УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепр. нац. ун-т)

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ТИПА ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

We obtain a new sharp inequality of the Landau – Kolmogorov type for a periodic function of two variables that estimates the convolution of the best uniform approximations of its partial primitives by the sums of univariate functions with the help of its L_∞-norm and uniform norms of its mixed primitives. Some applications of the obtained inequality are presented.

Отримано нову точну нерівність типу Ландау – Колмогорова, яка для періодичної функції двох змінних оцінює конволюцію найкращих рівномірних наближень частинних первісних сумами функцій однієї змінної через L_∞-норму самої функції і рівномірну норму мішаної первісної. Наведено також деякі застосування отриманої нерівності.

1. Введение. Неравенства типа Ландау – Колмогорова для производных и первообразных функций одной и многих переменных, особенно с неулучшаемыми константами, важны для многих областей математики. В этой связи усилия многих математиков на протяжении более чем 120-ти лет были направлены на получение таких неравенств. Для функций одной переменной известно много точных неравенств типа Ландау – Колмогорова (изложение большинства известных результатов в этом направлении, а также изложение их приложений в теории аппроксимации можно найти в обзорах [1, 2] и в монографии [3]). Для функций многих переменных точных неравенств существует гораздо меньше. При этом достаточно общие результаты известны только в случаях, когда L_2-норма или равномерная норма „промежуточной" производной оценивается через L_2-нормы самой функции и „старших" производных (соответствующие ссылки можно найти в упомянутых выше обзорах и монографии). Точные неравенства, содержащие только равномерные нормы функции, „промежуточной" и „старших" производных, известны только для функций двух переменных и производных невысокого порядка § (см. [4 – 6]).

С неравенствами типа Ландау – Колмогорова тесно связана задача аппроксимации одного класса функций другим. Это, в частности, было показано в работах В. В. Арестова [7], Клоца [8] и А. А. Лигуна [9]. Так, в работе [9] (см. также [10], теорема 6.1.1) А. А. Лигуном для периодических функций одной переменной доказана эквивалентность трех фактов: наличия некоторого неравенства типа Колмогорова, существования определенной оценки для приближения класса классом и, наконец, наличия некоторого неравенства для верхних граней полунорм на некоторых классах функций. Много интересных приложений этой связи к теории аппроксимации классов периодических функций полиномами и сплайнами представлено в монографии [10].

В работе [11] (см. также [3], теорема 7.4.1) получено обобщение теоремы эквивалентности Лигуна на случай неравенств типа Ландау – Колмогорова для опорных функций выпуклых множеств. В частности, доказана эквивалентность наличия некоторого неравенства для опорных функций выпуклых множеств и определенной оценки аппроксимации одного выпуклого множества гомотетами другого. Поскольку (см., например, [13]) при некоторых дополнительных условиях опорная функция пересечения множеств A и B равна конволюции опорных функций множеств A и B:

$$S_{A\cap B}(x) = \inf_{u+v=x}\{S_A(u) + S_B(v)\},$$

то для получения оценок аппроксимации пересечений классов периодических функций представляет интерес получение неравенств для конволюций опорных функций таких классов. Целью данной работы и является получение таких неравенств. Точнее, мы рассматриваем классы $W_1^{1,0}$ и $W_1^{0,1}$ функций, являющихся частными первообразными для функций из единичного шара пространства $L_1(\mathbb{T}^2)$, ортогональных константе по каждой переменной. Для опорной функции пересечения таких классов мы устанавливаем оценку сверху в виде конволюции наилучших равномерных приближений частных первообразных суммами функций одной переменной. Затем мы получаем неулучшаемое неравенство типа Ландау – Колмогорова, оценивающее такую конволюцию через L_∞-норму функции и наилучшее равномерное приближение суммами функций одной переменной ее смешанной первообразной – это основной результат данной статьи.

