УДК 517.5

О. В. Моторна (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. П. Моторний (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ У СЕРЕДНЬОМУ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНИХ

We consider some properties of functions integrable on a segment. Some estimates for the approximations of function and its derivatives are obtained.

Розглянуто деякі властивості інтегровних на сегменті функцій. Отримано оцінки для наближень функції та її похідних.

Позначимо через $L^p_{[a;b]}$, $p \geq 1$, простір функцій f, що задані і вимірні на сегменті $[a;b]$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L^p_{[a;b]}} = \left\{ \int\limits_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Нехай $\omega(f;t)_p$ — інтегральний модуль неперервності функції $f \in L^p_{[a;b]}$.

Для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ позначимо через H_p^ω клас функцій $f \in L^p_{[-1;1]}$, для яких при всіх $t \in (0,1)$ виконується нерівність $\omega(f;t)_p \leq \omega(t)$. Через $W^r H_p^\omega$ $(1 \leq p < \infty$, r — натуральне число) позначимо клас функцій f, що мають на сегменті $[-1;1]$ абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ таку, що $f^{(r)}$ належить H_p^ω. У випадку, коли $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, клас $W^r H_p^\omega$ будемо позначати через $H_p^{r+\alpha}$.

Покладемо $g(x,n) = \sqrt{1-x^2} + 1/n$, $x \in [-1;1]$, n — натуральне число.

У 1962 р. Р. М. Тригуб [1] довів таку теорему.

Теорема А. *Якщо функція f має на $[-1;1]$ r неперервних похідних і $\omega(t) = \omega(f^{(r)};t)$ — модуль неперервності похідної $f^{(r)}$, то для кожного n існує такий алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вищого за n, що для всіх $x \in [-1;1]$ і всіх $k = 0,1,\ldots,r$ справедливою є оцінка*

$$\left| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) \right| \leq C_r \left(g(x,n)/n \right)^{r-k} \omega\left(g(x,n)/n \right),$$

де C_r залежить від r.

Тут і далі через C_r будемо позначати додатні величини, що залежать від r, взагалі кажучи, різні в різних місцях, а через C — різні абсолютні додатні сталі.

С. О. Теляковський [2] доповнив теорему А, довівши таку теорему.

Теорема В. *Нехай функція f має на $[-1;1]$ r неперервних похідних і $\omega(t) = \omega(f^{(r)};t)$ — модуль неперервності $f^{(r)}$. Якщо для алгебраїчного многочлена $P_n(x)$ степеня не вищого за n виконується нерівність*

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \leq C \left(g(x,n)/n \right)^{r} \omega\left(g(x,n)/n \right),$$

де C — деяка стала, то для всіх $k = 0,1,\ldots,r$ має місце оцінка

$$\left| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) \right| \leq C_r \left(g(x,n)/n \right)^{r-k} \omega\left(g(x,n)/n \right),$$

де C_r — деяка додатна величина.

Задачу про сумісне наближення функції й її похідних алгебраїчними многочленами у просторі $L^p_{[-1;1]}$, $p \geq 1$, розв'язано в роботі [3] для класів Лебедя – Потапова і в роботі [4] для класів $H_p^{r+\alpha}$. Класи Потапова введено в роботах [5, 6]. У даній роботі задачу про сумісне наближення функції і її похідних алгебраїчними многочленами у просторі $L^p_{[-1;1]}$, $p \geq 1$, розглянуто для класів $W^r H_p^\omega$. Основний результат цієї роботи базується на такому твердженні.

Теорема C [7]. *Нехай функція $f(x)$ належить $W^r H_p^\omega$, $1 \leq p < \infty$. Тоді для кожного натурального числа $n \geq r$ знайдеться алгебраїчний многочлен степеня не вищого за n, що задовольняє нерівності*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega(g(x,n)/n) g^r(x,n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^r},$$

де величина C_r залежить лише від r.

У випадку, коли $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, цей результат одержано у [8] (див. також [9]).

