УДК 517.518.2

Г. М. Григорян (Ереван. гос. ун-т, Армения),
В. Г. Кротов (Белорус. гос. ун-т, Минск, Беларусь)

КВАЗИБЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ФАБЕРА – ШАУДЕРА

We prove that, for any $0 < \delta < 1$, there exists a measurable set $E_\delta \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}\,(E_\delta) > 1-\delta$, such that for any function $f \in C[0,1]$, one can find a function $\widetilde{f} \in C[0,1]$ that coincides with f on E_δ, and the Fourier – Faber – Schauder series for the function $\widetilde{f}$ unconditionally converges in $C[0,1]$. Moreover, the moduli of the nonzero Fourier – Faber – Schauder coefficients of the function $\widetilde{f}$ coincide with the elements of a given sequence $\{b_n\}$ satisfying the condition

$$b_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = +\infty.$$

Доведено, що для будь-якого $0 < \delta < 1$ існує така вимірна множина $E_\delta \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}\,(E_\delta) > 1-\delta$, що для будь-якої функції $f \in C[0,1]$ можна знайти функцію $\widetilde{f} \in C[0,1]$, яка збігається з f на E_δ, і ряд Фур'є – Фабера – Шаудера для $\widetilde{f}$ збігається безумовно в $C[0,1]$. При цьому модулі ненульових коефіцієнтів Фур'є – Фабера – Шаудера функції $\widetilde{f}$ збігаються з елементами заданої послідовності $\{b_n\}$, що задовольняє умову

$$b_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = +\infty.$$

1. Основные результаты. ***1.1. Определения.*** Система $\{f_n\} \subset X$ элементов банахова пространства X называется базисом, если для любого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по этой системе, сходящийся к f по норме в X, кроме того, базис называется безусловным, если любая его перестановка также является базисом (см., например, [1], глава 1, § 4).

Мы рассматриваем пространство $C[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$, снабженное обычной чебышевской нормой

$$f = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

В этом пространстве базисом (причем, исторически первым) является система Фабера – Шаудера $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, введенная впервые Г. Фабером [2] и переоткрытая позже Ю. Шаудером [3].

Введем обозначения

$$\Delta_k^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \quad i = 1,\ldots,2^k,$$

причем промежуток $\Delta_k^{(2^k)}$ замкнут и справа. Такие промежутки обычно называют двоичными. Мы будем использовать для них также нумерацию с одним индексом, полагая $\Delta_n = \Delta_k^{(i)}$, если $n \ge 2$ представлено в виде $n = 2^k + i$, где $k \ge 0$ и $1 \le i \le 2^k$. Пусть $x_n = x_k^{(i)} = (2i-1)2^{-k-1}$ — середина интервала Δ_n и, кроме того, $\mathcal{D}$ — множество всех таких интервалов.

Система функций Фабера – Шаудера определяется на $[0,1]$ следующим образом (см., например, [1], глава 6, § 1): $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = x$, а если $2 \le n = 2^k + i$ $(k \ge 0,\ 1 \le i \le 2^k)$, то $\varphi_n \in C[0,1]$ и

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad x = x_n, \\ \text{линейна на каждом из интервалов} \quad \Delta_{k+1}^{(2i-1)}, \quad \Delta_{k+1}^{(2i)}, \\ 0 \quad \text{при} \quad x \notin \Delta_k^{(i)}. \end{cases} \tag{1}$$

Базисное разложение по системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ (ряд Фурье – Фабера – Шаудера) функции $f \in \in C[0,1]$ имеет вид (см., например, [1], глава 6, § 1)

$$f \overset{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n,$$

где

$$A_0(f) = f(0), \quad A_1(f) = f(1) - f(0),$$

а при $n \geq 2$

$$A_n(f) = A_k^{(i)}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right]. \tag{2}$$

1.2. Свойство квазибезусловной базисности. Как отмечалось выше, система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в $C[0,1]$, однако не является безусловным базисом. Более того, в пространстве $C[0,1]$ вообще нет безусловных базисов [4] (см. также [1], глава 6, § 1).