Структура статьи такова. В пункте 2 введены необходимые обозначения, определены классы $W_1^{1,0}$, $W_1^{0,1}$ и $W_1^{1,1}$, оценены $S_{W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}}$ и вычислены $S_{W_1^{1,1}}$. Неравенство, оценивающее конволюцию наилучших равномерных приближений частных первообразных суммами функций одной переменной через L_∞-норму функции и наилучшее равномерное приближение суммами функций одной переменной ее смешанной первообразной, получено в пункте 3. Здесь же доказана его точность. Наконец, в пункте 4 с помощью этого неравенства установлена оценка аппроксимации класса $W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}$ гомотетами $W_1^{1,1}$ в метрике пространства $L_1(\mathbb{T}^2)$.

2. Классы функций двух переменных и их опорные функции. Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами, и $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Если G — измеримое множество с конечной мерой, то, как обычно, для $p \in [1, \infty]$ через $L_p(G)$ будем обозначать пространство функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} = \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\{|x(t)| : t \in G\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Если $G = \mathbb{T}$ или $G = \mathbb{T}^2$, то через $C(G)$ будем обозначать пространство непрерывных функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ с соответствующей нормой (для которой мы, как и для нормы в пространстве $L_\infty(G)$, будем использовать обозначение $\|x\|_\infty$).

Пусть измеримая функция $x : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ суммируема в p-й степени (ограниченная при $p = \infty$) и имеет следующие свойства:

$$x(t_1, \cdot) \in L_p(\mathbb{T}) \quad \forall t_1 \in \mathbb{T} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\mathbb{T}} x(t_1, t_2) dt_2 = 0,$$

$$x(\cdot, t_2) \in L_p(\mathbb{T}) \quad \forall t_2 \in \mathbb{T} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\mathbb{T}} x(t_1, t_2) dt_1 = 0.$$

Совокупность всех таких функций с нормой $\|\cdot\|_p$ будем обозначать через $L_p^0(\mathbb{T}^2)$.

Как обычно, пусть

$$B_1(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \ne 0} \frac{e^{iks}}{ik}$$

— ядро Бернулли 1-го порядка. Для $x \in L_1^0(\mathbb{T}^2)$ и $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$ обозначим

$$(I_{1,0}x)(t) := \int\limits_{\mathbb{T}} B_1(t_1 - u)x(u, t_2)du, \qquad (I_{0,1}x)(t) := \int\limits_{\mathbb{T}} B_1(t_2 - u)x(t_1, u)du$$

и

$$(I_{1,1}x)(t) := \int\limits_{\mathbb{T}^2} B_1(t_1 - u_1)B_1(t_2 - u_2)x(u)du.$$

Через $W_1^{1,0}$ обозначим класс функций, представимых в виде

$$y(t) = \phi(t_2) + (I_{1,0}x)(t), \qquad x \in L_1^0(\mathbb{T}^2), \quad \|x\|_1 \le 1, \quad \phi \in C(\mathbb{T}),$$

через $W_1^{0,1}$ — класс функций, представимых в виде

$$y(t) = \psi(t_1) + (I_{0,1}x)(t), \qquad x \in L_1^0(\mathbb{T}^2), \quad \|x\|_1 \le 1, \quad \psi \in C(\mathbb{T}),$$

а через $W_1^{1,1}$ — класс функций, представимых в виде

$$y(t) = \phi(t_2) + \psi(t_1) + (I_{1,1}x)(t), \qquad x \in L_1^0(\mathbb{T}^2), \quad \|x\|_1 \le 1, \quad \phi, \psi \in C(\mathbb{T}).$$

Будем рассматривать задачу приближения класса $W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}$ классом $NW_1^{1,1}$ в метрике пространства $L_1(\mathbb{T}^2)$, т. е. задачу отыскания величины

$$E_N = E(W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}, NW_1^{1,1})_1 := \sup_{x \in W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}} \inf_{u \in NW_1^{1,1}} \|x - u\|_1.$$

По теореме двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством [12, с. 19] будем иметь

$$E_N = \sup_{x \in W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}} \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^2} x(t)y(t)dt - N \sup_{u \in W_1^{1,1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} u(t)y(t)dt \right).$$

