ \text{— правая окрестность} \quad Y_0,\end{cases} \tag{1.3}$$

где $y_0\in\mathbb{R}$ такое, что $|y_0|<1$ при $Y_0=0$ и $y_0>1$ $(y_0<-1)$ при $Y_0=+\infty$ (при $Y_0=-\infty$).

Нетрудно убедиться, что из условий (1.2) следует, что

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\sim\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0 \ (y\in\Delta_{Y_0}), \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\pm\infty, \tag{1.4}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi^2(y)}{\varphi'(y)\displaystyle\int_Y^y\varphi(x)\,dx}=1, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left[\displaystyle\int_Y^y\varphi(x)\,dx\right]^2}{\varphi(y)\displaystyle\int_Y^y\left(\int_Y^x\varphi(u)\,du\right)dx}=1, \tag{1.5}$$

где

$$Y=\begin{cases}y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)=+\infty,\\ Y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)=0.\end{cases}$$

Согласно условиям (1.4), функция φ и ее производная первого порядка являются (см. монографию [1, с. 91, 92]) быстро меняющимися при $y\to Y_0$.

В силу же условий (1.5) и теоремы 3.10.8 из монографии [2, с. 178] функция φ и ее первая производная принадлежат при $Y_0 = +\infty$ и $Z_0 = +\infty$ классу функций Γ, введенному Л. Ханом (см., например, [2, с. 175]).

Определение 1.1. *Класс* Γ *состоит из измеримых, неубывающих и непрерывных справа функций* $f\colon [y_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, *для каждой из которых существует измеримая функция* $g\colon [y_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, *дополняющая для функции* f, *т. е. такая, что*

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f\,(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \textit{для любого} \quad u \in \mathbb{R}.$$

С использованием замен переменных класс Γ может быть легко расширен до класса $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ функций $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0, для которых

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 \in \{0; +\infty\}.$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что функция* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ *принадлежит классу функций* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, *если классу* Γ *принадлежат:*

1) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f(y)}$ *при* $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = 0$;
2) *функция* $f_0(y) = f(-y)$ *при* $Y_0 = -\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$;
3) *функция* $f_0(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— правая окрестность нуля, и* $Z_0 = +\infty$;
4) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— правая окрестность нуля, и* $Z_0 = 0$;
5) *функция* $f_0(y) = f\left(-\dfrac{1}{y}\right)$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— левая окрестность нуля, и* $Z_0 = +\infty$;
6) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{y}\right)}$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— левая окрестность нуля, и* $Z_0 = 0$;
7) *функция* $f_0(y) \equiv f(y)$ *при* $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$.

Учитывая это определение, а также лемму 3.10.1 и предложение 3.10.2 из [2, с. 175], приходим к выводу, что для функции $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{для любого} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

в котором функция g, дополняющая для f, в каждом из случаев 1 – 7 может быть выражена через функцию g_0, дополняющую для f_0, следующим (соответственно) образом:

1) $g(y) = -g_0(y)$;
2) $g(y) = -g_0(-y)$;
3) $g(y) = -y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$;
4) $g(y) = y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$;

5) $g(y) = y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$;

6) $g(y) = -y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$;

7) $g(y) = g_0(y)$,

и справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть f принадлежит $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g. Тогда*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{g(y)}{y} = 0$$

и для любой функции $u\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y + u(y)g(y)] = Z_0,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f\left(y + u(y)g(y)\right)}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Допустим теперь, что функция $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условиям

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 \in \{0; +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y)f''(y)}{f'^2(y)} = 1. \tag{1.7}$$

В этом случае для каждой из указанных в определении 1.2 функций $f_0\colon [x_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, где x_0 — некоторое положительное число, выполняются условия

$$f_0'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x\in[x_0,+\infty[, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x)f_0''(x)}{f_0'^2(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_0^2(x)}{f_0'(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_0(u)\,du} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_0(u)\,du\right]^2}{f_0(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(v)\,dv\right)du} = 1.$$

В силу этих условий, а также следствия 3.10.5(b) из [2, с. 177] справедлива следующая лемма.

Лемма 1.2. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ удовлетворяет условиям* (1.7), *то она и ее первая производная принадлежат классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, которая определяется однозначно с точностью до эквивалентных при $y\to Y_0$ функций. В качестве дополняющей функции может быть выбрана, например, одна из следующих функций*:

$$\frac{\displaystyle\int_{Y}^{y}\left(\int_{Y}^{t} f(u)\,du\right)dt}{\displaystyle\int_{Y}^{y} f(x)\,dx} \sim \frac{\displaystyle\int_{Y}^{y} f(x)\,dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \textit{при} \quad y\to Y_0,$$

где

$$Y = \begin{cases} y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = +\infty, \\ Y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = 0. \end{cases}$$

***Замечание* 1.1.** Приведенные выше леммы относятся к случаю, когда функция $f:\Delta_{Y_0}\longrightarrow$ $\longrightarrow]0,+\infty[$ (т. е. принимает положительные значения). В случае функции $f:\Delta_{Y_0}\longrightarrow]-\infty,0[$ будем говорить, что она принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, если $(-f)\in\Gamma_{Y_0}(-Z_0)$. Тогда нетрудно убедиться, что для нее леммы 1.1, 1.2 также остаются справедливыми.