Целью настоящей работы является доказательство того, что система Фабера – Шаудера имеет свойство, подобное безусловной базисности, если пренебречь некоторым универсальным множеством сколь угодно малой меры. Чтобы перейти к точным формулировкам, нам понадобится ряд обозначений и терминов.

Спектром Фабера – Шаудера функции $f \in C[0,1]$ будем называть множество

$$\mathrm{Spec}(f) = \{n \colon A_n(f) \neq 0\}.$$

Меру Лебега множества $E \subset [0,1]$ будем обозначать через $\mathrm{mes}(E)$, $\mathcal{B}$ — класс убывающих последовательностей $\{b_n\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = +\infty. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой последовательности $\{b_n\} \in \mathcal{B}$ существует такая последовательность знаков $\{\lambda_n = \pm 1\}$, что для любого $0 < \delta < 1$ можно построить измеримое множество $E_\delta \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E_\delta) > 1-\delta$, такое, что для любой функции $f \in C[0,1]$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in C[0,1]$ со следующими свойствами:*

1) *$f(x) = \widetilde{f}(x)$ для всех $x \in E_\delta$,*
2) *$A_n(\widetilde{f}) = \lambda_n b_n$ для всех $n \in \mathrm{Spec}(\widetilde{f})$,*
3) *ряд Фурье – Фабера – Шаудера $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\widetilde{f})\varphi_n$ функции $\widetilde{f}$ сходится безусловно в $C[0,1]$,*
4) *$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n(\widetilde{f})|\varphi_n \leq 4\,\|f\|$.*

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $0 < \delta < 1$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E_\delta) > 1-\delta$, что для любой функции $f \in C[0,1]$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in C[0,1]$, которая совпадает с f на E_δ, и ряд Фурье – Фабера – Шаудера функции $\widetilde{f}$ сходится безусловно в $C[0,1]$.*

Принципиальным здесь является то, что для каждого $0 < \delta < 1$ множество E_δ универсально — оно не зависит от функции f. Свойство системы Фабера – Шаудера, сформулированное в теореме 2, мы называем свойством квазибезусловной базисности.

Теорема 2 справедлива не для любого базиса в пространстве $C[0,1]$. Она неверна, например, для системы Франклина — в работе [7] показано, что для любого множества $E \subset [0,1]$ положительной лебеговой меры с точкой плотности x_0 можно построить такую непрерывную функцию $f_0 \in C[0,1]$, что для любой ограниченной измеримой функции g, совпадающей с f_0 на множестве E, ряд Фурье – Франклина не сходится абсолютно в точке x_0.

Интересно было бы выяснить, существует ли ортонормированный базис в пространстве $C[0,1]$, для которого справедливо утверждение теоремы 2?

Кроме того, в пространстве $L^1[0,1]$ также нет безусловного базиса [4] (см. также [1], глава 6, § 1). Нам неизвестно, существует ли базис в $L^1[0,1]$ со свойством квазибезусловной базисности.

Утверждения типа теоремы 2 восходят к Н. Н. Лузину [8], доказавшему, что любая измеримая функция является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры (C-свойство Лузина). Важное и глубокое усиление C-свойства Лузина было обнаружено Д. Е. Меньшовым [9], установившим, что 2π-периодическую измеримую функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы тригонометрический ряд Фурье исправленной функции сходился равномерно.

В дальнейшем задачи исправления до непрерывной функции, имеющей дополнительные «хорошие» свойства ряда Фурье по той или иной системе функций, изучались многими авторами (см., например, обзор [10]). Отметим еще работы [11 – 13], в которых рассматривались близкие вопросы о сходимости рядов по системе Фабера – Шаудера. В частности, в [13] доказано, что любую измеримую на $[0,1]$ функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры таким образом, чтобы ряд Фурье – Фабера – Шаудера исправленной функции сходился к ней абсолютно и равномерно.

