УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В МЕТРИКАХ ПРОСТОРІВ L_p НА КЛАСАХ ПЕРІОДИЧНИХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ *

We obtain the asymptotic equalities for the least upper bounds of approximations by interpolation trigonometric polynomials with equidistant distribution of interpolation nodes $x_k^{(n-1)} = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, in metrics of the spaces L_p on the classes of 2π-periodic functions that can be represented in the form of convolutions of functions φ, $\varphi \perp 1$, from the unit ball of the space L_1, with fixed generating kernels in the case where the modules of their Fourier coefficients $\psi(k)$ satisfy the condition $\lim_{k\to\infty} \psi(k+1)/\psi(k) = 0$. Similar estimates are also obtained on the classes of r-differentiable functions W_1^r for the rapidly increasing exponents of smoothness r $(r/n \to \infty, n \to \infty)$.

Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами з рівномірним розподілом вузлів інтерполяції $x_k^{(n-1)} = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, у метриках просторів $L_p, 1 \leq p \leq \infty$, на класах 2π-періодичних функцій, які зображуються у вигляді згорток функцій φ, $\varphi \perp 1$, що належать одиничній кулі з простору L_1 із фіксованими твірними ядрами, у яких модулі коефіцієнтів Фур'є $\psi(k)$ задовольняють умову $\lim_{k\to\infty} \psi(k+1)/\psi(k) = 0$. Аналогічні оцінки встановлено і на класах r-диференційовних функцій W_1^r при швидко зростаючих показниках гладкості r $(r/n \to \infty, n \to \infty)$.

Нехай L_p, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій f зі стандартною нормою $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f із нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Позначимо через $C_{\bar\beta,1}^\psi$ класи 2π-періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\bar\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в якій $\varphi \perp 1$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$, а $\Psi_{\bar\beta}(\cdot)$ — ядра вигляду

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\pi\beta_k}{2}\right), \qquad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \tag{3}$$

Якщо послідовності $\bar\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є стаціонарними, тобто $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $C_{\bar\beta,1}^\psi$ позначатимемо через $C_{\beta,1}^\psi$.

Якщо $\psi(k) = k^{-r}, r > 1$, то класи $C_{\bar\beta,1}^\psi$ і $C_{\beta,1}^\psi$ позначатимемо відповідно через $W_{\bar\beta,1}^r$ і $W_{\beta,1}^r$. Останні класи є відомими класами Вейля–Надя. Якщо $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$, то класи $W_{\beta,1}^r$ є

* Частково підтримано грантом H2020-MSCA-RISE-2014, номер проекту 645672 (AMMODIT: Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools).

© А. С. СЕРДЮК, І. В. СОКОЛЕНКО, 2019

класами W_1^r 2π-періодичних функцій, що мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і такі, що їхня r-та похідна належить одиничній кулі простору L_1 $\big($тобто $\|f^{(r)}\|_1 \leq 1\big)$.

Якщо $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, то класи $C^{\psi}_{\bar\beta,1}$ і $C^{\psi}_{\beta,1}$ будемо позначати через $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,1}$ і $C^{\alpha,r}_{\beta,1}$ відповідно. Останні класи називають іноді класами узагальнених інтегралів Пуассона.

У даній роботі будемо розглядати класи $C^{\psi}_{\bar\beta,1}$ за умови, що послідовність $\psi(k) > 0$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{4}$$

Як випливає з [1, с. 139 – 145], класи $C^{\psi}_{\bar\beta,1}$ за виконання умови (4) складаються із функцій, які допускають регулярне продовження в усю комплексну площину, тобто складаються із цілих функцій. З іншого боку, як показано в [2, с. 1703], для того, щоб функція f належала до множини всіх дійснозначних на дійсній осі цілих функцій, необхідно і достатньо, щоб її можна було зобразити згорткою вигляду (1), у якій φ належить L_1, а коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду (2) задовольняли умову (4).

Нехай f належить C. Через $\tilde S_{n-1}(f;x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde S_{n-1}\big(f; x_k^{(n-1)}\big) = f\big(x_k^{(n-1)}\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Порядкові оцінки збіжності інтерполяційних поліномів $\tilde S_{n-1}(f;\cdot)$ до f у метриках просторів C і L_p, що виражались у термінах послідовностей найкращих наближень функцій в C і L_p, одержано у роботах [3, 4].