В силу вышеизложенного в дифференциальном уравнении (1.1) функция φ и ее первая производная принадлежат классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, и в качестве дополняющих для них функций может быть выбрана одна и та же функция, например

$$g(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}. \tag{1.8}$$

В случае, когда $\varphi(y)=\exp(\sigma y)$, $\sigma\neq 0$, который охватывается условиями (1.2) при $Y_0 =$ $=\pm\infty$, асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (1.1) может быть описано при некоторых (вполне естественных) ограничениях на коэффициент p результатами, установленными в работах [3 – 7].

В случае выполнения условий (1.2) при $Y_0 = 0$, $\Delta_{Y_0} =]0,y_0]$ и в предположении, что $\alpha_0 = 1$ и $p\colon [a,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, $\omega=+\infty$, — дважды непрерывно дифференцируемая правильно меняющаяся функция при $t\to+\infty$, в работе [1] были установлены асимптотические представления для решений дифференциального уравнения (1.1), стремящихся к нулю при $t\to+\infty$.

Для произвольных из возможных значений $\alpha_0\in\{-1;1\}$, $\omega\le+\infty$, $Y_0\in\{0;\pm\infty\}$ и при выполнении условий (1.2) в работе [8] получены условия существования и асимптотические представления при $t\uparrow\omega$ одного класса решений уравнения (1.1), который определялся через нелинейность φ. В отличие от [8] более естественным представляется исследование асимптотических свойств класса решений уравнения (1.1), который изучался ранее (см., например, работу [9]) в случае правильно меняющейся при $y\to Y_0$ функции φ.

Определение 1.3. *Решение дифференциального уравнения* (1.1) *называется* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решением, где* $-\infty\le\lambda_0\le+\infty$, *если оно определено на промежутке* $[t_0,\omega[\,\subset[a,\omega[$ *и удовлетворяет условиям*

$$y(t)\in\Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = [0;\pm\infty],$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (1.1) в особом случае, когда $\lambda_0=\pm\infty$, а также асимптотических при $t\uparrow\omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка.

Из леммы 2.1 работы [9] следует утверждение об априорных асимптотических свойствах таких решений.

Лемма 1.3. *Для каждого $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решения $y\colon [t_0, \omega[\,\longrightarrow \mathbb{R}$ дифференциального уравнения* (1.1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = 0, \tag{1.9}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{1.10}$$

2. Основные результаты. Введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения, положив

$$\mu_0 = \operatorname{sign} \varphi'(y), \qquad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \qquad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0]. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), заметим, что числа ν_0, ν_1 и α_0 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \qquad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty,$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \qquad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty,$$

являются необходимыми для существования таких решений. Отсюда с учетом того, что при $\lambda_0 = \pm\infty$ согласно лемме 1.3 выполняется неравенство

$$\nu_0\nu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{2.1}$$

следует, что условия

$$Y_0 = 0, \quad \text{если} \quad \omega < +\infty, \qquad Y_0 = \pm\infty, \quad \text{если} \quad \omega = +\infty, \tag{2.2}$$

наряду с (2.1) являются необходимыми для существования $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений дифференциального уравнения (1.1).

Кроме того, справедливо следующее утверждение о необходимых условиях существования $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений дифференциального уравнения (1.1).

Теорема 2.1. *Каждое $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение дифференциального уравнения* (1.1) *представимо в виде*

$$y(t) = \pi_\omega(t) L(t), \tag{2.3}$$

где $L\colon [t_0, \omega[\,\longrightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\nu_0 L(t)\pi_\omega(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \quad t_1 \in [t_0, \omega[, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) L(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) L'(t)}{L(t)} = 0. \tag{2.5}$$

При этом в случае существования конечного или равного $\pm\infty$ *предела* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}$, *кроме того, выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}=-1,\quad \alpha_0L'(t)>0\quad \text{\textit{при}}\quad t\in[t_1,\omega[\tag{2.6}$$

и имеет место асимптотическое соотношение

$$p(t)\sim\frac{\alpha_0L'(t)}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\quad \text{\textit{при}}\quad t\uparrow\omega. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда данное решение и его производные первого и второго порядков сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1,\omega[\,\subset[t_0,\omega[$. Кроме того, для этого решения согласно лемме 1.3 выполняется первое из условий (1.9). В силу этого условия y является (см. [10, с. 15]) нормализованной правильно меняющейся функцией порядка 1 при $t\uparrow\omega$ и поэтому представима в виде (2.3), где $L\colon [t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ — медленно меняющаяся при $t\uparrow\omega$ функция, удовлетворяющая первому из неравенств (2.4) и последнему из условий (2.5).

Так как имеет место представление (2.3) и согласно последнему из условий (2.5)

$$y'(t)=L(t)+\pi_\omega(t)L'(t)=L(t)\left[1+\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right]\sim L(t)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

то в силу определения $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-решения выполняются первое и второе из условий (2.4).