2. Доказательства. ***2.1. Вспомогательные утверждения.*** Обозначим через $\operatorname{supp} f$ носитель функции f (множество точек, в которых ее значения отличны от нуля).

Лемма 1. *Пусть заданы последовательность* $\{b_n\} \in \mathcal{B}$, *числа* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$, *номер* $m \in \mathbb{N}$ *и интервал* $\Delta \subset [0,1]$. *Тогда существует конечное множество* $\omega \subset \mathbb{N}$ *со свойствами:*

1) $\min \omega \geq m$,

2) $\sum_{n\in\omega} b_n \varphi_n(x) \leq |\gamma|$ *при всех* $x \in [0,1]$,

3) $\operatorname{supp}\left(\sum_{n\in\omega} b_n\varphi_n\right) \subset \Delta$,

4) $\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta \colon \left|\operatorname{sign}\gamma\left(\sum_{n\in\omega} b_n\varphi_n(x)\right) - \gamma\right| > \delta\right\} < \varepsilon$.

Это утверждение приведено в [5] (лемма 1) (см. также [6], лемма 3.2).

Пусть заданы $k \in \mathbb{N}$ и набор действительных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2^k}$. Эти параметры задают ступенчатую функцию вида

$$s(x) = \sum_{i=1}^{2^k} \gamma_i \chi_{\Delta_k^{(i)}}(x) = \gamma_i \quad \text{при} \quad x \in \Delta_k^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, 2^k. \tag{4}$$

Здесь χ_Δ — характеристическая функция множества $\Delta \subset [0,1]$.

Следующее утверждение подобно лемме 2 из работы авторов [5], но отличается от последней рядом деталей.

Лемма 2. *Пусть* $\{b_n\} \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$. *Кроме того, пусть еще задана ступенчатая функция* s *вида* (4). *Тогда существуют конечное множество* $\omega \subset \mathbb{N}$ *и набор знаков* $\lambda_n = \pm 1$, $n \in \omega$, *определяющие полином*

$$p = \sum_{n\in\omega} \lambda_n b_n \varphi_n \tag{5}$$

по системе Фабера – Шаудера, а также измеримое множество $E \subset [0,1]$ *и функция* $g \in \in C[0,1]$ *со свойствами:*

1) $\min\omega \geq m$,
2) $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$,
3) $g(x) = s(x)$ *при всех* $x \in E$,
4) $g = s = \max_{1\leq i\leq 2^k} |\gamma_i|$,
5) $\|g - p\| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Для каждого $i = 1, \ldots, 2^k$ применим лемму 2 с параметрами γ_i, $\varepsilon 2^{-k}$, ε, m и $\Delta_k^{(i)}$, определив множество индексов $\omega_i \subset \mathbb{N}$ таким образом, чтобы $\min\omega_i > m$ и выполнялись условия

$$p_i(x) \equiv \sum_{n\in\omega_i} b_n\varphi_n(x) \leq |\gamma_i|, \quad x \in [0,1],$$

$$\operatorname{supp} p_i \subset \Delta_k^{(i)}, \tag{6}$$

$$\mathrm{mes}\left\{x \in \Delta_k^{(i)} :\ \operatorname{sign}\gamma_i p_i(x) - \gamma_i > \varepsilon\right\} < \varepsilon 2^{-k}. \tag{7}$$

Отметим, что из (6) и определения системы Фабера – Шаудера (1) следует, что множества $\omega_i = \operatorname{Spec} p_i$ попарно не пересекаются. Поэтому если мы положим

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{2^k} \omega_i, \quad \lambda_n = \operatorname{sign}\gamma_i \quad \text{при всех} \quad n \in \omega_i, \quad i = 1, \ldots, 2^k,$$