***Зауваження* 1.** Відомо [10], що якщо функція $\omega(t)$ є модулем неперервності, то функція

$$\omega^\star(t) = t \inf_{0 \leq x \leq t} \frac{\omega(x)}{x}$$

теж є модулем неперервності, $\dfrac{\omega^\star(t)}{t}$ не зростає і виконуються нерівності

$$\omega^\star(t) \leq \omega(t) \leq 2\omega^\star(t). \tag{1}$$

Завдяки нерівностям (1) модулі неперервності $\omega(t)$ і $\omega^\star(t)$ мають один і той же порядок прямування до нуля. Тому у задачах, у яких необхідно знайти порядок прямування до нуля деякої величини, що залежить від порядку прямування до нуля модуля неперервності $\omega(t)$, можна вважати, що $\dfrac{\omega(t)}{t}$ не зростає. Отже, в теоремі C і далі можна вважати, що $\dfrac{\omega(t)}{t}$ не зростає.

Одним із основних результатів цієї статті є теорема, що узагальнює теорему C.

Теорема 1. *Нехай r — натуральне число, функція $f(x)$ належить $W^r H_p^\omega$, $1 \leq p < \infty$, де $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для кожного натурального числа $n \geq r$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_{r,n}(f;x)$ степеня не вищого за n такий, що для всіх $k = 0, 1, \ldots, r$ виконуються нерівності*

$$\left\| \frac{f^{(k)}(x) - P_{r,n}^{(k)}(f;x)}{\omega(g(x,n)/n) g^{r-k}(x,n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^{r-k}},$$

де величина C_r залежить лише від r.

Теорему 1 сформульовано в роботі [11] і наведено схему її доведення. Щоб довести цю теорему, розглянемо допоміжні твердження.

Лема 1 (див. [12], теорема 4). *Для будь-якого алгебраїчного многочлена $P_n(x)$ степеня не вищого за n виконується нерівність*

$$\left\| \frac{P_n^{(k)}(x)}{g^{r-k}(x,n) \omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq C_r n^k \left\| \frac{P_n(x)}{g^r(x,n) \omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}}, \tag{2}$$

де r — довільне число, $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності.

Лема 2 (див. [12], теорема 3)**.** *Для будь-якого алгебраїчного многочлена $P_n(x)$ степеня не вищого за n і будь-яких p, p', що задовольняють нерівності $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, виконується нерівність*

$$\left\| \frac{P_n(x)}{\delta^{r+1/p'}(x,n)\omega(\delta(x,n)/n)} \right\|_{L^{p'}_{[a;b]}} \leq$$

$$\leq C_r \left(\frac{2n}{b-a} \right)^{1/p-1/p'} \left\| \frac{P_n(x)\delta^{-1/p}(x,n)}{\delta^r(x,n)\omega(\delta(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a;b]}}, \tag{3}$$

де r — довільне число, $\delta(x,n) = \dfrac{2\sqrt{(b-x)(x-a)}}{b-a} + \dfrac{1}{n}$, $x \in (a;b)$, $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності.

Покладемо в (3) $a_n = -1 + 1/n^2$, $b_n = 1 - 1/n^2$, $p' = \infty$ і замість r візьмемо $r-1$. Тоді $\delta(x,n) = \dfrac{\sqrt{(1-1/n^2)^2 - x^2}}{1-1/n^2} + \dfrac{1}{n}$, якщо $|x| \leq 1 - 1/n^2$. Оскільки виконуються нерівності

$$0,4g(x,n) \leq \delta(x,n) \leq g(x,n),$$

якщо $|x| \leq 1 - 1/n^2$, то з нерівності (3) випливає, що

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{1/p} \left\| \frac{P_n(x) g^{1-1/p}(x,n)}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}}. \tag{4}$$

Завдяки нерівностям $g(x,n) \leq 2\sqrt{1-x^2}$, якщо $|x| \leq 1 - 1/n^2$, і $1/g(x,n) < n$, якщо $x \in$ $\in (-1;1)$, маємо

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{2/p} \left\| \frac{P_n(x)\sqrt{1-x^2}}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}}. \tag{5}$$

Позначимо через $M(\omega, r)$ величину

$$\left\| \frac{P_n(x)\sqrt{1-x^2}}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}}.$$

Із (4), (5), якщо $x \in [-1 + 1/n^2; 1 - 1/n^2]$, одержуємо

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{2/p} M(\omega, r). \tag{6}$$

Із леми роботи [12] випливає виконання нерівності (6) для всіх $x \in [-1;1]$.