Поскольку класс $W_1^{1,1}$ содержит все функции вида $\phi(t_1)+\psi(t_2) \in L_1(\mathbb{T})$, внутренний супремум можно брать только по функциям y, ортогональным константе по каждой переменной. Меняя затем порядок супремумов, получаем

$$E_N = \sup_{\substack{y \in L_\infty^0(\mathbb{T}^2) \\ \|y\|_\infty \le 1}} \left(\sup_{x \in W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} x(t)y(t)dt - N \sup_{u \in W_1^{1,1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} u(t)y(t)dt \right) =$$

$$= \sup_{\substack{y \in L_\infty^0(\mathbb{T}^2) \\ \|y\|_1 \infty \le 1}} \left(S_{W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}}(y) - N S_{W_1^{1,1}}(y) \right). \tag{1}$$

Здесь $S_{W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}}$ и $S_{W_1^{1,1}}$ — опорные функции множеств $W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}$ и $W_1^{1,1}$ соответственно.

Вычислим $S_{W_1^{1,1}}$ и оценим $S_{W_1^{1,0} \cap W_1^{0,1}}$. Для любого $y \in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)$ имеем

$$S_{W_1^{1,1}}(y) = \sup_{u\in W_1^{1,1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} u(t)y(t)dt = \sup_{\substack{v\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|v\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} (I_{1,1}v)(t)y(t)dt =$$

$$= \sup_{\substack{v\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|v\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} v(t)(I_{1,1}y)(t)dt = E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty. \tag{2}$$

Здесь и везде ниже через $E_{0,0}(z)_\infty$ обозначено наилучшее приближение функции z функциями вида $\phi(t_1)+\psi(t_2)$ в метрике пространства $L_\infty(\mathbb{T}^2)$.

Далее

$$S_{W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}}(y) = \sup_{x\in W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} x(t)y(t)dt =$$

$$= \sup_{x\in W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^2} x(t)y_1(t)dt + \int\limits_{\mathbb{T}^2} x(t)y_2(t)dt \right).$$

В правой части последнего выражения $y_1, y_2 \in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)$ таковы, что $y_1+y_2=y$. Отсюда выводим

$$S_{W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}}(y) \le \sup_{\substack{v\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|v\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} y_1(t)(I_{1,0}v)(t)dt + \sup_{\substack{w\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|w\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} y_2(t)(I_{0,1}w)(t)dt =$$

$$= \sup_{\substack{v\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|v\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} v(t)(I_{1,0}y_1)(t)dt + \sup_{\substack{w\in L_1^0(\mathbb{T}^2)\\ \|w\|_1\le 1}} \int\limits_{\mathbb{T}^2} w(t)(I_{0,1}y_2)(t)dt =$$

$$= E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty.$$

Следовательно,

$$S_{W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}}(y) \le \inf_{\substack{y_1,y_2\in L_\infty^0\\ y_1+y_2=y}} \{E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\}. \tag{3}$$

3. Неравенство для конволюции наилучших приближений частных первообразных суммами функций одной переменной. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой функции* $y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)$ *имеет место неравенство*

$$\inf_{y_1+y_2=y}\{E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\} \le \sqrt{2\|y\|_\infty E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty}. \tag{4}$$

Неравенство (4) *обращается в равенство для функции* $\sigma(t_1,t_2)=\operatorname{sign}\sin(t_1-t_2)$.

Доказательство. Для функции $y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)$ положим

$$y_2(t_1,t_2) = (S_{h,1}y)(t_1,t_2) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} y(t_1+u,t_2)du, \quad y_1 = y - y_2.$$

Поскольку

$$I_{0,1}(S_{h,1}y)(t_1,t_2)=\frac{1}{2h}[(I_{1,1}y)(t_1+h,t_2)-(I_{1,1}y)(t_1-h,t_2)],$$