Розглянемо величину

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C^{\psi}_{\bar\beta,1}\big)_{L_p} = \sup_{f\in C^{\psi}_{\bar\beta,1}} \|f(\cdot) - \tilde S_{n-1}(f;\cdot)\|_p. \tag{5}$$

У даній роботі будуть встановлені асимптотично точні оцінки величин (5) при $n \to \infty$ для довільних $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ і $\psi(k)$ таких, що задовольняють умову (4).

При $p = 1$ асимптотичну поведінку величин вигляду (5) при $n \to \infty$ в залежності від тих чи інших обмежень на послідовності $\psi(k)$ і β_k досліджено у роботах [5 – 8]. Зокрема, у [6, с. 994] за виконання умови (4) для довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ встановлено асимптотичну рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C^{\psi}_{\bar\beta,1}\big)_{L_1} = \frac{16}{\pi^2}\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \tag{6}$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Крім того, у роботі [9, с. 279 – 280], отримано результати, з яких випливає, що за виконання умови (4) при довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ справджується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_\infty} = \frac{2}{\pi}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \tag{7}$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Питання про асимптотичну поведінку величин $\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C^{\psi}_{\bar{\beta},1}\big)_{L_p}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, за виконання умови (4) при $1 < p < \infty$ залишалось відкритим.

Основним результатом цієї статті є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, *а* $\psi(k) > 0$ *задовольняє умову* (3). *Тоді при всіх* $n \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p^2\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu)\right), \tag{8}$$

в якій $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Якщо, крім того,* $\psi(k)$ *задовольняє умову* (4), *то оцінка* (8) *є асимптотичною при* $n \to \infty$ *рівністю.*

Доведення. Згідно з формулою (9) роботи [6], для довільної функції f із класу $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\psi(n)\sin\frac{2n-1}{2}x\int_0^{2\pi}\sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right)\varphi(t)\,dt + \tilde{r}_{n+1}(f;x), \tag{9}$$

в якій

$$\tilde{r}_{n+1}(f;x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu)\left(\cos\left(\nu(t-x) + \frac{\pi\beta_\nu}{2}\right) - \bar{\omega}_\nu(x;t)\right)\varphi(t)\,dt. \tag{10}$$

Функції $\bar{\omega}_\nu(x;t)$, $\nu = n, n+1, \ldots$, в (10) визначаються за допомогою формул

$$\bar{\omega}_{m(2n-1)+k}(x;t) = \cos\left(m(2n-1)t + k(t-x) + \frac{\pi\beta_{m(2n-1)+k}}{2}\right),$$
$$m \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1). \tag{11}$$

Із (10) і (11) випливає, що для довільних $1 \leq p \leq \infty$ і $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ має місце оцінка

$$\|\tilde{r}_{n+1}(f;\cdot)\|_p \leq \frac{2}{\pi}\left\|\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu)|\varphi(t)|\,dt\right\|_p \leq \frac{2^{1+1/p}}{\pi^{1-1/p}}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu) \leq 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu). \tag{12}$$

Згідно з формулами (9) і (12), для довільних $1 \leq p \leq \infty$, $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, і $\psi(k) > 0$, що задовольняють умову (3), справджується рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C^{\psi}_{\bar{\beta},1}\big)_{L_p} = \frac{2}{\pi}\psi(n)A_n(p) + O(1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu), \tag{13}$$

в якій

$$A_n(p) = A_n(p;\bar{\beta}) := \sup_{\substack{\|\varphi\|_1\le 1\\ \varphi\perp 1}}\left\|\sin\frac{2n-1}{2}x\int\limits_0^{2\pi}\sin\left(nt-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_n}{2}\right)\varphi(t)\,dt\right\|_p. \tag{14}$$

Дослідимо асимптотичну поведінку величин $A_n(p)$, $1\le p\le\infty$, при $n\to\infty$. З цією метою встановимо істинність двосторонньої оцінки

$$\frac{1}{2}\big\|\Phi_{n,\pi\beta_n}(x)\big\|_p \le A_n(p) \le \frac{1}{2}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\big\|\Phi_{n,\theta}(x)\big\|_p, \qquad n\in\mathbb{N}, \quad 1\le p\le\infty, \tag{15}$$