Лема 3. *Для будь-якого алгебраїчного многочлена $P_n(x)$ степеня не вищого за n виконується нерівність*

$$\left\| \frac{P_n(x) g^{1-r}(x,n)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq C_r \left\| \frac{P_n(x) g^{-r}(x,n)\sqrt{1-x^2}}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}}, \tag{7}$$

де r — довільне число, $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності.

Доведення. Оскільки для $x \in [a_n; b_n]$, де $a_n = \big[-1 + 1/n^2,\ b_n = 1 - 1/n^2\big]$, виконується нерівність $\sqrt{1-x^2} + 1/n \le 2\sqrt{1-x^2}$, то

$$\left\| \frac{P_n(x) g^{1-r}(x,n)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}} \le 2 \left\| \frac{P_n(x)\sqrt{1-x^2}}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}} \le 2M(\omega, r). \tag{8}$$

Щоб оцінити інтеграл, що відповідає сегментам $\big[-1; -1+1/n^2\big],\ \big[1; 1-n^2\big]$, використаємо нерівність (6):

$$\int\limits_{1-1/n^2}^{1} \left| \frac{P_n(x)}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right|^p dt \le$$

$$\le C_r n^2 M^p(\omega, r) \int\limits_{1-1/n^2}^{1} dt = C_r M^p(\omega, r). \tag{9}$$

Аналогічно можна оцінити інтеграл по сегменту $[-1; -1+1/n^2]$. З нерівностей (8), (9) випливає (7).

Лема 4. *Для будь-якого модуля неперервності $\omega(t)$, будь-якого додатного числа r і будь-яких $u, y \in [-\pi; \pi]$ має місце нерівність*

$$\phi(y,u) \equiv \left| \frac{\sin(y+u)}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \right|^p |\sin y| \le$$

$$\le C_r \left| \frac{\big(|\sin(y+u)| + 1/n\big)^{1-r}}{\omega\big(|\sin(y+u)|/n + 1/n^2\big)} \right|^p (1 + n|u|)^{(r+1)p} \big|\sin(y+u)\big|. \tag{10}$$

Доведення. Функцію $\phi(y,u)$ запишемо у вигляді

$$\phi(y,u) = \left| \frac{\big(|\sin(y+u)| + 1/n\big)^{1-r}}{\omega\big(|\sin(y+u)|/n + 1/n^2\big)} \right|^p \times R_1 \times R_2,$$

де

$$R_1 = \frac{\big(|\sin(y+u)| + 1/n\big)^{(r-1)p} \big|\sin(y+u)\big|^p |\sin y|}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^{rp}},$$

$$R_2 = \frac{\omega^p\big(|\sin(y+u)|/n + 1/n^2\big)}{\omega^p\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)}.$$

Оцінимо R_1. Нехай спочатку $\big|\sin(y+u)\big| \le |\sin y|$. Тоді R_1 можна записати у вигляді

$$R_1 = \left(\frac{\big|\sin(y+u)\big| + 1/n}{|\sin y| + 1/n} \right)^{(r-1)p} \left(\frac{|\sin(y+u)|}{|\sin y| + 1/n} \right)^{p-1} \frac{|\sin y|}{|\sin y| + 1/n} \big|\sin(y+u)\big|.$$

Оскільки кожен дріб не перевищує одиниці, то $R_1 \le \big|\sin(y+u)\big|$. Нехай тепер $|\sin(y+u)| > |\sin y|$. Тоді

$$\frac{|\sin(y+u)|}{|\sin y|+1/n} \le \frac{|\sin(y+u)|+1/n}{|\sin y|+1/n} \le$$
$$\le \frac{|\sin y|+1/n+|u|}{|\sin y|+1/n} = 1+\frac{|u|}{|\sin y|+1/n} \le 1+n|u|.$$