то для произвольных функций $\phi,\psi\in C(\mathbb{T})$ будем иметь

$$(I_{0,1}y_2)(t_1,t_2)-\frac{1}{2h}\phi(t_1+h)+\frac{1}{2h}\phi(t_1-h)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left[(I_{1,1}y)(t_1+h,t_2)-\phi(t_1+h)-\psi(t_2)\right]-$$

$$-\frac{1}{2h}\left[(I_{1,1}y)(t_1-h,t_2)-\phi(t_1-h)-\psi(t_2)\right].$$

Следовательно,

$$\left\|(I_{0,1}y_2)(t_1,t_2)-\frac{1}{2h}\phi(t_1+h)+\frac{1}{2h}\phi(t_1-h)\right\|_\infty\le$$

$$\le\frac{1}{h}\left\|(I_{1,1}y)(t_1,t_2)-\phi(t_1)-\psi(t_2)\right\|_\infty$$

для любых $\phi(t_1)$ и $\psi(t_2)$, так что

$$E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\le\frac{1}{h}E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty.$$

Далее

$$(I_{1,0}y_1)(t_1,t_2)=(I_{1,0}y)(t_1,t_2)-\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}(I_{1,0}y)(t_1+u,t_2)du=$$

$$=\int\limits_{-h}^{h}I_{1,0}y(t_1+u,t_2)dg_h(u)=-\int\limits_{-h}^{h}g_h(u)y(t_1+u,t_2)du,$$

где

$$g_h(u)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{u}{2h}, & \text{если}\quad u\in[-h,0],\\[2mm] \dfrac{1}{2}-\dfrac{u}{2h}, & \text{если}\quad u\in(0,h].\end{cases}$$

Таким образом,

$$\|I_{1,0}y_1\|_\infty\le\frac{h}{2}\|y\|_\infty.$$

Суммируя полученные оценки, имеем

$$E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty+E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\le\frac{1}{h}E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty+\frac{h}{2}\|y\|_\infty.$$

Подставляя в правую часть

$$h=\left(\frac{2E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty}{\|y\|_\infty}\right)^{1/2}$$

и выполняя простые вычисления, получаем

$$E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty \le \sqrt{2\|y\|_\infty E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty}.$$

Следовательно,

$$\inf_{y_1+y_2=y}\{E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\} \le \sqrt{2\|y\|_\infty E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty}.$$

Неравенство (4) доказано.

Докажем теперь, что функция $y(t_1,t_2)=\sigma(t_1,t_2)$ обращает неравенство (4) в равенство. Как обычно, через $\varphi_r,\ r\in\mathbb{Z}_+$, будем обозначать идеальный сплайн Эйлера порядка r (определение и свойства эйлеровых идеальных сплайнов можно найти в [3], § 2.1). Для этого, прежде всего, покажем, что

$$E_{0,0}(I_{1,1}\sigma)_\infty = \|I_{1,1}\sigma\|_\infty = \|\varphi_2\|_\infty = \frac{\pi^2}{8}$$

и

$$\inf_{\substack{y_1,y_2\in L^0_\infty(\mathbb{T}^2)\\ y_1+y_2=\sigma}}\{E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\} = \|I_{1,0}\sigma\|_\infty = \|I_{0,1}\sigma\|_\infty = \|\varphi_1\|_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Для доказательства первого соотношения рассмотрим заданный на функциях из $C(\mathbb{T}^2)$ функционал

$$F(u) := \frac{1}{4}\{u(0,0)-u(0,\pi)-u(\pi,0)+u(\pi,\pi)\}.$$

Ясно, что $\|F\|=1$ и $F(\phi(t_1)+\psi(t_2))=0$. Используя теорему двойственности для наилучшего приближения подпространством функций вида $\phi(t_1)+\psi(t_2)$, получаем

$$E_{0,0}(I_{1,1}\sigma)_\infty \ge |F(I_{1,1}\sigma)| = \|\sigma\|_\infty = \|\varphi_2\|_\infty.$$

Неравенство

$$E_{0,0}(I_{1,1}\sigma)_\infty \le |\varphi_2|_\infty$$

очевидно. Первое соотношение доказано.