в якій

$$\Phi_{n,\theta}(x) := \cos\left(nx-\frac{\theta}{2}\right)g_\theta(x) + \sin\left(nx-\frac{\theta}{2}\right)h_\theta(x), \qquad \theta\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

$$g_\theta(x) := 1-\cos(x-\theta), \tag{17}$$

$$h_\theta(x) := -\sin(x-\theta). \tag{18}$$

Для знаходження необхідної оцінки зверху величини $A_n(p)$ скористаємось узагальненою нерівністю Мінковського (див. [10, с. 395])

$$\left\|\int\limits_0^{2\pi} f(\cdot,u)du\right\|_p \le \int\limits_0^{2\pi}\|f(\cdot,u)\|_p\,du, \qquad 1\le p\le\infty. \tag{19}$$

Згідно з (14) і (19)

$$A_n(p) \le \sup_{\substack{\|\varphi\|_1\le 1\\ \varphi\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\left\|\sin\frac{2n-1}{2}x\sin\left(nt-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_n}{2}\right)\right\|_p\varphi(t)\,dt \le$$

$$\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\sin\frac{2n-1}{2}x\sin\left(-\frac{x}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\|_p. \tag{20}$$

Оскільки при будь-якому $\theta\in\mathbb{R}$

$$\sin\frac{2n-1}{2}x\sin\left(-\frac{x}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(nx-\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left((n-1)x+\frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(nx-\frac{\theta}{2}\right)\big(1-\cos(x-\theta)\big)-\sin\left(nx-\frac{\theta}{2}\right)\sin(x-\theta)\right) = \frac{1}{2}\Phi_{n,\theta}(x), \tag{21}$$

то на підставі (20) і (21) маємо

$$A_n(p) \le \frac{1}{2} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \|\Phi_{n,\theta}(x)\|_p. \tag{22}$$

Оцінимо знизу величину $A_n(p)$. Для цього розглянемо при кожному $n \in \mathbb{N}$ і достатньо малому $\delta > 0$ $\left(\delta < \frac{\pi}{n}\right)$ 2π-періодичну функцію $\varphi_{n,\delta}(t)$ таку, що на $\left[-\frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2}\right]$ задається за допомогою рівностей

$$\varphi_{n,\delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & t \in \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right), \\ -\frac{1}{2\delta}, & t \in \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{n} + \frac{\delta}{2}\right), \\ 0, & t \in \left[-\frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2}\right] \setminus \left\{\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{n} + \frac{\delta}{2}\right)\right\}. \end{cases} \tag{23}$$

Оскільки $\|\varphi_{n,\delta}\|_1 \le 1$ і $\varphi_{n,\delta} \perp 1$, то, як випливає з (14),

$$A_n(p) \ge \left\| \sin\frac{2n-1}{2}x \int_0^{2\pi} \sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right) \varphi_{n,\delta}(t)dt \right\|_p. \tag{24}$$

Беручи до уваги (23), маємо

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right) \varphi_{n,\delta}(t)dt = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2\delta} \int_{\pi/n-\delta/2}^{\pi/n+\delta/2} \sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{n\delta}\left(\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2} - \frac{n\delta}{2}\right) - \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2} + \frac{n\delta}{2}\right)\right). \tag{25}$$

Із (24) і (25) одержуємо нерівність

$$A_n(p) \ge \left\| \sin\frac{2n-1}{2}x \frac{\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2} - \frac{n\delta}{2}\right) - \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2} + \frac{n\delta}{2}\right)}{n\delta} \right\|_p. \tag{26}$$

Вибираючи δ настільки малим, щоб $\delta = o\left(\frac{1}{n}\right)$, і переходячи до границі у правій частині нерівності (26) при $n\delta \to 0$, з урахуванням формули (21), застосованої при $\theta = \pi\beta_n$, одержуємо

$$A_n(p) \ge \left\| \sin\frac{2n-1}{2}x \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi\beta_n}{2}\right) \right\|_p = \frac{1}{2}\|\Phi_{n,\pi\beta_n}(x)\|_p. \tag{27}$$

Оцінка (15) є наслідком формул (22) і (27).

Для знаходження асимптотичної рівності для величин $\|\Phi_{n,\theta}(\cdot)\|_p$ при $n \to \infty$ і довільних фіксованих $\theta \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$ скористаємось таким твердженням із роботи [11, с. 1083].