Отже,

$$R_1 \le (1+n|u|)^{rp}\big|\sin(y+u)\big|. \tag{11}$$

Оцінимо R_2. З напівадитивності модуля неперервності випливає, що

$$\omega\big(|\sin(y+u)|/n+1/n^2\big) \le \omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big)+\omega(|u|/n).$$

Якщо $|u|\le 1/n$, то $\omega(|u|/n)\le\omega(1/n^2)\le\omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big)$. У протилежному випадку

$$\omega(|u|/n)=\omega\big(n|u|/n^2\big)\le(1+n|u|)\omega(1/n^2)\le(1+n|u|)\omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big).$$

Таким чином,

$$R_2 \le (1+n|u|)^p. \tag{12}$$

Із оцінок (11), (12) одержуємо (10).

Наступна лема узагальнює лему 1 з роботи [5].

Лема 5. *Нехай похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції належить $L^p_{[-1;1]}$ і виконується нерівність*

$$\left\|\frac{f'(x)}{\big(\sqrt{1-x^2}+1/n\big)^{r-1}\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2\big)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}} \le \psi(n), \tag{13}$$

де $\psi(n)$ — довільна додатна функція натурального аргументу. Тоді існує алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вищого за $(n-1)(k-2)$ такий, що виконується нерівність

$$S \equiv \left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\big(\sqrt{1-x^2}+1/n\big)^{r}\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2\big)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}} \le A_r\frac{\psi(n)}{n}, \tag{14}$$

де $r\ge 0$, а величина A_r не залежить від f і n.

Доведення. Нехай $K(t)=\dfrac{1}{\gamma_n}\left\{\dfrac{\sin nt/2}{n\sin t/2}\right\}^{2k+4}$, де γ_n вибрано так, що $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K(t)\,dt=1$. Відомо, що $K(t)$ — тригонометричний поліном степеня $(r+2)(n-1)$ і для нього виконується нерівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha K(t)dt \le \frac{C}{n^\alpha}, \quad 0<\alpha<2r+3. \tag{15}$$

Покладемо $P_n(x)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\big(\cos(y+t)\big)K(t)\,dt$, де $x=\cos y$. Зобразимо ліву частину нерівності (14) інтегралом і виконаємо в ньому підстановку $x=\cos y$:

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t) \frac{f(\cos y) - f\big(\cos(y+t)\big)}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \, dt \right|^p |\sin y| \, dy \right\}^{1/p}.$$

Застосуємо нерівність Мінковського

$$S \leq \int\limits_{\pi}^{\pi} K(t) \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(\cos y) - f\big(\cos(y+t)\big)}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \right|^p |\sin y| \, dy \right\}^{1/p} dt.$$

Внутрішній інтеграл позначимо через S_1 і перетворимо його спочатку за допомогою формули Ньютона – Лейбніца:

$$\int\limits_{0}^{t} f'\big(\cos(y+u)\big) \sin(y+u) \, du = f(\cos y) - f\big(\cos(y+t)\big),$$

де $t > 0$, а потім знову застосуємо нерівність Мінковського:

$$S_1 \equiv \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{0}^{t} \frac{f'\big(\cos(y+u)\big) \sin(y+u)}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \, du \right|^p |\sin y| \, dy \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \int\limits_{0}^{t} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f'\big(\cos(y+u)\big) \sin(y+u) |\sin y|^{1/p}}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \right|^p dy \right\}^{1/p} du.$$