то будет определен полином (5), причем

$$p = \sum_{i=1}^{2^k} \operatorname{sign}\gamma_i p_i. \tag{8}$$

Обозначим также

$$E = \bigcup_{i=1}^{2^k} E_i, \quad E_i = \left\{x \in \Delta_k^{(i)} :\ |\operatorname{sign}\gamma_i p_i(x) - \gamma_i| \leq \varepsilon\right\},$$

$$g = \sum_{i=1}^{2^k} g_i, \quad g_i(x) = \begin{cases} \gamma_i, & x \in E_i, \\ \operatorname{sign}\gamma_i p_i(x), & x \in \Delta_k^{(i)} \setminus E_i, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \Delta_k^{(i)}, \end{cases}$$

и покажем, что найденные $p,\ E$ и g удовлетворяют нужным условиям, кроме непрерывности функции g.

Свойство 1 очевидно, свойство 2 вытекает из (7):

$$\operatorname{mes}(E) = \sum_{i=1}^{2^k} \operatorname{mes}(E_i) > \sum_{i=1}^{2^k} \left(\operatorname{mes}\left(\Delta_k^{(i)}\right) - \varepsilon 2^{-k} \right) = 1 - \varepsilon,$$

свойства 3 и 4 выполнены по определению g (см. также (8)). Наконец, свойство 5 следует из определений g и E:

$$\|g - p\| = \max_{1 \le i \le 2^k} \sup_{x \in \Delta_k^{(i)}} |g_i(x) - \operatorname{sign}\gamma_i p_i(x)| \le \varepsilon.$$

Осталось подправить функцию g так, чтобы она, сохраняя уже полученные свойства, стала непрерывной. Это можно сделать следующим образом.

Для каждого $i = 1, \ldots, 2^k$ множество $\Delta_k^{(i)} \setminus E_i$ является объединением конечного числа отрезков $\Delta \subset \Delta_k^{(i)}$, только на концах каждого из которых функция g может быть разрывной. Для устранения этих разрывов рассмотрим отдельно различные случаи расположения Δ относительно $\Delta_k^{(i)}$.

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ лежит строго внутри $\Delta_k^{(i)}$, тогда $p(\alpha) = p(\beta) = \gamma_i - \operatorname{sign}\gamma_i\varepsilon$. Возьмем такой интервал $(\alpha', \beta') \subset \Delta_k^{(i)}$, чтобы $\Delta \subset (\alpha', \beta')$ и его длина была достаточно близка к длине Δ. Переопределим теперь функцию g на $[\alpha', \alpha]$, полагая $g(\alpha') = \gamma_i,\ g(\alpha) = \gamma_i - \operatorname{sign}\gamma_i\varepsilon$, и линейно интерполируем ее на (α', α). Аналогично переопределим g на (β, β').

Подобным образом следует корректировать функцию g и в случае, когда один из концов Δ совпадает с концом $\Delta_k^{(i)}$. В таком случае коррекция должна проводиться только на малом отрезке, прилегающем к Δ изнутри $\Delta_k^{(i)}$. В другом конце Δ функция g непрерывна, так как совпадает в некоторой окрестности этого конца с непрерывной функцией p.

Лемма 2 доказана.

***2.2. Доказательство теоремы* 1.** Множество всех ступенчатых функций вида (4), принимающих рациональные значения $\gamma_i \in \mathbb{Q}$, счетно. Занумеруем их в последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ и с помощью леммы 2 построим последовательности измеримых множеств $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$, функций $\{g_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C[0,1]$ и полиномов $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ вида

$$p_j = \sum_{n \in \omega_j} \lambda_n b_n \varphi_n, \quad \lambda_n \pm 1, \tag{9}$$

где $\omega_j \subset \mathbb{N}$ — конечные множества, причем

$$\min \omega_{j+1} > \max \omega_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