Установим справедливость второго из условий (2.4). Поскольку y является решением дифференциального уравнения (1.1), то

$$2L'(t)+\pi_\omega(t)L''(t)=\alpha_0p(t)\varphi(\pi_\omega(t)L(t))\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[. \tag{2.8}$$

Рассматривая это тождество как линейное неоднородное уравнение относительно L', получаем

$$L'(t)=\frac{1}{\pi_\omega^2(t)}\left[C+\alpha_0\int\limits_A^t\pi_\omega(\tau)p(\tau)\varphi(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau\right],$$

где C — некоторая вещественная постоянная и

$$A=\begin{cases} t_0, & \text{если}\quad \displaystyle\int_{t_0}^{\omega}|\pi_\omega(\tau)|p(\tau)\varphi(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau=+\infty,\\ \omega, & \text{если}\quad \displaystyle\int_{t_0}^{\omega}|\pi_\omega(\tau)|p(\tau)\varphi(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau<+\infty.\end{cases}$$

Из этого представления следует, что в случае $A=t_0$

$$L'(t)\sim\frac{\alpha_0}{\pi_\omega^2(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\pi_\omega(\tau)p(\tau)\varphi(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

а в случае $A=\omega$ либо

$$L'(t) = \frac{1}{\pi_\omega^2(t)}\,[C + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \text{где} \quad C \neq 0,$$

либо

$$L'(t) = \frac{\alpha_0}{\pi_\omega^2(t)} \int\limits_\omega^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) \varphi(\pi_\omega(\tau) L(\tau))\, d\tau.$$

Из каждого из этих возможных представлений ясно, что $L'(t)$ отлична от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[$, где $t_1 \in [t_0, \omega[$, т. е. выполняется второе из условий (2.4).

Допустим теперь, что для функции L существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) L''(t)}{L'(t)}$. Тогда, используя правило Лопиталя в форме Штольца, с учетом второго из условий (2.4), первого и третьего из условий (2.5) находим

$$0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) L''(t)}{L'(t)}.$$

Отсюда непосредственно следует первое из условий (2.6). Учитывая это условие, из (2.8) имеем

$$\alpha_0 p(t) \varphi(\pi_\omega(t) L(t)) = L' \left[2 + \frac{\pi_\omega(t) L''(t)}{L'(t)} \right] \sim L'(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда следует справедливость асимптотического соотношения (2.7) и второго из условий (2.6).

Теорема доказана.

Ниже будем говорить, что выполняются условия $\mathcal{N}$, если выполнены условия (2.1), (2.2) и для некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функции $L\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in [a, \omega[$, удовлетворяющей условиям (2.4) – (2.6), имеет место представление

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)[1 + r(t)]}{\varphi(\pi_\omega(t) L(t))}, \tag{2.9}$$

где $r\colon [t_0, \omega[\colon \longrightarrow \,]-1, +\infty[$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $t \uparrow \omega$ (т. е. справедливо соотношение (2.7)).

В силу теоремы 2.1 и изложенного перед ее формулировкой, условия $\mathcal{N}$ в случае существования конечного или равного $\pm\infty$ предела $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) L''(t)}{L'(t)}$ являются необходимыми для существования $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений дифференциального уравнения (1.1).

Далее, предполагая выполненными условия $\mathcal{N}$, выясним вопрос о фактическом существовании $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений дифференциального уравнения (1.1) и получим асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных первого порядка. При этом наряду с введенными ранее будем использовать следующие обозначения:

$$H(t) = \frac{L^2(t) \varphi'(\pi_\omega(t) L(t))}{L'(t) \varphi(\pi_\omega(t) L(t))}, \quad q_1(t) = \left. \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \right|_{y = \pi_\omega(t) L(t)}, \quad q_2(t) = \left. \frac{y \left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)} \right|_{y = \pi_\omega(t) L(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t) L'(t)}{L(t)}, \qquad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t) L''(t)}{L'(t)}$$

и дополнительно предполагать, что существуют конечные или равные $\pm\infty$ пределы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{L(t)}{L'(t)}\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}},\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\,|H(t)|^{1/2}=\gamma_0. \tag{2.10}$$

В силу (2.5) и (2.6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}e_i(t)=1,\quad i=1,2. \tag{2.11}$$

Если же учесть, что

$$H(t)=\frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)}\frac{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))},\quad \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}=\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}+1,$$

то согласно условиям (2.5), (1.2) и (1.4) будем иметь

$$\lim_{t\uparrow\omega}H(t)=\pm\infty,\qquad \lim_{t\uparrow\omega}q_1(t)=0. \tag{2.12}$$

Наконец, покажем, что при указанных предположениях первый из пределов (2.10) равен нулю. Допустим противное. Тогда

$$\frac{L(t)}{L'(t)}\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}}=b(t),\qquad \text{где}\quad \lim_{t\uparrow\omega}b(t)=\left[\begin{array}{l}\mathrm{const}\neq 0,\\ \pm\infty.\end{array}\right. \tag{2.13}$$

Разделив это соотношение на $\dfrac{L(t)}{L'(t)}$ и затем проинтегрировав полученное соотношение от t_0 до t, получим

$$-2|H(t)|^{-1/2}\mathrm{sign}\,H(t)=C+\int_{t_0}^{t}\frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}, \tag{2.14}$$

где C — некоторая вещественная постоянная. Здесь

$$\int_{t_0}^{t}\frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}=\ln|L(t)|\,\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}}{\ln|L(t)|}$$

и согласно первому из условий (2.5) и правилу Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{t\uparrow\omega}\ln|L(t)|=\pm\infty,\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}}{\ln|L(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}b(t).$$

Поэтому из (2.14) с учетом второго из условий (2.13) имеем

$$-2|H(t)|^{-1/2}\mathrm{sign}\,H(t)\;\longrightarrow\;\pm\infty\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Однако это невозможно, так как выражение, стоящее слева, в силу первого из условий (2.12) стремится к нулю при $t \uparrow \omega$. Тем самым получено противоречие. Значит,

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}} = 0. \tag{2.15}$$

Поэтому при указанных выше предположениях следует считать, что выполнено условие (2.15).