Теперь докажем второе утверждение. Для линейного нормированного пространства X рассмотрим $X\times X$. Снабдим его покоординатной линейной структурой и нормой

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Любой линейный функционал $F\in(X\times X)^*$ будет иметь вид

$$F((x,y)) = F_1(x) + F_2(y),$$

где $F_1,F_2\in X^*$ $(F_1(x)=F((x,0)),\ \ F_2(y)=F((0,y)))$. При этом

$$\|F\| = \max\{\|F_1\|,\|F_2\|\}.$$

Мы хотим показать, что

$$\inf_{u\in L^0_\infty(\mathbb{T}^2)}\{E_{0,0}(I_{1,0}\sigma - I_{1,0}u)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}u)_\infty\} = \|\varphi_1\|_\infty.$$

Величину, стоящую в левой части, запишем в виде (смысл используемых обозначений очевиден)

$$\inf_{u}\inf_{\{\phi(t_1)+\psi(t_2)\}}\inf_{\{\xi(t_1)+\eta(t_2)\}}\{\|I_{1,0}\sigma(t_1,t_2)-(I_{1,0}u)(t_1,t_2)-\phi(t_1)-\psi(t_2)\|_\infty+$$

$$+\|(I_{0,1}u)(t_1,t_2)-\xi(t_1)-\eta(t_2)\|_\infty\}$$

и будем рассматривать ее как наилучшее приближение пары $(I_{1,0}\sigma(t_1,t_2),0)$ парами вида $((I_{1,0}u)(t_1,t_2)+\phi(t_1)+\psi(t_2),(I_{0,1}u)(t_1,t_2)+\xi(t_1)+\eta(t_2))$ (такие пары образуют подпространство в пространстве $L^0_\infty(\mathbb{T}^2)\times L^0_\infty(\mathbb{T}^2)$).

На пространстве $L^0_\infty(\mathbb{T}^2)\times L^0_\infty(\mathbb{T}^2)$ определим функционал $F=F_1+F_2$, где

$$F_1(u)=F_2(u)=\frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}u(t,t)dt-\int\limits_0^{2\pi}u(t,t-\pi)dt\right\}.$$

Легко проверить, что $\|F_1\|\le 1$ и $\|F_2\|\le 1$. Кроме того,

$$F_1(\phi(t_1)+\psi(t_2))=0,\qquad F_2(\xi(t_1)+\eta(t_2))=0,$$

так как для $u(t_1,t_2)=\phi(t_1)$ будет $u(t_1,t_1)=u(t_1,t_1-\pi)$, а для $u(t_1,t_2)=\psi(t_2)$ —

$$\int\limits_0^{2\pi}\psi(t)dt-\int\limits_0^{2\pi}\psi(t-\pi)dt=0.$$

Покажем, что

$$F_1(I_{1,0}u)+F_2(I_{0,1}u)=0.$$

Имеем

$$(I_{1,0}u)(t_1,t_2)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(v,t_2)dv,$$

$$(I_{1,0}u)(t_1,t_1)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(v,t_1)dv$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{1,0}u)(t_1,t_1)dt_1=\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(v,t_1)dv.$$

Далее

$$(I_{0,1}u)(t_1,t_2)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_2-v)u(t_1,v)dv,$$

$$(I_{0,1}u)(t_1,t_1)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(t_1,v)dv$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{0,1}u)(t_1,t_1)dt_1=\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(t_1,v)dv=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}dv\int\limits_0^{2\pi}B_1(v-t_1)u(t_1,v)dt_1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{1,0}u)(t_1,t_1)dt_1+\int\limits_0^{2\pi}(I_{0,1}u)(t_1,t_1)dt_1=0.$$

Продолжим:

$$(I_{1,0}u)(t_1,t_1-\pi)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(v,t_1-\pi)dv,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{1,0}u)(t_1,t_1-\pi)dt_1=\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-v)u(v,t_1-\pi)dv,$$

$$(I_{0,1}u)(t_1,t_1-\pi)=\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-\pi-v)u(t_1,v)dv,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{0,1}u)(t_1,t_1)dt_1=\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}B_1(t_1-\pi-v)u(t_1,v)dv=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}B_1(v+\pi-t_1)u(t_1,v)dv=-\int\limits_0^{2\pi}dw\int\limits_0^{2\pi}B_1(w-t_1)u(t_1,w-\pi)dv.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi}(I_{1,0}u)(t_1,t_1-\pi)dt_1+\int\limits_0^{2\pi}(I_{0,1}u)(t_1,t_1-\pi)dt_1=0.$$

Второе утверждение доказано.