Лема 1. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$ *і* 2π*-періодичні функції* $g(x)$ *і* $h(x)$ *мають обмежену варіацію на* $[0, 2\pi]$, *якщо* $p = 1$, *або належать класу Гельдера* $KH^1 = \big\{f \in C\colon |f(x+\delta) - f(x)| \leq \leq K\delta, x, \delta \in \mathbb{R}\big\}$, *якщо* $1 < p \leq \infty$. *Тоді для функції*

$$\Phi(x) = g(x)\cos(nx + \alpha) + h(x)\sin(nx + \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

справджуються асимптотичні формули

$$\left.\begin{array}{c} \|\Phi\|_p \\ \inf\limits_{c\in\mathbb{R}} \|\Phi(\cdot) - c\|_p \\ \sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{2}\|\Phi(\cdot+\theta) - \Phi(\cdot)\|_p \end{array}\right\} = \frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\|r\|_p + O(1)\frac{M}{n}, \tag{28}$$

в яких

$$r(t) = \sqrt{g^2(x) + h^2(x)}, \tag{29}$$

$$M = M_p = \begin{cases} \overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(g) + \overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(h) & \textit{при} \quad p = 1, \\ K + p^{-1}\|r\|_p^{1-p}\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^p) & \textit{при} \quad 1 < p < \infty, \\ K & \textit{при}\ p = \infty, \end{cases} \tag{30}$$

а величина $O(1)$ *є рівномірно обмеженою відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Покладемо в термінах леми 1 $g(x) = g_\theta(x)$, $h(x) = h_\theta(x)$, $\alpha = -\dfrac{\theta}{2}$, $\Phi(x) = \Phi_{n,\theta}(x)$. Тоді згідно з (17), (18) і (29) при будь-якому $\theta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$r(x) = r_\theta(x) = \sqrt{g_\theta^2(x) + h_\theta^2(x)} = \sqrt{2(1 - \cos(x - \theta))} = 2\left|\sin\frac{x-\theta}{2}\right|, \tag{31}$$

$$\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r_\theta^p) = 2^{p+1}, \tag{32}$$

$$\|r_\theta\|_p = 2\left\|\sin\frac{x-\theta}{2}\right\|_p = 2\|\cos t\|_p. \tag{33}$$

Крім того, згідно з (30)–(33) при $p = 1$

$$M_p = M_1 = \overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(g_\theta) + \overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(h_\theta) = 8, \tag{34}$$

при $1 < p < \infty$

$$M_p = K + \frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r_\theta^p)}{p\|r_\theta\|_p^{p-1}} = 1 + \frac{4}{p\|\cos t\|_p^{p-1}}, \tag{35}$$

а при $p = \infty$

$$M_p = M_\infty = K = 1. \tag{36}$$

Оскільки при довільних $1 < p < \infty$

$$p\|\cos t\|_p^p = p\|\sin t\|_p^p \geq 4p \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^p dt = 2\pi\frac{p}{p+1} \geq \pi$$

і

$$\|\cos t\|_p \leq 2\pi,$$

то з рівностей (35) отримуємо оцінку

$$M_p \leq 9, \quad 1 < p < \infty. \tag{37}$$

Застосовуючи лему 1 до функції $\Phi(x) = \Phi_{n,\theta}(x)$ і враховуючи формули (33), (34), (36) і (37), із (28) одержуємо рівномірну відносно всіх параметрів оцінку

$$\|\Phi_{n,\theta}(\cdot)\|_p = \frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1/p}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\frac{1}{n}, \qquad 1 \leq p \leq \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Із формул (13), (15) і (38) випливає, що за умови (3) справджується оцінка (8).

Залишилося показати, що при виконанні рівності (4) оцінка (8) перетворюється в асимптотичну при $n \to \infty$ рівність.

Розглянемо величину

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\psi) := \sup_{k\geq n}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}. \tag{39}$$

На підставі (4) і (39) величина ε_n монотонно спадає до нуля, а отже, при n таких, що $\varepsilon_n < 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k) = \psi(n)\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} + \psi(n)\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\frac{\psi(n+2)}{\psi(n+1)} +$$

$$+\psi(n)\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\frac{\psi(n+2)}{\psi(n+1)}\frac{\psi(n+3)}{\psi(n+2)} + \ldots =$$

$$= \psi(n)\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k}\frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)} \leq \psi(n)\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k}\varepsilon_{n+j} \leq \psi(n)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_n^{k+1} = \psi(n)\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}. \tag{40}$$

З урахуванням співвідношень (40), при n таких, що $\varepsilon_n < 1$, з (8) випливає рівномірна за всіма параметрами оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \psi(n)\left(\frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)\right), \tag{41}$$

яка при $n \to \infty$ є асимптотичною рівністю.

Теорему 1 доведено.

При $p = 1$ формула (8) перетворюється у формулу (6), а при $p = \infty$ — випливає з (7).

Наведемо наслідок з теореми 1 у випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$.