При $0 < |\gamma_0| \leq +\infty$ справедливы два следующих утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* $\mathcal{N}$, (2.15) *и* $\gamma_0 = \pm\infty$. *Тогда:* 1) *если* $\alpha_0\mu_0 > 0$, *то дифференциальное уравнение* (1.1) *имеет однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-*решений, допускающих при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))} o(1), \tag{2.16}$$

$$y'(t) = \big[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big] \Big[1 + |H(t)|^{-1/2} o(1)\Big]; \tag{2.17}$$

2) *если* $\alpha_0\mu_0 < 0$ *и выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} [r(t) + 1 - e_2(t)] \left(\int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{L(\tau)} \right)^2 = 0, \tag{2.18}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} |H(t)|^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H'(t)}{H(t)} - 1 \right) \int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{L(\tau)} = 0, \tag{2.19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \left(\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{1/2} \right)^{-1} \left(\frac{e_2(t) - e_1(t)}{e_2(t)} \frac{L'(t)}{L''(t)} \frac{H'(t)}{H(t)} + 1 \right) \int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{L(\tau)} = 0, \tag{2.20}$$

то дифференциальное уравнение (1.1) *имеет по крайней мере одно* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-*решение, допускающее при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{L(\tau)} \right)^{-1} o(1), \tag{2.21}$$

$$y'(t) = \big[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big] \left[1 + |H(t)|^{-1/2} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{L(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right]. \tag{2.22}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* $\mathcal{N}$, (2.15) *и* $0 < |\gamma_0| < +\infty$. *Тогда*: 1) *если* $\alpha_0\mu_0 > 0$, *то дифференциальное уравнение* (1.1) *имеет однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-*решений, допускающих при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (2.16), (2.17); 2) *если* $\alpha_0\mu_0 < 0$, *то при* $\alpha_0\nu_1\gamma_0 < 0$ *дифференциальное уравнение* (1.1) *имеет двупараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-*решений, допускающих при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (2.16), (2.17), *а при* $\alpha_0\nu_1\gamma_0 > 0$ *уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере одно такое решение.*

***Доказательство теорем* 2.2 *и* 2.3.** Уравнение (1.1) с помощью замен

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\, y_1(t), \\
y'(t) &= \big[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big][1 + y_2(t)]
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

сведем с учетом введенных обозначений к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \frac{L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\,[q_1(t)y_1 + y_2], \\
y_2' &= \frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)e_1(t)}\left[\frac{\alpha_0 p(t)\varphi\left(Y(t, y_1)\right)}{L'(t)e_2(t)} - (1 + y_2)\right],
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

где

$$
Y(t, y_1) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))} y_1.
$$

Здесь в силу представления (2.9)

$$
\frac{\alpha_0 p(t)\varphi\left(Y(t, y_1)\right)}{L'(t)e_2(t)} = \frac{[1 + r(t)]\varphi(Y(t, y_1))}{e_2(t)\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}.
$$

Разлагая при фиксированном $t \in [t_1, \omega[$ функцию, стоящую справа, по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа до членов второго порядка, получаем

$$
\frac{[1 + r(t)]\varphi(Y(t, y_1))}{e_2(t)\varphi(\pi_\omega(t)L(t))} = \frac{1 + r(t)}{e_2(t)}(1 + y_1) + R(t, y_1),
\tag{2.25}
$$

где

$$
R(t, y_1) = \frac{1 + r(t)}{2e_2(t)}\, \frac{\varphi''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \dfrac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\, y_1^2, \quad |\xi| < |y_1|.
$$

Поскольку

$$
Y(t, \xi) = \pi_\omega(t)L(t)\left[1 + \frac{1}{\dfrac{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}}\,\xi\right],
$$

то в силу второго из условий (2.5), третьего из условий (1.2) и второго из условий (1.4)

$$
\varphi''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\,\xi\right) = \frac{\varphi'^2\left(\pi_\omega(t)L(t) + \dfrac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)}{\varphi\left(\pi_\omega(t)L(t) + \dfrac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)}\,\big[1 + d_1(t, y_1)\big],
$$

где

$$
\lim_{t\uparrow\omega} d_1(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].
$$

Согласно лемме 1.2 функции φ, φ' принадлежат $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Поэтому в силу второго из условий (2.5) и предельного соотношения (1.6) последнее асимптотическое соотношение может быть записано в виде

$$\varphi''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\,\xi\right) = \frac{\varphi'^2(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\,e^{\xi}\big[1 + d_2(t, y_1)\big],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} d_2(t, y_1) = 0 \quad \text{для любого} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Отсюда следует, что

$$R(t, y_1) = \frac{1 + r(t)}{2e_2(t)}\,e^{\xi}[1 + d_2(t, y_1)]y_1^2, \quad |\xi| < |y_1|.$$

В силу этого представления и условий $\lim\limits_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} e_2(t) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_1 \in [t_0, \omega[$ и $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ такие, что

$$|R(t, y_1)| \le \frac{1}{2}\,(1 + \varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \quad |y_1| \le \delta. \tag{2.26}$$

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon > 0$, будем далее рассматривать систему уравнений (2.24) на множестве

$$\Omega = [t_1, \omega[\times D, \quad \text{где} \quad D = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\ |y_1| \le \delta,\ |y_2| < 1\right\}.$$

В силу (2.25) система (2.24) на этом множестве имеет вид

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\,\big[q_1(t)y_1 + y_2\big], \\ y_2' &= \frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)e_1(t)}\left[\frac{1 + r(t) - e_2(t)}{e_2(t)} + \frac{1 + r(t)}{e_2(t)}\,y_1 - y_2 + R(t, y_1)\right], \end{aligned} \tag{2.27}$$

где функция R удовлетворяет оценке (2.26).