Функція, що знаходиться під знаком внутрішнього інтеграла, дорівнює

$$\big|f'\big(\cos(y+u)\big)\big|^p \phi(y,u).$$

Використовуючи оцінку (10) функції $\phi(y,u)$ й умови (13) і враховуючи, що інтеграл від періодичної функції по періоду є сталою величиною, одержуємо

$$\int\limits_{0}^{t} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f'\big(\cos(y+u)\big) \sin(y+u)}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^r \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \right|^p |\sin y| dy \right\}^{1/p} du \leq$$

$$\leq C_r \int\limits_{0}^{t} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f'\big(\cos(y+u)\big) |\sin(y+u)|^{1/p}}{\big(|\sin(y+u)| + 1/n\big)^{r-1} \omega\big(|\sin(y+u)|/n + 1/n^2\big)} \right|^p dy \right\}^{1/p} (1+nu)^{(r+1)} du =$$

$$= \int\limits_{0}^{t} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f'(\cos y) |\sin y)|^{1/p}}{\big(|\sin y| + 1/n\big)^{r-1} \omega\big(|\sin y|/n + 1/n^2\big)} \right|^p dy \right\}^{1/p} (1+nu)^{(r+1)} du =$$

$$= C_r \int\limits_{0}^{t} 2 \left\| \frac{f'(x)\big(\sqrt{1-x^2} + 1/n\big)^{1-r}}{\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2\big)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} (1+nu)^{(r+1)} du \leq$$

$$\leq C_r t (1+nt)^{(r+1)} \psi(n).$$

Аналогічні міркування мають місце і для $t < 0$. Використовуючи нерівність (15), одержуємо оцінку (14).

У наступній лемі розглянемо властивості похідної полінома

$$P_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(y+t)\big) K(t)\, dt, \tag{16}$$

де $x = \cos y$.

Лема 6. *Якщо функція* $f(x)$ *належить* $W^r H_p^{\omega}$, $1 \le p < \infty$, *то*

$$\frac{d}{dx} P_n(f, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} f'\big(\cos(y+t)\big) \sin(y+t) K(t)\, dt. \tag{17}$$

Доведення. Якщо $r \ge 2$, то підінтегральна функція в (16) неперервна за обома змінними і має неперервну похідну по x. Тому можна диференціювати під знаком інтеграла і справджується рівність (17). Якщо $r = 1$, то функція $f'(x)$ може бути розривною. В цьому випадку $P_n(f, x)$ запишемо у вигляді

$$P_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos u) K(u - y)\, du$$

і ще раз застосуємо теорему про диференціювання під знаком інтеграла:

$$\frac{d}{dx} P_n(f, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos u) K'(u-y)\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(f(\cos u) K(u-y) \big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(\cos u) \sin u K(u-y)\, du \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} f'\big(\cos(y+t)\big) \sin(y+t) K(t)\, dt.$$

Лема 7. *Нехай похідна* $f'(x)$ *абсолютно неперервної функції належить* $L^p_{[-1;1]}$, $1 \le p <$ $< \infty$, *і виконується нерівність* (13). *Тоді для алгебраїчного многочлена*

$$P_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(y+t)\big) K(t)\, dt,$$

де $x = \cos y$, *має місце нерівність*

$$\left\| \frac{P_n^{(k)}(f, x)}{\big(\sqrt{1-x^2} + 1/n\big)^{r-k} \omega\big(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2\big)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \le C_r \frac{\psi(n)}{n^{r-k}}. \tag{18}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $k=1$. За лемою 3 маємо

$$\left\|\frac{P_n'(f,x)\big(\sqrt{1-x^2}+1/n\big)^{1-r}}{\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2\big)}\right\|_p \le$$

$$\le \left\|\frac{P_n'(f,x)\big(\sqrt{1-x^2}+1/n\big)^{-r}\sqrt{1-x^2}}{\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2\big)}\right\|_p. \tag{19}$$

Норму, що знаходиться у правій частині нерівності (19), зобразимо інтегралом і позначимо через T, а для похідної $P_n'(f,x)$ використаємо формулу (17):

$$T=\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'\big(\cos(y+t)\big)\sin(y+t)K(t)dt\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\big(\sqrt{1-x^2}+1/n\big)^{r}\omega\big(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2\big)}\right|^p dx\right\}^{1/p},$$