При этом выполняются следующие условия:

$$g_j(x) = S_j(x) \quad \text{при} \quad x \in E_j, \tag{11}$$

$$\operatorname{mes}(E_j) > 1 - 4^{-8(j+2)}, \tag{12}$$

$$\|g_j\| = \|S_j\|, \tag{13}$$

$$\|g_j - p_j\| < 4^{-8(j+2)}, \tag{14}$$

$$\left\| \sum_{n\in\omega_j} b_n\varphi_n \right\| < 2\|S_j\|. \tag{15}$$

Построив такие последовательности, для любого $\delta \in (0,1)$ введем множество

$$E_\delta = \bigcap_{j=N}^{\infty} E_j, \quad \text{где} \quad N = [-\log_2 \delta] + 1, \tag{16}$$

тогда из (12) и (16) вытекает неравенство $\operatorname{mes}(E_\delta) > 1 - \delta$.

Пусть теперь задана произвольная функция $f \in C[0,1]$, отличная от тождественного нуля. Обозначим через $\mathcal{S}$ класс функций, представимых в виде суммы непрерывной функции и ступенчатой функции вида (4), и перейдем к построению функции $\widetilde{f}$ из теоремы 1, использовав индуктивный процесс.

Из последовательности $\{S_j\}$ можно выделить подпоследовательность $\{S_{j_l}\}$ таким образом, чтобы $j_1 > N$ и выполнялись следующие условия:

$$f \overset{C}{=} \sum_{l=1}^{\infty} S_{j_l}, \tag{17}$$

$$\|S_{j_l}\| < \|f\| 4^{-8(l+2)} \quad \text{при} \quad l \geq 2. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, в частности, что

$$\|f - S_{j_1}\| < \frac{1}{2}\|f\|, \quad \|S_{j_1}\| < \frac{3}{2}\|f\|. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$G_1 = g_{j_1}, \quad \Omega_1 = \omega_{j_1}, \quad P_1 = p_{j_1} = \sum_{n\in\Omega_1} \lambda_n b_n \varphi_n. \tag{20}$$

Используя соотношения (11), (15), (19) и (20), получаем

$$G_1(x) = S_{j_1}(x) \quad \text{при} \quad x \in E_{j_1},$$

$$\left\| \sum_{n\in\Omega_1} b_n\varphi_n \right\| \leq 2\|S_{j_1}\| < 3\|f\|. \tag{21}$$

Предположим, что уже определены номера $j_1 = \nu_1 < \ldots < \nu_{m-1}$, функции $G_l \in \mathcal{S}$ и полиномы

$$P_l = \sum_{n\in\Omega_l} \lambda_n b_n \varphi_n, \quad \lambda_n = \pm 1, \tag{22}$$

удовлетворяющие следующим условиям при $l = 1, \ldots, m-1$:

$$\min \Omega_l > \max \Omega_{l-1}, \tag{23}$$

$$G_l(x) = S_{j_l}(x) \quad \text{при} \quad x \in E_\delta, \tag{24}$$

$$\left\| \sum_{n \in \Omega_l} b_n \varphi_n \right\| < 4^{-8l} \|f\|, \quad l \geq 2, \tag{25}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} [P_k - G_k] \right\| < 4^{-8(l+1)} \|f\|, \tag{26}$$

$$\|G_l\| < 4^{-3l} \|f\|, \quad l \geq 2. \tag{27}$$

Покажем, как определить номер ν_m, функцию f_m и полином P_m, чтобы условия (23)–(27) выполнялись и при $l = m$.