Чтобы асимптотически „уравнять” коэффициенты при неизвестных функциях в уравнениях системы, применим к (2.27) дополнительное преобразование

$$y_1(t) = v_1(t), \qquad y_2(t) = |H(t)|^{-1/2}v_2(t). \tag{2.28}$$

В результате получим с учетом вида функции H и знаков функций L', φ' систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= h(t)\big[c_{11}(t)v_1 + c_{12}(t)v_2\big], \\ v_2' &= h(t)\left[f(t) + c_{21}(t)v_1 + c_{22}(t)v_2 + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}\,R(t, v_1)\right], \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$h(t) = \frac{L'(t)e_1(t)}{L(t)}|H(t)|^{1/2}, \qquad f(t) = \frac{1 + r(t) - e_2(t)}{e_1^2},$$

$$c_{11}(t) = \alpha_0\mu_0 q_1(t)|H(t)|^{1/2}, \qquad c_{12}(t) \equiv \alpha_0\mu_0, \qquad c_{21}(t) = \frac{1 + r(t)}{e_1^2(t)},$$

$$c_{22}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{e_1(t)}\,\frac{L(t)}{L'(t)}\,\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}}\operatorname{sign} H(t) - \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}\,|H(t)|^{-1/2}.$$

Для установления существования решений дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (2.16), (2.17) в силу замен (2.23) и (2.28) достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (2.29) имеет решения, стремящиеся к нулю при $t \uparrow \omega$. Доказательство этого факта проведем с использованием известных результатов о существовании исчезающих в особой точке решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений, полученных в работах [11, 12].

В силу первых из условий (2.4), (2.5), (2.12), а также (2.11)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \int\limits_{t_1}^{t} h(\tau)\,d\tau = \pm\infty. \tag{2.30}$$

Кроме того, согласно условиям (2.11), (2.12), (2.15) и (2.26) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{12}(t) = \alpha_0\mu_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{21}(t) = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{22}(t) = 0$$

и

$$\lim_{v_1\to 0} \frac{\dfrac{e_2(t)}{e_1^2(t)}R(t, v_1)}{v_1} = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Осталось лишь выяснить асимптотические при $t \uparrow \omega$ свойства коэффициента c_{11}.

Поскольку

$$H'(t) = \left(\frac{L^2(t)}{L'(t)}\right)' \frac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))} + \frac{L^2(t)}{L'(t)}\,\big(L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big)\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

то

$$\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)} = \frac{H'(t)}{\dfrac{L^2(t)}{L'(t)}\,\big(L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big)} - \frac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\,\frac{\left(\dfrac{L^2(t)}{L'(t)}\right)'}{\dfrac{L^2(t)}{L'(t)}\,\big(L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big)}.$$

Используя это соотношение, находим

$$q_1(t)|H(t)|^{1/2} = \frac{H'(t)|H(t)|^{1/2}}{\dfrac{L^3(t)}{L'(t)}\,e_1(t)\left(\dfrac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\right)^2} - \frac{\left(\dfrac{L^2(t)}{L'(t)}\right)'|H(t)|^{1/2}}{\dfrac{L^3(t)}{L'(t)}\,e_1(t)\,\dfrac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}} =$$

$$= \frac{L(t)}{L'(t)e_1(t)}\,\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}} - \frac{2 - \dfrac{L(t)L''(t)}{L'^2(t)}}{e_1(t)|H(t)|^{1/2}\mathrm{sign}\,H(t)}.$$

Здесь в силу последнего из условий (2.5) и первого из (2.6)

$$\frac{L(t)L''(t)}{L'^2(t)} = \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}\,\frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому

$$q_1(t)|H(t)|^{1/2} = \frac{L(t)}{L'(t)e_1(t)}\,\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}} - \frac{1 + o(1)}{\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\,e_1(t)|H(t)|^{1/2}\mathrm{sign}\,H(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.31}$$

При этом также заметим, что

$$e_1(t)q_1(t)|H(t)|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,H(t) = \frac{e_2(t) - e_1(t)}{e_2(t)}\,\frac{L(t)}{L'(t)}\,\frac{H'(t)}{|H(t)|^{3/2}}\,\mathrm{sign}\,H(t) +$$
$$+ \frac{\dfrac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}}{\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\,|H(t)|^{1/2}} + \frac{2e_1^2(t)}{e_2(t)}\,c_{22}(t). \tag{2.32}$$