Наконец,

$$\inf_u\inf_{\{\phi(t_1)+\psi(t_2)\}}\inf_{\{\xi(t_1)+\eta(t_2)\}}\{\|I_{1,0}\sigma(t_1,t_2)-(I_{1,0}u)(t_1,t_2)-\phi(t_1)-\psi(t_2)\|_\infty+$$

$$+\|(I_{0,1}u)(t_1,t_2)-\xi(t_1)-\eta(t_2)\|_\infty\} \geq |F_1(I_{1,0}\sigma(t_1,t_2))| =$$

$$= |F_1(\varphi_1(t_1-t_2))| = \frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(0)dt_1 - \int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(\pi)dt_1\right| = |\varphi_1(0)| = \|\varphi_1\|_\infty.$$

Поскольку неравенство

$$\inf_u \inf_{\{\phi(t_1)+\psi(t_2)\}} \inf_{\{\xi(t_1)+\eta(t_2)\}}\{\|I_{1,0}\sigma(t_1,t_2)-(I_{1,0}u)(t_1,t_2)-\phi(t_1)-\psi(t_2)\|_\infty+$$

$$+\|(I_{0,1}u)(t_1,t_2)-\xi(t_1)-\eta(t_2)\|_\infty\} \leq \|I_{1,0}\sigma\|_\infty = \|\varphi_1\|_\infty$$

очевидно, имеем

$$\inf_u \inf_{\{\phi(t_1)+\psi(t_2)\}} \inf_{\{\xi(t_1)+\eta(t_2)\}}\{\|\varphi_1(t_1-t_2)-(I_{1,0}u)(t_1,t_2)-\phi(t_1)-\psi(t_2)\|_\infty+$$

$$+\|(I_{0,1}u)(t_1,t_2)-\xi(t_1)-\eta(t_2)\|_\infty\} = \|\varphi_1\|_\infty.$$

Подставляя полученные значения в неравенство (4), получаем равенство.

Теорема 1 доказана.

4. Оценка приближения класса $W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}$ гомотетами класса $W_1^{1,1}$.

Теорема 2. *Для любого $N>0$ справедлива оценка*

$$E(W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}, NW_1^{1,1})_1 \leq \frac{1}{2N}.$$

Доказательство. Используя соотношения (1)–(4), имеем

$$E(W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}, NW_1^{1,1})_1 = \sup_{\substack{y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)\\ \|y\|_\infty\leq 1}}\Big(S_{W_1^{1,0}\cap W_1^{0,1}}(y) - NS_{W_1^{1,1}}(y)\Big) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)\\ \|y\|_\infty\leq 1}}\left\{\inf_{y_1+y_2=y}\{E_{0,0}(I_{1,0}y_1)_\infty + E_{0,0}(I_{0,1}y_2)_\infty\} + NE_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)\\ \|y\|_\infty\leq 1}}\left\{\sqrt{2\|y\|_\infty E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty} + NE_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y\in L_\infty^0(\mathbb{T}^2)\\ \|y\|_\infty\leq 1}}\left\{\sqrt{2E_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty} + NE_{0,0}(I_{1,1}y)_\infty\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda>0}\left\{\sqrt{2\lambda}+N\lambda\right\} = \frac{1}{2N}.$$

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – **11**. – С. 44 – 66.
2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – № 6. – С. 88 – 124.
3. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
4. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 67 – 78.
5. *Тимощин О. А.* Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. – 1995. – **344**, № 1. – С. 20 – 22.
6. *Бабенко В. Ф.* О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Доп. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 7 – 11.
7. *Арестов В. В.* О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 3 – 26.
8. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
9. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
10. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982.
11. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Proc. Mannheim Conf. “Multivariate Approximation and Splines”, 1997. – P. 1 – 12.
12. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
13. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 5 – 101.

Получено 25.10.18