УДК 519.21

К. С. Акбаш, О. П. Макарчук (Центральноукр. держ. пед. ун-т ім. В. Винниченка)

ПРО ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ В БАНАХОВИХ ІДЕАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Asymptotic estimates are obtained in the law of the iterated logarithm for the extreme values of a sequence of independent random variables in Banach spaces.

Отримано асимптотичні оцінки в законі повторного логарифма для екстремальних значень послідовності незалежних випадкових величин у банахових просторах.

1. Вступ. Нехай $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин із функцією розподілу $F(x)$ і F має додатну похідну $F'(x)$ для всіх достатньо великих x, тобто існує таке число x_0, що

$$F'(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0; +\infty]. \tag{1}$$

Покладемо

$$z_n = \max_{1 \le i \le n} \xi_i.$$

Закон повторного логарифма для схеми максимуму в одновимірному випадку вивчався у роботах [1 – 3]. Відомо (див., наприклад, [1, 4]), що асимптотичні властивості послідовності (z_n) тісно пов'язані з асимптотикою функцій

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}, \qquad g(x) = f(x) \ln\ln \left\{ \frac{1}{1 - F(x)} \right\}.$$

Так, у роботі [1] отримано такі асимптотичні співвідношення для незалежних випадкових величин майже напевно (м.н.):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 1, \tag{2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 0, \tag{3}$$

де

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

$$F^{-1}(y) = \inf\left\{x : F(x) \ge y\right\} \quad \text{обернена до} \quad F(x),$$

при умові, що

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0. \tag{4}$$

У роботі [3] рівність (3) було уточнено до рівності

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n} = -1.$$

У даній статті закон повторного логарифма (2), (3) поглиблено на банахові ідеальні простори.

2. Асимптотичні оцінки для схеми максимуму в ідеальних банахових просторах. Наведемо кілька основних означень.

Означення 1 [5, с. 1]. *Частково впорядкований банахів простір B з нормою* $\|\cdot\|$ *над полем дійсних чисел називається банаховою ґраткою, якщо виконуються умови*:

(a) $x \le y \Rightarrow x + z \le y + z \ \forall x, y, z \in B$;

(b) $ax \ge 0$ *при* $a \ge 0,\ x \ge 0,\ x \in B,\ a \in \mathbf{R}^1$;

(c) *для будь-яких* $x, y \in B$ *існують точна верхня* $\sup(x, y)$ *і нижня* $\inf(x, y)$ *межі*;

(d) $|x| \le |y| \Rightarrow \|x\| \le \|y\| \ \forall x \in B$, *де* $|x| = \sup(x, -x)$.

Важливим прикладом банахової ґратки є банахів ідеальний простір. Це банахів простір E (класів) вимірних функцій на вимірному просторі (T, Λ, μ), де μ — σ-скінченна, σ-адитивна міра, для якої $|x| \le |y|$ майже скрізь, і з того, що y належить E, випливає, що x належить E і $\|x\| \le \|y\|$. Поняття банахового ідеального простору близьке до поняття функційного простору Кете з [5].

У банаховій ґратці поряд із збіжністю за нормою можна розглядати порядкову збіжність (o-збіжність).

Означення 2 [7, с. 365]. *Послідовність елементів* (x_n) *банахової ґратки B називається o-збіжною до елемента* x:

$$x = o - \lim_{n\to\infty} x_n,$$

якщо існує така послідовність $(v_n) \in B$, *що*

$$v_n \downarrow 0, \qquad |x - x_n| < v_n,$$

тобто

$$v_1 \ge v_2 \ge \ldots, \qquad \inf_{n\ge 1} v_n = 0.$$

Для елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ банахової ґратки B будемо вважати, що

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \sup\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \colon \sum_{i=1}^{n} |a_i|^{p'} \le 1\right),$$

де

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad p, p' > 1, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Кажуть, що банахова ґратка E є σ-повною, якщо для довільної порядково обмеженої послідовності $x_n \subset E$ у ґратці E існують верхня $\sup_{n\ge 1} x_n$ і нижня $\inf_{n\ge 1} x_n$ межі.