Число $\nu_m > \nu_{m-1}$ выберем настолько большим, чтобы выполнялись условие (23) при $l = m$ и неравенство

$$\left\| S_{\nu_m} - \left[S_{j_m} - \sum_{k=1}^{m-1} [P_k - G_k] \right] \right\| < 4^{-8(m+2)} \|f\|. \tag{28}$$

Поскольку из (18) и (26) следует, что

$$\left\| S_{j_m} - \sum_{k=1}^{m-1} [P_k - G_k] \right\| < 4^{-8(m+1)} \|f\|,$$

то, учитывая (28), получаем неравенство

$$\|S_{\nu_m}\| < 4^{-8m+2} \, \|f\| \,. \tag{29}$$

Покажем, что полином

$$P_m = p_{\nu_m} = \sum_{n \in \Omega_m} \lambda_n b_n \varphi_n, \quad \text{где} \quad \Omega_m = \omega_{\nu_m}$$

(см. (9)), и функция

$$G_m = S_{j_m} + [g_{\nu_m} - S_{\nu_m}] \tag{30}$$

имеют нужные свойства (ясно, что $G_m \in \mathcal{S}$).

Действительно, в силу соотношений (15) и (29)

$$\left\| \sum_{n \in \Omega_m} b_n \varphi_n \right\| \leq 4 \|S_{\nu_m}\| < 4^{-8m} \|f\|.$$

Кроме того, в силу (11) и (30)

$$G_m(x) = S_{j_m}(x) \quad \text{при} \quad x \in E_{\nu_m}.$$

Далее, используя последовательно неравенства (28) и (14) (см. также (30)), получаем

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}[P_k - G_k]\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m-1}[P_k - G_k] + [P_m - G_m]\right\| \le$$

$$\le \left\|S_{\nu_m} - \left[S_{j_m} - \sum_{k=1}^{m-1}[P_k - G_k]\right]\right\| + \|p_{\nu_m} - g_{\nu_m}\| < 4^{-8m-9}\|f\|.$$

Наконец, из (30) выводим

$$\|G_m\| \le \left\|S_{\nu_m} - \left[S_{j_m} - \sum_{k=1}^{m-1}[P_k - G_k]\right]\right\| +$$

$$+\|g_{\nu_m}\| + \left\|\sum_{k=1}^{m-1}[P_k - G_k]\right\| < 4^{-8m+3}\|f\|.$$

Таким образом, индуктивное построение последовательностей ν_l, G_l и P_l завершено, при этом для всех $l \in \mathbb{N}$ выполняются условия (23) – (27).

Определим теперь искомую функцию $\widetilde{f}$ следующим образом:

$$\widetilde{f} \overset{C}{=} \sum_{l=1}^{\infty} P_l \tag{31}$$

(см. (22)) и покажем, что она удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.

Из неравенств (25) следует, что ряд (31) сходится равномерно, поэтому ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n\in\Omega_l} \lambda_n b_n \varphi_n$$

(с раскрытыми скобками) является рядом Фурье – Фабера – Шаудера функции $\widetilde{f}$, так как в силу (23) $\min \operatorname{Spec} P_l > \max \operatorname{Spec} P_{l-1}$.

Кроме того, в силу неравенств (25) ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{n\in\Omega_l} b_n \varphi_n \right)$$

сходится равномерно, поэтому этот ряд с раскрытыми скобками также сходится равномерно. Это означает равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| A_n\left(\widetilde{f}\right)\right| \varphi_n,$$

т. е. ряд Фурье – Фабера – Шаудера функции $\widetilde{f}$ сходится безусловно в $C[0,1]$.

Учитывая соотношения (21) и (25), получаем неравенства

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \left| A_n\left(\widetilde{f}\right)\right| \varphi_n\right\| \le \left\|\sum_{n\in\Omega_1} b_n\varphi_n\right\| + \sum_{l=2}^{\infty}\left\|\sum_{n\in\Omega_l} b_n\varphi_n\right\| \le 3\|f\| + \|f\|,$$

и утверждение 4 теоремы 1 доказано.

Докажем, наконец, что функции f и $\widetilde{f}$ совпадают на множестве E_δ (см. (16)). Из неравенств (26) следует, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}[P_k(x) - G_k(x)]$$

сходится к нулю равномерно на $[0,1]$, поэтому

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} G_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} S_{j_l}(x) = f(x)$$

при $x \in E_\delta$, так как для таких x справедливы равенства (24) (см. также (17)).