де $x=\cos y$. Виконаємо у зовнішньому інтегралі підстановку $x=\cos y$ і застосуємо нерівність Мінковського:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(y+t))\sin(y+t)}{\big(|\sin y|+1/n\big)^{r}\omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big)}\right|^p|\sin y|\,dy\right\}^{1/p}K(t)\,dt.$$

Функція, що знаходиться під знаком внутрішнього інтеграла, дорівнює $\big|f'(\cos(y+t))\big|^p\phi(y,t)$. Використаємо оцінку (10) функції $\phi(y,t)$:

$$\left|\frac{f'(\cos(y+t))\sin(y+t)}{\big(|\sin y|+1/n\big)^{r}\omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big)}\right|^p|\sin y| \le$$

$$\le\left|\frac{f'(\cos(y+t))}{(|\sin(y+t)|+1/n)^{r-1}\omega(|\sin(y+t)|/n+1/n^2)}\right|^p\times$$

$$\times(1+n|t|)^{(r+1)p}|\sin(y+t)|. \tag{20}$$

Використовуючи оцінку (20) і умову (13), одержуємо

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(y+t))\sin(y+t)}{\big(|\sin y|+1/n\big)^{r-1}\omega\big(|\sin y|/n+1/n^2\big)}\right|^p|\sin y|dy\right\}^{1/p}\le$$

$$\le\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(y+t))|\sin(y+t)|^{1/p}}{\big(|\sin(y+t)|+1/n\big)^{r-1}\omega\big(|\sin(y+t)|/n+1/n^2\big)}\right|^p dy\right\}^{1/p}C_r(1+n|t|)^{(r+1)}. \tag{21}$$

Із (21) і нерівності (15) випливає твердження леми 7 при $k=1$. Для довільного k у відповідності з нерівністю [2] одержимо

$$\left\|\frac{P_n^{(k)}(x)}{g^{r-k}(x,n)\omega(g(x,n)/n)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\le C_r n^{k-1}\left\|\frac{P_n'(x)}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\le$$

$$\leq C_r n^{k-1} \frac{\psi(n)}{n^{r-1}} \leq C_r \frac{\psi(n)}{n^{r-k}}.$$

Теорему 1 будемо доводити методом математичної індукції. Нехай $r = 1$, функція $f(x)$ належить $W^1 H_p^\omega$, $1 \leq p < \infty$, алгебраїчний многочлен $Q_n(f;x)$ степеня не вищого за n, існування якого встановлює теорема С, такий, що задовольняє нерівність

$$\left\| \frac{f'(x) - Q_n'(f;x)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_p \leq C\psi(n),$$

де $\psi(n) = C \ln^{1/p} n$.

Отже, для функції $f(x) - Q_n(f;x)$ виконується умова (13). Тоді за лемою 5 існує алгебраїчний многочлен $P_n(f - Q_n; x)$ степеня не вищого за $(n-1)(k-2)$ такий, що виконується нерівність

$$\left\| \frac{f(x) - Q_n(f;x) - P_n(f - Q_n; x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)\omega\left(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2\right)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq A_1 \frac{\psi(n)}{n}, \tag{22}$$

де величина A_1 не залежить від f і n.

Покажемо, що для многочлена $P_{1,n}(x) = Q_n(f;x) + P_n(f - Q_n; x)$ справджується твердження теореми 1. Відхилення многочлена $P_{1,n}(x)$ від функції f випливає з нерівності (22), а відхилення многочлена $P_{1,n}'(x)$ від похідної $f'(x)$ — з леми 7 за умови, що $r = k = 1$:

$$\left\| \frac{f'(x) - P_{r,n}'(f;x)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_p \leq$$

$$\leq \left\| \frac{f'(x) - Q_n'(f;x)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_p + \left\| \frac{P_n'(f - Q_n; x)}{\omega(g(x,n)/n)} \right\|_p \leq C_1 \ln^{1/p} n.$$