В (2.31) первое слагаемое, стоящее справа, в силу (2.15) стремится к нулю при $t \uparrow \omega$, а второе имеет при $t \uparrow \omega$ предел, равный нулю в случае $\gamma_0 = \pm\infty$ и $-\dfrac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0}$ в случае, когда $0 < |\gamma_0| < +\infty$. Поэтому рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Предположим сначала, что $\gamma_0 = \pm\infty$. В этом случае $\lim\limits_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = 0$ и предельная матрица коэффициентов, стоящих при v_1 и v_2 в квадратных скобках уравнений системы (2.29), имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0\mu_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическим уравнением этой матрицы является алгебраическое уравнение

$$\rho^2 - \alpha_0\mu_0 = 0. \tag{2.33}$$

Если $\alpha_0\mu_0 > 0$, то данное уравнение имеет корни $\rho_{1,2} = \pm 1$, и тогда на основании теоремы 2.2 из работы [11] система дифференциальных уравнений (2.29) имеет однопараметрическое семейство решений $(v_1, v_2)\colon [t_*, \omega[\, \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t_* \in [t_1, \omega[$, стремящихся к нулю при $t \uparrow \omega$. Каждому такому решению в силу замен (2.23), (2.28) соответствует решение $y\colon [t_*, \omega[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_* \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17), причем с использованием этих представлений и условий (2.4), (2.5), (2.9), $\varphi \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ нетрудно также убедиться в том, что любое из них является $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решением дифференциального уравнения (1.1). Значит, справедливо первое утверждение теоремы 2.2.

Если $\alpha_0\mu_0 < 0$, то характеристическое уравнение (2.33) имеет чисто мнимые корни $\rho_{1,2} = \pm i$ (критический случай). В этом случае в системе (2.29) выполним замену независимой переменной, положив

$$x = \int_{t_0}^{t} |h(\tau)|\, d\tau, \qquad v_i(t) = w_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{2.34}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w_1' &= C_{11}(x)w_1 + C_{12}(x)w_2, \\ w_2' &= F(x) + C_{21}(x)w_1 + C_{22}(x)w_2 + W(x, w_1), \end{aligned} \tag{2.35}$$

в которой

$$C_{11}(x(t)) = \beta c_{11}(t), \qquad C_{12}(x) = \beta\alpha_0\mu_0, \qquad F(x(t)) = \beta f(t),$$

$$C_{21}(x(t)) = \beta c_{21}(t), \qquad C_{22}(x(t)) = \beta c_{22}(t), \qquad W(x(t), w_1) = \frac{\beta e_2(t)}{e_1^2(t)}\, R(t, w_1),$$

где $\beta = \operatorname{sign}[L(t)L'(t)]$.

В силу (2.11) и (2.30)

$$x'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[\qquad \text{и} \qquad x(t) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где t_2 — некоторое число из промежутка $[t_1, \omega[$. Поэтому в силу выполнения в данном случае условий (2.18) – (2.20) с учетом (2.33) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} xC_{ii}(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x[C_{21}(x) - 1] = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x[C_{12}(x) - \alpha_0\mu_0] = 0.$$

Кроме того, согласно неравенству (2.26) справедлива оценка

$$x^2 \left| W\left(x, \frac{w_1}{x}\right) \right| < \frac{e_2(t(x))}{2e_1^2(t(x))}\,(1+\varepsilon)w_1^2 \quad \text{при} \quad x \in [x_2, +\infty[\quad \text{и} \quad \left|\frac{w_1}{x_2}\right| \le \delta, \quad x_2 = x(t_2),$$

откуда с учетом (2.11) следует, что

$$\lim_{w_1\to 0} \frac{x^2 W\left(x, \dfrac{w_1}{x}\right)}{w_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_2, +\infty[.$$

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (2.35) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [12]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.35) имеет по крайней мере одно решение $(w_1, w_2) : [x_*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x_* \in [x_2, +\infty[$, удовлетворяющее асимптотическим соотношениям

$$w_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Этому решению системы (2.35) в силу замен (2.23), (2.28) и (2.34) соответствует решение $y : [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_* \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.21), (2.22) и являющееся $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решением уравнения (1.1). Следовательно, справедливо второе утверждение теоремы 2.2.

Теперь рассмотрим случай, когда $0 < |\gamma_0| < +\infty$. В этом случае из (2.31) с учетом (2.15) следует, что
$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = -\frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0}.$$
Поэтому характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов при v_1 и v_2, стоящих в квадратных скобках системы (2.29), имеет, в отличие от (2.33), следующий вид:
$$\rho^2 + \frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0}\,\rho - \alpha_0\mu_0 = 0.$$
Это уравнение при $\alpha_0\mu_0 > 0$ (т. е. когда $\alpha_0\mu_0 = 1$) имеет два вещественных корня различных знаков, а при $\alpha_0\mu_0 < 0$ (т. е. когда $\alpha_0\mu_0 = -1$) — либо два вещественных корня такого же знака, как у γ_0, либо два комплексных корня с вещественной частью такого же знака, как у γ_0. Кроме того, согласно условиям (2.4), (2.6) и (2.1)
$$\operatorname{sign} h(t) = \operatorname{sign}\bigl[L(t)L'(t)\bigr] = \alpha_0\nu_0 \operatorname{sign}[\pi_\omega(t)] = \alpha_0\nu_1 \quad \text{при} \quad t\in[t_1,\omega[.$$
В силу вышеизложенного система дифференциальных уравнений (2.29) имеет на основании теоремы 2.2 из работы [11] по крайней мере одно решение $(v_1,v_2)\colon [t_*,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t_*\in[t_1,\omega[$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если $\alpha_0\mu_0 > 0$, и двупараметрическое семейство, если $\alpha_0\mu_0 < 0$ и $\alpha_0\nu_1\gamma_0 < 0$. Каждому такому решению в силу замен (2.23), (2.28) соответствует решение $y\colon [t_*,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$, $t_*\in[a,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17) и являющееся $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-решением уравнения (1.1). Тем самым установлена справедливость всех утверждений теоремы 2.3.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\gamma_0 = 0$. В этом случае из (2.31) с учетом условия (2.15) следует, что
$$\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\,q_1(t)H(t) = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$
Поэтому в силу вида функций H, q_1 и q_2
$$\lim_{t\uparrow\omega} q_2(t) = -1. \tag{2.36}$$
Следует отметить, что в силу первого из условий (2.4) и второго из (2.5) это предельное соотношение может иметь место лишь тогда, когда
$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} = -1,$$
т. е. когда функция $\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$ является правильно меняющейся функцией порядка -1 при $y\to$ $\to Y_0$. Кроме того, здесь функция, стоящая под знаком предела, не может быть тождественно равной -1, так как в противном случае, разделив данное тождество на y и проинтегрировав на промежутке от y_0 до y, получим
$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{c}{y},$$

