УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЙЖЕ КООПУКЛЕ НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

If a 2π-periodic function f continuous on the real axis changes its convexity at $2s,\ s\in\mathbb{N}$, points $y_i:\ -\pi\le y_{2s}< < y_{2s-1}<\ldots<y_1<\pi$ and, for all other $i\in\mathbb{Z}$, y_i are periodically defined, then, for every natural $n\ge N_{y_i}$, we determine a trigonometric polynomial P_n of order cn such that P_n has the same convexity as f everywhere except, possibly, small neighborhoods of the points $y_i:(y_i-\pi/n, y_i+\pi/n)$, and

$$\|f-P_n\|\le c(s)\,\omega_4(f,\pi/n),$$

where N_{y_i} is a constant depending only on $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i-y_{i+1}\}$, c and $c(s)$ are constants depending only on s, $\omega_4(f,\cdot)$ is the fourth modulus of smoothness of the function f, and $\|\cdot\|$ is the max-norm.

У випадку, коли неперервна на дійсній осі 2π-періодична функція f змінює свою опуклість у $2s,\ s\in\mathbb{N}$, точках перегину $y_i:\ -\pi\le y_{2s}<y_{2s-1}<\ldots<y_1<\pi$, а для інших $i\in\mathbb{Z}$ y_i визначені періодично, для кожного натурального $n\ge N_{y_i}$ знайдено тригонометричний поліном P_n порядку cn такий, що P_n змінює свою опуклість так само, як f, скрізь, за винятком, можливо, маленьких околів $y_i:(y_i-\pi/n,y_i+\pi/n)$ і

$$\|f-P_n\|\le c(s)\,\omega_4(f,\pi/n),$$

де N_{y_i} — стала, що залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i-y_{i+1}\}$, c і $c(s)$ — сталі, що залежать лише від s, $\omega_4(f,\cdot)$ — четвертий модуль гладкості функції f і $\|\cdot\|$ — рівномірна норма.

1. Вступ. Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ із рівномірною нормою $\|f\|=\|f\|_{\mathbb{R}}=\max_{x\in\mathbb{R}}\big|f(x)\big|$ і $\mathbb{T}_n$ — простір тригонометричних поліномів $P_n(x)= =a_0+\sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)$ порядку не вищого за $n\in\mathbb{N}$ з $a_j,b_j\in\mathbb{R}$.

Нагадаємо класичну оцінку похибки наближення функцій із C поліномами з $\mathbb{T}_n$ (отриману Д. Джексоном [1] для $k=1$, А. Зигмундом [2] та М. І. Ахієзером [3] для $k=2$ і С. Б. Стєчкіним [4] для $k\ge 3$): *якщо $f\in C$, то для кожного натурального $n\ge k-1,\ k\in\mathbb{N}$, знайдеться поліном $P_n\in\mathbb{T}_n$ такий, що*

$$\|f-P_n\|\le c(k)\,\omega_k(f,\pi/n), \tag{1.1}$$

де $c(k)$ — додатна стала, що залежить лише від k, а $\omega_k(f,\cdot)$ — k-й модуль гладкості функції f. (Детальніше див., наприклад, [5], розділ 4.)

У 1968 році Г. Лоренц і К. Целлер [6] для $k=1$ отримали дзвоноподібний аналог нерівності (1.1), тобто коли дзвоноподібні $\big($парні і незростаючі на $[0,\pi]\big)$ 2π-періодичні функції з C наближуються дзвоноподібними поліномами з $\mathbb{T}_n$.

У статтях [7, 8] було доведено коопуклі (див. означення нижче) аналоги нерівності (1.1) для $k=2$ і $k=3$ відповідно. Більш того, в [9] використано міркування з робіт [10, 11], щоб показати, що для $k>3$ такого коопуклого аналога не існує.

Проте, як відомо з коопуклого наближення алгебраїчними многочленами на відрізку [12], *якщо для наближаючих многочленів дозволити деяке послаблення умови коопуклості в маленьких околах точок перегину функції, то можна отримати додатковий порядок наближення* і, на думку автора, не більше ніж один, хоча відповідного контрприкладу ще не побудовано (всі порядки такого наближення див. у [13, 14]).

У цій статті ми доведемо теорему 1.1 — тригонометричний аналог алгебраїчного результату з [12]. Це так зване *майже* коопукле наближення. Щоб його записати, наведемо необхідні позначення.

Нехай $s \in \mathbb{N}$ і на $[-\pi, \pi)$ зафіксовано $2s$ точок y_i:

$$-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi,$$

а для інших $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначено періодично рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, \ldots, y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, \ldots$). Нехай $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, а $\Delta^{(2)}(Y)$ — множина всіх функцій $f \in C$, що опуклі донизу на $[y_1, y_0]$, догори на $[y_2, y_1]$, донизу на $[y_3, y_2]$ тощо. Функції з $\Delta^{(2)}(Y)$ називаються *коопуклими* (між собою). Крім того, якщо f двічі диференційовна, то f належить $\Delta^{(2)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли

$$f''(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{де} \quad \Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}.$$

Теорема 1.1. *Якщо функція f належить $\Delta^{(2)}(Y)$, то існує стала N_Y, яка залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, така, що для кожного натурального $n \ge N_Y$ знайдеться поліном $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$, для якого виконуються нерівності*

$$P_n''(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (y_i - \pi/n, y_i + \pi/n), \tag{1.2}$$

$$\|f - P_n\| \le c(s)\,\omega_4(f, \pi/n), \tag{1.3}$$

де c і $c(s)$ — додатні сталі, які залежать лише від s.