Нехай теорема 1 є справедливою для натурального числа $r \geq 1$ і функція $f(x)$ належить $W^{1+r} H_p^\omega$. Тоді $f'(x)$ належить $W^r H_p^\omega$ і за припущенням існує алгебраїчний многочлен $P_{r,n}(f', x)$ степеня не вищого за n такий, що для всіх $k = 0, 1, \ldots, r$ виконується нерівність

$$\left\| \frac{f^{(k+1)}(x) - P_{r,n}^{(k)}(f';x)}{\omega(g(x,n)/n) g^{r-k}(x,n)} \right\|_p \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^{r-k}}. \tag{23}$$

Із нерівності (23) при $k = 0$ випливає виконання умови (13) для функції $f(x) - \int_0^x P_{r,n}(f';t)\,dt$:

$$\left\| \frac{f'(x) - P_{r,n}(f';x)}{\omega(g(x,n)/n) g^r(x,n)} \right\|_p \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^r}.$$

Тоді за лемою 5 існує алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вищого за $(n-1)(k-2)$ такий, що виконується нерівність

$$\left\| \frac{f(x) - \int_0^x P_{r,n}(f';t)\,dt - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^{r+1}\omega\left(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2\right)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq A_1 \frac{\ln^{1/p} n}{n^{r+1}}, \tag{24}$$

де величина A_r не залежить від f і n.

Покажемо, що для многочлена

$$P_{r+1,n}(f,x) = \int\limits_0^x P_{r,n}(f';t)\,dt + P_n(x)$$

справджується твердження теореми 1. Відхилення многочлена $P_{r+1,n}(f;x)$ від функції $f(x)$ випливає з нерівності (24), а відхилення многочлена $P^{(k)}_{r+1,n}(f;x)$ від похідної $f^{(k)}(x)$ — з леми 7 і нерівностей

$$\left\|\frac{f^{(k)}(x) - P^{(k)}_{r+1,n}(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right) g^{r+1-k}(x,n)}\right\|_p = \left\|\frac{f^{(k)}(x) - P^{(k-1)}_{r,n}(f';x) - P^{(k)}_n(x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right) g^{r+1-k}(x,n)}\right\|_p \leq$$

$$\leq \left\|\frac{f^{(k)}(x) - P^{(k-1)}_{r,n}(f';x)}{\omega(g(x,n)/n) g^{r+1-k}(x,n)}\right\|_p + \left\|\frac{P^{(k)}_n(x) g^{k-r-1}(x,n)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)}\right\|_p \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^{r+1-k}}.$$

Література

1. *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**. – С. 261 – 280.
2. *Теляковский С. А.* Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сб. – 0000. – **70**, № 2. – С. 252 – 265.
3. *Ковальчук Р. Н., Филозоф Л. И.* Совместное приближение функции и ее производных в метрике L_p // Исследования по теории приближенных функций и их приложения. – Киев, 1978. – С. 89 – 104.
4. *Ходак Л. Б.* О совместном приближении функций и их производных алгебраическими многочленами в метрике L_p, $1 \leq p < \infty$ // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. – Днепропетровск, 1979. – С. 27 – 31.
5. *Потапов М. К.* О теоремах типа Джексона в метрике L_p // Докл. АН СССР. – 1956. – **111**, № 6. – С. 1185 – 1188.
6. *Потапов М. К.* Некоторые неравенства для полиномов и их производных // Вестн. Моск. ун-та. – 1960. – № 2. – С. 10 – 19.
7. *Моторний В. П., Клименко М. С.* Наближення функцій алгебраїчними многочленами в середньому // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Вип. 17. – С. 106 – 117.
8. *Моторный В. П.* Некоторые вопросы приближения функций алгебраическими полиномами в интегральной метрике // Докл. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **172**, № 3. – С. 537 – 540.
9. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874 – 899.
10. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
11. *Моторний В. П.* Про наближення у середньому функції та її похідних // Вісн. Дніпр. ун-ту. Математика. – 2018. – Вип. 23. – С. 56 – 61.
12. *Лебедь Г. К.* Неравенства для многочленов и их производных // Докл. АН СССР. – 1957. – **117**, № 4. – С. 570 – 572.

Одержано 10.10.18