где c — отличная от нуля вещественная постоянная, что невозможно в силу выполнения условия (1.4).

В силу вышеизложенного случай $\gamma_0 = 0$ является в некотором смысле критическим при изучении $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений дифференциального уравнения (1.1). Его будем далее исследовать при предположении, что существует конечный или равный $\pm\infty$ предел

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1+q_2(t)}{\left(\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)} = \gamma_1. \tag{2.37}$$

При этом заметим, что здесь отношение функций, стоящее под знаком предела, не может иметь знак, противоположный знаку числа $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1$.

В самом деле, если

$$\frac{1+q_2(t)}{\left(\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)} = \gamma(t) \qquad \text{и} \qquad \alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1\gamma(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[,$$

где t_1 — некоторое число из промежутка $[t_0, \omega[$, то имеет место соотношение

$$q_2(t) = -1 + \left(\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)\gamma(t),$$

из которого с учетом вида функций q_2 и H следует, что

$$\frac{L(t)e_1(t)\left(\dfrac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\right)'}{\dfrac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}} = -\frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)} + \pi_\omega(t)L'(t)e_1(t)\,\frac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\,\gamma(t). \tag{2.38}$$

В силу знаков функций φ, φ', L', γ и (2.1) второе слагаемое, стоящее в (2.38) справа, является отрицательным при $t \in [t_1, \omega[$. Поэтому после интегрирования (2.38) от t_1 до t, получим, что

$$\left|\frac{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\right| = \frac{e^c}{|\pi_\omega(t)L(t)|}\,\exp\left(-\int_{t_1}^{t}\left|\frac{\pi_\omega(\tau)L'(\tau)e_1(\tau)\varphi'(\pi_\omega(\tau)L(\tau))}{\varphi(\pi_\omega(\tau)L(\tau))}\,\gamma(\tau)\right|d\tau\right) \le$$

$$\le \frac{e^c}{|\pi_\omega(t)L(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[,$$

где c — некоторая вещественная постоянная. Следовательно, выполняется неравенство

$$\left|\frac{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}\right| \le e^c \quad \text{при} \quad t \in]t_1, \omega[,$$

что невозможно, так как здесь в силу второго из условий (2.5) и (1.4) левая часть стремится к $+\infty$ при $t \uparrow \omega$. Значит, в случае, когда функция γ отлична от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[$, на этом промежутке должно выполняться неравенство $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1\gamma(t) > 0$. Отсюда, в частности, следует, что при $0 < |\gamma_1| \le +\infty$ необходимо рассматривать лишь случай, когда знак γ_1 совпадает со знаком числа $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1$.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия* $\mathcal{N}$, (2.15), $\gamma_0 = 0$ *и существует отличный от* -1 *конечный или равный* $\pm\infty$ *предел* (2.37). *Тогда дифференциальное уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере одно* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-решение, допускающее при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}o(1), \tag{2.39}$$

$$y'(t) = \big[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)\big] + \left[1 + \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}o(1)\right]. \tag{2.40}$$

Более того, если $\omega < +\infty$, *то при выполнении одного из условий*

$$\text{либо} \quad -1 < \gamma_1 < 0, \quad \text{либо} \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_0\mu_0 > 0$$

дифференциальное уравнение (1.1) *имеет однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-решений с асимптотическими представлениями* (2.39), (2.40), *а если* $\omega = +\infty$, *то таких решений существует двупараметрическое семейство в случаях, когда*

$$\text{либо} \quad -1 < \gamma_1 < 0, \quad \text{либо} \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_0\mu_0 < 0,$$

и однопараметрическое семейство в случаях, когда

$$\text{либо} \quad -\infty \le \gamma_1 < -1, \quad \text{либо} \quad 0 < \gamma_1 \le +\infty.$$

Доказательство. Сначала точно так же, как при доказательстве теорем 2.2, 2.3, дифференциальное уравнение (1.1) с помощью замен (2.23) сведем к системе дифференциальных уравнений (2.27). При этом таким же образом, как в доказательстве теорем, выбираем числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$. Далее, применяя к (2.27) преобразование

$$y_1(t) = w_1(t), \qquad y_2(t) = \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}\, w_2(t), \tag{2.41}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &w_1' = h_1(t)\big[c_{11}(t)w_1 + c_{12}(t)w_2\big], \\ &w_2'(t) = h_2(t)\big[f(t) + c_{21}(t)w_1 + c_{22}(t)w_2 + R(t, w_1)\big], \end{aligned} \tag{2.42}$$