Теорема 2. *Нехай* $r > 1,\ \alpha > 0,\ 1 \le p \le \infty,\ \beta_k \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх номерів* n *таких, що*

$$n^{1-r} \ln(n+1) \le \alpha r, \tag{42}$$

має місце рівномірна відносно всіх розглядуваних параметрів оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,1})_{L_p} = e^{-\alpha n^r} \left(\frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1+1/p}} \|\cos t\|_p^2 + O(1)\frac{1}{n} \right). \tag{43}$$

Доведення. Для функції $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0,\ r > 1$, величина ε_n вигляду (39) оцінюється таким чином:

$$\varepsilon_n = e^{-\alpha((n+1)^r - n^r)} \le e^{-\alpha r n^{r-1}}. \tag{44}$$

На підставі (42)

$$e^{-\alpha r n^{r-1}} \le \frac{1}{n+1}. \tag{45}$$

Із (44) і (45) випливає нерівність

$$\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n} \le \frac{2}{n}. \tag{46}$$

Формула (43) випливає із (41) і (46).

Застосуємо також оцінку (8) до класів $W^r_{\bar\beta,1}$, тобто у випадку, коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1$. Оскільки

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \frac{1}{(n+1)^r} + \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t^r} = \frac{1}{(n+1)^r}\left(1 + \frac{n+1}{r-1}\right),$$

то, враховуючи монотонне зростання до e^{-1} послідовності $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, одержуємо

$$n^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \left(1 + \frac{n+1}{r-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{r}{n+1}} \left(1 + \frac{n+1}{r-1}\right) <$$

$$< e^{-\frac{r}{n+1}} \left(1 + \frac{n+1}{r-1}\right). \tag{47}$$

Із (47) випливає рівномірна за всіма параметрами оцінка

$$n^r \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} = O(1) e^{-\frac{r}{n+1}} \left(1 + \frac{n}{r-1}\right), \qquad r > 1. \tag{48}$$

Як наслідок з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty,\ r > 1,\ \beta_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. *Тоді має місце рівномірна відносно всіх параметрів оцінка*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\left(\frac{1}{n} + e^{-\frac{r}{n+1}}\left(1 + \frac{n}{r-1}\right)\right)\right). \tag{49}$$

Зазначимо, що при $r \geq n+1$ оцінка (49) набирає вигляду

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{2^{1-1/p}}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\left(\frac{1}{n} + e^{-\frac{r}{n+1}}\right)\right). \tag{50}$$

У випадку, коли $\dfrac{r}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, формула (50) є асимптотичною рівністю.

При $p = 1$ і $\beta_k = \beta,\ \beta \in \mathbb{R},\ r \geq n+1$ рівність (50) можна записати у вигляді

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{16}{\pi^2} + O(1)\left(\frac{1}{n} + e^{-\frac{r}{n+1}}\right)\right). \tag{51}$$

Оцінка (51) є інтерполяційним аналогом результатів робіт С. Б. Стєчкіна [12] (теорема 4) та С. О. Теляковського [13], в яких досліджувалась асимптотика величин

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1} = \sup_{f \in W^r_{\beta,1}} \big\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\big\|_p,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинна сума Фур'є порядку $n-1$ функції f.

Формула (51) доповнює результат В. П. Моторного [5], згідно з яким при довільних $r \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_1)_{L_1} \leq \frac{2K_{r-1}\ln n}{\pi n^r} + \frac{O(1)}{n^r}, \tag{52}$$

де K_r — константи Фавара:

$$K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}, \qquad m = 0, 1, \ldots .$$

При цьому у випадку $r = 2$ у формулі (52) можна поставити знак рівності, тобто справджується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^2_1)_{L_1} = \frac{1}{n^2}\big(\ln n + O(1)\big).$$

Література

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
2. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686 – 1708.
3. *Sharapudinov I. I.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. – 1983. – **9**, № 3. – P. 223 – 234.
4. *Oskolkov K. I.* Inequalities of the “large sieve” type and applications to problems of trigonometric approximation // Anal. Math. – 1986. – **12**, № 2. – P. 143 – 166.
5. *Моторний В. П.* Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 781 – 786.
6. *Сердюк А. С.* Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 994 – 998.
7. *Сердюк А. С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1654 – 1663.
8. *Сердюк А. С.* Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 692 – 699.
9. *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 274 – 297.
10. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
11. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079 – 1096.
12. *Стечкин Р. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Приближение функций полиномами и сплайнами: Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
13. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510 – 518.

Одержано 15.05.18