Для σ-повної ґратки E визначимо верхню і нижню границі обмеженої послідовності:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_m \left(\sup_{n\ge m} x_n\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_m \left(\inf_{n\ge m} x_n\right).$$

Відомо також [7, 5], що

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = o - \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\ge m} x_n\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = o - \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\ge m} x_n\right).$$

Означення 3. *Нехай $1 \le q < \infty$. Банахова ґратка B називається q-вгнутою, якщо існує така стала $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$, що для будь-якого $n \in N$ і для будь-яких елементів $(x_i)_1^n \subset B$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \le D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Операція $\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \Big)^{1/q}$ для банахового ідеального простору має звичайний поточковий сенс.

Нехай E — банаховий ідеальний простір із нормою $\|\cdot\|$ і модулем $|\cdot|$, X — випадковий елемент, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, A, P) із значеннями в E, X_i — незалежні копії X. Будемо вважати, що $X = \{X(t), t \in T\}$ — випадковий процес, заданий на параметричній множині T, і його траєкторії належать до E м. н.

Нехай

$$Z_n = \max_{1 \le i \le n} X_i.$$

Припустимо, що

$$X(\omega, t) \colon \Omega \times T \to \mathbf{R}$$

зображується у вигляді

$$X(\omega, t) = \sigma(t) \widetilde{X}(\omega, t), \tag{5}$$

де $\mathfrak{S}X = \big(\sigma(t), t \in T\big) \in E$ і для всіх $t \in T$ випадкові величини $\widetilde{X}(\omega, t)$ мають однаковий розподіл із деякою випадковою величиною ξ, тобто

$$\mathbf{P}(\widetilde{X}(\omega, t) < s) = \mathbf{P}(\xi < s) = F(s) \quad \forall t \in T, \quad s \in R.$$

Означення 4. *Будемо говорити, що випадковий елемент X задовольняє закон повторного логарифма для екстремальних значень, якщо м. н. виконуються рівності*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{Z_n - a_n \mathfrak{S}X}{f(a_n) \ln \ln n} = \mathfrak{S}X, \tag{6}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{Z_n - a_n \mathfrak{S}X}{f(a_n) \ln \ln n} = 0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Нехай X — випадковий елемент у q-вгнутому банаховому ідеальному просторі E $(1 \le q < \infty)$, який зображується у вигляді* (5), *X_n — його незалежні, однаково розподілені копії з абсолютно неперервною функцією розподілу $F(x)$, для якої виконується умова* (1), *причому для функції*

$$g(x) = f(x) \ln \ln \left\{ \frac{1}{1 - F(x)} \right\}$$

виконується умова (4). *Покладемо*

$$\mu(x) = \ln \left(\frac{1}{1 - F(x)} \right) \quad \forall x \in [x_0; +\infty]. \tag{8}$$

Тоді:

(i) *якщо існує таке* $t_0 \in R$, *що функція* $\mu'(t)$ *зростає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то виконується рівність* (6);

(ii) *якщо існує таке* $t_0 \in R$, *що* $F(t_0) = 0$, $F(t) > 0$ $\forall t > t_0$ *і функція* $\mu'(t)$ *спадає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то виконується рівність* (7).

Доведення. Використаємо такі допоміжні твердження з роботи [6].

Лема 1. *Нехай для послідовності* (ξ_n) *незалежних, однаково розподілених випадкових величин із функцією розподілу* $F(x)$ *виконується умова* (1). *Покладемо*

$$V_1 = \sup_{n>n_0} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} \quad (n_0 : a_n \geq x_0, \forall n > n_0).$$

Якщо $\mu(t)$ *визначена формулою* (8) *і існує таке* $t_0 \in R$, *що функція* $\mu'(t)$ *зростає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то існують додатні сталі* C_3, C_4 *такі, що*

$$\mathbf{P}(V_1 > x) \leq C_3 e^{-C_4 x} \quad \forall x \in [t_0^*; +\infty], \tag{9}$$