Теорема 1 доказана.

3. Заключительные замечания. Отметим, что условие расходимости ряда в (3) существенно для справедливости теоремы 1 — без него она теряет силу. Это следует из работы [5] (теорема 2).

Роль условия (3) в доказательствах состоит в том, что из него следует условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x) = +\infty \quad \text{почти всюду на} \quad [0,1]$$

(см. доказательство леммы 1 в работе [5]), которое затем используется для вывода леммы 1. Поэтому теорема 1 сохранит силу, если условие $\{b_n\} \in \mathcal{B}$ (см. (3)) заменить в ней на следующее:

$$b_n \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x) = +\infty \quad \text{почти всюду.}$$

Наконец, выбор знаков $\lambda_n = \pm 1$ в формулировке теоремы 1 можно исключить, потребовав, однако, чтобы в последовательности $\{b_n\}$ было достаточно много положительных и отрицательных чисел. Именно, рассмотрим условие

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\pm}\varphi_n(x) = \pm\infty \quad \text{почти всюду,} \tag{32}$$

в котором использовано стандартное обозначение $b^+ = \max\{b, 0\}$, $b^- = b - b^+$ для положительной и отрицательной частей числа b.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* (32). *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует измеримое множество* $E_\delta \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E_\delta) > 1-\delta$, *такое, что для любой функции* $f \in C[0,1]$ *можно найти функцию* $\widetilde{f} \in C[0,1]$ *со следующими свойствами:*

1) $f(x) = \widetilde{f}(x)$ *для всех* $x \in E_\delta$,
2) $A_n(\widetilde{f}) = b_n$ *для всех* $n \in \mathrm{Spec}(\widetilde{f})$,
3) *ряд Фурье – Фабера – Шаудера* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\widetilde{f})\varphi_n$ *функции* $\widetilde{f}$ *сходится безусловно в* $C[0,1]$,
4) $\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left|A_n\left(\widetilde{f}\right)\right|\Phi_n\right\| \leq 4\|f\|$.

Литература

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.
2. *Faber G.* Über die Orthogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verien. – 1910. – **19**. – S. 104 – 112.
3. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen // Math. Z. – 1927. – **26**. – S. 47 – 65.
4. *Karlin S.* Bases in Banach spaces // Duke Math. J. – 1948. – **15**, № 4. – P. 971 – 985.
5. *Григорян М. Г., Кротов В. Г.* Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера – Шаудера // Мат. заметки. – 2013. – **93**, № 3. – С. 172 – 178.
6. *Кротов В. Г.* Представление измеримых функций рядами по системе Фабера – Шаудера и универсальные ряды // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 1. – С. 215 – 229.
7. *Галоян Л. Н., Григорян М. Г., Кобелян А. Х.* О сходимости рядов Фурье по классическим системам // Мат. сб. – 2015. – **206**, № 7. – С. 55 – 94.
8. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления // Мат. сб. – 1912. – **28**, № 2. – С. 266 – 294.
9. *Menchoff D.* Sur la convergence uniforme des series de Fourier // Мат. сб. – 1942. – **53**, № 1. – С. 67 – 96.
10. *Ульянов П. Л.* О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 3. – С. 15 – 70.
11. *Кротов В. Г.* Об универсальных рядах Фурье по системе Фабера – Шаудера // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. – 1975. – № 4. – С. 53 – 58.
12. *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера – Шаудера // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 5. – С. 3 – 26.
13. *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* Unconditional C-strong property of Faber – Schauder system // J. Math. Anal. and Appl. – 2009. – **352**, № 2. – P. 718 – 723.
14. *Grigoryan T. M.* On the unconditional convergence of series with respect to the Faber – Schauder system // Anal. Math. – 2013. – **39**, № 1. – P. 56 – 67.

Получено 06.10.18