где

$$h_1(t) = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)}, \qquad h_2(t) = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))e_2(t)}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)}, \qquad f(t) = \frac{1 + r(t) - e_2(t)}{e_2(t)},$$

$$c_{11}(t) = q_2(t), \qquad c_{12}(t) \equiv 1, \qquad c_{21}(t) = \frac{1 + r(t)}{e_2(t)},$$

$$c_{22}(t) = \frac{e_1^2(t)[1 + q_2(t)]}{e_2(t)\left(\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)} - \frac{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))}{\pi_\omega(t)L(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))}.$$

В этой системе в силу условий $\mathcal{N}$, (1.4), (2.36), (2.37) и $\gamma_0 = 0$

$$h_1(t)h_2(t) \neq 0, \qquad t \in [t_1, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_2(t)}{h_1(t)} = 0, \qquad \int\limits_{t_1}^{t} h_2(\tau)\, d\tau = \pm\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = -1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{12}(t) = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{21}(t) = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{22}(t) = \gamma_1$$

и функция R такова, что справедлива оценка (2.26).

Если $\gamma_1 = \pm\infty$, то, вынося во втором уравнении системы (2.42) первое слагаемое в функции c_{22} за квадратную скобку, получаем почти треугольную систему уравнений, для которой выполнены все условия теоремы 2.1 из работы [11]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.42) имеет по крайней мере одно решение $(w_1, w_2)\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t_* \in [t_1, \omega[$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем таких решений существует m-параметрическое семейство $(m \in \{1; 2\})$, если среди функций

$$-h_1(t) = -\frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)},$$
$$h_2(t) \frac{1 + q_2(t)}{\left(\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)} = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi'(\pi_\omega(t)L(t))e_2(t)}{\varphi(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)} \, \frac{1 + q_2(t)}{\left(\dfrac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right)^2 H(t)} \tag{2.43}$$

имеется m отрицательных функций в некоторой левой окрестности ω. Каждому такому решению системы (2.42) соответствует в силу замен (2.23) и (2.41) решение $y\colon [t_*, \omega[\ \longrightarrow \mathbb{R}]]$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.39), (2.40). Также заметим, что знак γ_1, как было установлено перед формулировкой теоремы 2.4, совпадает со знаком числа $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1$, и при этом в силу (2.1) $\nu_0\nu_1 = \operatorname{sign} \pi_\omega(t)$. Поэтому вторая функция в (2.43) является положительной в левой окрестности ω. Первая же из них будет отрицательной лишь при $\omega = +\infty$. Значит, в силу теоремы 2.1 из [11] при $\omega = +\infty$ уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство решений с асимптотическими представлениями (2.39), (2.40).

Пусть теперь $0 \leq |\gamma_1| < +\infty$ и при этом $\gamma_1 \neq -1$. В этом случае в системе (2.42) предельная матрица коэффициентов $c_{ij}(t),\ i, j = 1, 2$, имеет вид

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\gamma_1 \neq -1$, то определитель этой матрицы отличен от нуля и сумма элементов второй строки матрицы не равна нулю. Кроме того, сумма элементов первой строки данной матрицы равна нулю. В силу этих и указанных выше условий на функции $h_1,\ h_2,\ f$ и R в данном случае для системы дифференциальных уравнений (2.42) выполнены все условия теоремы 2.7 из работы [11]. На основании этой теоремы система (2.42) имеет хотя бы одно решение $(w_1, w_2)\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t_* \in [t_1, \omega[$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем таких решений в случае выполнения неравенства $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1(1 + \gamma_1) < 0$ существует однопараметрическое семейство при $\omega < +\infty$, двупараметрическое при $\omega = +\infty$, а в случае выполнения неравенства $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1(1 + \gamma_1) > 0$ — однопараметрическое семейство таких решений при $\omega = +\infty$. В силу замен (2.23) и (2.41) каждому такому решению системы дифференциальных уравнений (2.42) соответствует решение $y\colon \big[t_*, \omega[\ \longrightarrow \mathbb{R}]\big]$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.39), (2.40). Заметим, что при $\gamma_1 \neq 0$ имеет место равенство

$$\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1(1+\gamma_1) = \frac{(1+\gamma_1)\gamma_1}{|\gamma_1|},$$

справедливость которого следует из установленного перед формулировкой теоремы 2.4 неравенства $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1\gamma_1 > 0$. Учитывая этот факт и указанное выше заключение о количестве исчезающих в ω решений системы (2.42), приходим к выводу, что справедливо утверждение теоремы.

***Замечание* 2.1.** Случаи $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_1 = -1$ требует дальнейшего исследования.

Литература

1. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – **1726**. – 128 p.
2. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation // Encyclopedia Math. and Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 494 p.
3. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1980. – **130**, № 1. – С. 29 – 32.
4. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georg. Math. J. – 1996. – **3**, № 2. – P. 101 – 120.
5. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* О решениях со степенной асимптотикой дифференциальных уравнений с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 3. – С. 306 – 325.
6. *Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 562 – 573.
7. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 3. – С. 308 – 322.
8. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 9. – С. 1311 – 1323.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
10. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
11. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.
12. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 441 – 452.

Получено 29.11.18