де

$$t_0^* = \max\{x_0; t_0\},$$

зокрема

$$\mathbf{E}e^{\varepsilon V_1} < \infty, \tag{10}$$

якщо $0 < \varepsilon < C_4$ *та існує* γ *таке, що*

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in [-\infty; \gamma].$$

Лема 2. *Нехай для послідовності* (ξ_n) *незалежних, однаково розподілених випадкових величин із функцією розподілу* $F(x)$ *виконується умова* (1). *Покладемо*

$$V_2 = \sup_{n>n_0} \frac{a_n - z_n}{f(a_n)\ln\ln n}.$$

Якщо $\mu(t)$ *визначена формулою* (8), *існує* $t_0 \in R$ *таке, що* $F(t_0) = 0$, $F(t) > 0$ $\forall t > t_0$ *і функція* $\mu'(t)$ *спадає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то існують такі додатні сталі* C_5, C_6, *що*

$$\mathbf{P}(V_2 > x) \leq C_5 e^{-C_6 x} \quad \forall x \in [t_0^{**}; +\infty],$$

де

$$t_0^{**} = \max\{x_0; 3\},$$

зокрема

$$\mathbf{E}e^{\varepsilon V_2} < \infty,$$

якщо $0 < \varepsilon < C_4$.

Відомо [5, с. 83], що q-вгнута банахова ґратка має нижню q-оцінку, отже, її норма σ-повна і σ-порядково неперервна. Тому q-вгнутий банаховий ідеальний простір має абсолютно неперервну норму, а відповідний банаховий ідеальний простір на вимірному просторі (T, Λ, μ) з σ-скінченною мірою μ, який має абсолютно неперервну норму, буде сепарабельним. Для скорочення запису будемо вважати, що $\mu(T) = 1$.

В q-вгнутому банаховому ідеальному просторі норма порядково неперервна, тобто

$$x_n \downarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \to 0,$$

а тому

$$x(t) = o - \lim_{n\to\infty} x_n(t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \big\|x(t) - x_n(t)\big\| = 0. \tag{11}$$

Для виконання рівностей (11) достатньо перевірити таку умову [7, с. 364]:

$$\mu\left(t \in T : x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)\right) = 1 \tag{12}$$

й існує такий $y(t) \in E$, що для $n \geq 1$

$$\mu\big(t \in T : |x_n(t)| \leq y(t)\big) = 1.$$

Перевіримо рівність (6) (рівність (7) доводиться аналогічно). Покладемо

$$U_m(t) = \sup_{n\geq m} \frac{Z_n - a_n\sigma(t)}{f(a_n)\ln\ln n} \quad (m : a_n \geq x_0, \forall n \geq m)$$

і покажемо, що

$$o - \lim_{m\to\infty} U_m = \mathfrak{S} \quad \text{м. н.},$$

що еквівалентно рівності (6).

Покажемо, що послідовність $U_m(t)$ задовольняє умову (12). Нагадаємо, що

$$Z_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k,$$

і покладемо

$$\widetilde{Z}_n(t) = \max_{1\leq k\leq n} \widetilde{X}_n(t).$$

Згідно з рівністю (2) для будь-якого $t \in T$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\widetilde{Z}_n(t) - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 1 \quad \text{м. н.}$$

Отже, для будь-якого $t \in T$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Z_n(t) - a_n\sigma(t)}{f(a_n)\ln\ln n} = \sigma(t) \quad \text{м. н.} \tag{13}$$

Із формули (13) випливає, що для будь-якого $t \in T$

$$\lim_{m\to\infty} U_m(t) = \sigma(t) \quad \text{м. н.}$$

Звідси за теоремою Фубіні маємо

$$\mu\left(t \in T : \lim_{m\to\infty} U_m(t) = \sigma(t)\right) = 1 \quad \text{м. н.},$$

тобто умова (12) виконується при $x_n(t) = U_n(t),\ x_n(t) = \sigma(t)$.

Оскільки

$$\sum_k^\infty \big(1 - F(a_k)\big) = \sum_k^\infty 1 - P(\widetilde{X}_1 < a_k) = \sum_k^\infty \frac{1}{k} = +\infty,$$

то, як відомо з [8, с. 190],

$$\mathbf{P}(Z_n(t) \geq a_n \sigma(t) \text{ н. ч.}) = \mathbf{P}(\tilde{Z}_n(t) \geq a_n \quad \text{н. ч.}) = 1,$$

де н. ч. означає нескінченно часто.

Таким чином,

$$\mathbf{P}\big(U_m(t) \geq 0\big) = 1 \quad \forall t \in T,$$

а отже,

$$\mu\big(t \in T : U_m(t) \geq 0\big) = 1 \quad \text{м. н.}$$

Очевидно, що при $k > m$

$$\mu\big(t \in T : U_k(t) \leq U(t)\big) = 1 \quad \text{м. н.}, \tag{14}$$

де

$$U(t) = \sup_{n \geq m} \frac{Z_n - a_n \sigma(t)}{f(a_n) \ln \ln n}.$$

Тому залишилося довести нерівність

$$\mathbf{E} \, \|U\|^q < \infty \tag{15}$$

для заданого q-вгнутого банахового ідеального простору. Щоб довести (15), скористаємось оцінкою (10) і відомою оцінкою з [9]

$$\big(\mathbf{E} \, \|Y(t)\|^q\big)^{1/q} \leq D_q \left\| \big(\mathbf{E} |Y(t)|^q\big)^{1/q} \right\|. \tag{16}$$

Оцінка (16) справедлива для кожного випадкового елемента $Y(t)$ у q-вгнутому банаховому ідеальному просторі при $1 \leq q$.

Отримуємо

$$\big(\mathbf{E}\|U\|^q\big)^{1/q} \leq D_q \left\| \big(\mathbf{E}|U(t)|^q\big)^{1/q} \right\| = D_q \left\| \left[\mathbf{E} \left(\sigma(t) \sup_{n \geq m} \frac{\widetilde{Z}_n - a_n}{f(a_n) \ln \ln n} \right)^q \right]^{1/q} \right\| =$$

$$= D_q \left\| \sigma(t) \left(\mathbf{E} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\widetilde{Z}_n - a_n}{f(a_n) \ln \ln n} \right)^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Оскільки з оцінки (10) випливає, що

$$\left(\mathbf{E} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\widetilde{Z}_n - a_n}{f(a_n) \ln \ln n} \right)^q \right)^{1/q} = C_q < \infty,$$

то

$$\big(\mathbf{E}\|U\|^q\big)^{1/q} \leq D_q C_q \|\sigma(t)\| < \infty,$$

тобто виконується нерівність (15), а разом з нею (14) і (6). Зазначимо, що $a_n \geq x_0$ при $n \geq m$ і відповідно $f(a_n) > 0 \ \forall n \geq m$.

Лему 2 доведено.

Наведемо ряд розподілів, які задовольняють відповідну теорему.

Функція розподілу

$$F_1(x) = 1 - e^{-x^\alpha}, \quad x \in [0; +\infty],$$

задовольняє рівність (6) при $\alpha > 1$ і умову (7) при $\alpha < 1$.

Функція розподілу

$$F_2(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0; +\infty],$$

задовольняє рівності (6) і (7) одночасно при $\lambda = 1$.

Якщо ξ — стандартна нормальна випадкова величина з функцією розподілу

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)\, ds$$

та щільністю

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}},$$

то

$$a_n = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (2 \ln n)^{1/2} - \frac{\ln \ln n + \ln(4\pi) + o(1)}{2(2 \ln n)^{1/2}},$$

$$\psi'(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)} = c(x)x,$$

де $c(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Оскільки $\psi'(x)$ є зростаючою, то справджується рівність (6).

Література

1. *de Haan L., Hordijk A.* The rate of growth of sample maxima // Ann. Math. Statist. – 1972. – **43**. – P. 1185 – 1196.
2. *Pickands J.* Sample sequences of maxima //Ann. Math. Statist. – 1967. – **38**, № 5. – P. 1570 – 1574.
3. *Акбаш К. С., Мацак І. К.* Одне уточнення закону повторного логарифма для схеми максимуму // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1132 – 1137.
4. *von Mises R.* La distribution de la plus grande de n valeurs // Selected Papers II. – Amer. Math.Soc., 1936. – P. 271 – 294.
5. *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1979. – Vol. 2. – 243 p.
6. *Акбаш К. С.* Експоненціальні оцінки для схеми максимуму // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 7. – С. 984 – 991.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
8. *Галамбош Я. И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
9. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1999. – Вип. 61. – С. 105 – 116.

Одержано 27.10.17,
після доопрацювання — 29.10.18