Наступна теорема є простим наслідком теореми 1.1 і нерівності Уітні [15] $\|f - f(0)\| \le 3\,\omega_4(f, 4\pi)$.

Теорема 1.2. *Якщо функція f належить $\Delta^{(2)}(Y)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться поліном $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$P_n'(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (y_i - c/n, y_i + c/n), \tag{1.4}$$

$$\|f - P_n\| \le C_Y\,\omega_4(f, \pi/n), \tag{1.5}$$

де c — стала, яка залежить лише від s, а C_Y — стала, яка залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$.

***Зауваження* 1.1.** З огляду на контрприклади Д. Левіатана і І. О. Шевчука, зокрема з [16] для майже комонотонного наближення на відрізку, автор вважає, що ω_4 в (1.3) і (1.5) неможливо лише замінити на ω_k з $k > 4$, а сталі N_Y і C_Y у теоремах 1.1 і 1.2 — на сталі, незалежні від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ (а залежні, наприклад, від s). Обидва припущення не розглядаються в цій статті. Крім того, ми не акцентуємо увагу на сталій c в обох теоремах, тобто не намагаємося зробити її абсолютною або/і найменшою з можливих.

Історія (майже) копозитивного та комонотонного наближень неперервних періодичних функцій міститься в [17, 18], а їхні алгебраїчні випадки — у статтях [19] та [20] відповідно.

Доведення теореми 1.1 має спільні моменти з доведенням алгебраїчного поточкового аналога [12] (теореми 1 і 2), однак відрізняється деталями і принциповими моментами, пов'язаними з необхідністю „боротьби” з алгебраїчними доданками при означенні наближаючого тригонометричного полінома, як при майже комонотонному наближенні [18] (теорема 1.1). Більш детально, ми доводимо теорему 1.1 через проміжне наближення кубічним сплайном, який нам потрібен у явному вигляді. Він записується у вигляді суми зрізаних степеневих функцій, і інтеграли від тригонометричного ядра (їхні лінійні комбінації), що наближають ці функції, мають природні алгебраїчні доданки. Ці доданки записуються явно і знищують один одного в цілому при підрахунку всієї суми по періоду (завдяки підібраному розбиттю); залишається лише шуканий тригонометричний поліном.

2. Допоміжні факти. 1°. Нехай

$$h := h_n := \pi/n, \qquad x_j := x_{j,n} := -j\,h, \qquad I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \qquad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z},$$
$$m \in \{1, 2, 3, 10, 20, 30\}.$$

Для фіксованих $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ і n позначимо

$$O_{i,m} := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m+1}, x_{j-m}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}) =: [x_{j_i}, x_{j_i-1}),$$
$$O_m := O(Y, n, m) := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_{i,m}.$$

Будемо писати $j \in H(Y, n, m)$, якщо $x_j \subset \mathbb{R} \setminus O_m$. Нехай

$$H_m := \big\{j : j \in H(Y, n, m), |j| \le n\big\}.$$

Виберемо $N_Y \in \mathbb{N}$ достатньо великим, щоб

$$O_{i,30} \cap O_{i-1,30} = \varnothing \tag{2.1}$$

для всіх $n \ge N_Y$ і всіх $i = 1, \ldots, 2s$ $\big($отже, N_Y залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}\big)$. Далі $n > N_Y$. Позначимо

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}, \quad \chi_j(x) := \chi(x, x_j), \quad (x - x_j)_+ := (x - x_j)\chi_j(x),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\left|\sin\dfrac{x - (x_j + h/2)}{2}\right|}\right\}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і зауважимо, що (детальніше див. [23])

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n} \Gamma_j^2\right\| < 6. \tag{2.2}$$

Для кожних $j \in \mathbb{Z}$ і $b \in \mathbb{N}$ візьмемо строго додатний поліном (суму двох „сусідніх” ядер типу Джексона)

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) := \left(\frac{\sin \dfrac{n(x-x_j)}{2}}{\sin \dfrac{x-x_j}{2}} \right)^{2b} + \left(\frac{\sin \dfrac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin \dfrac{x-x_{j-1}}{2}} \right)^{2b} \in \mathbb{T}_{(n-1)b}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

і для $j \in H_{10}$ позначимо функцію

$$t_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y) := \frac{\displaystyle\int_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du}{\displaystyle\int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du}. \tag{2.4}$$

Далі $c_i = c_i(b) > 0,\ i = 1, \ldots, 8,$ — сталі, які можуть залежати лише від s і b.

Лема 2.1 ([22], лема 1). *Якщо* $j \in H_{10}$ *і* $b \geq s+2$, *то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$\left|\chi_j(x) - t_j(x)\right| \leq c_1 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1}, \qquad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{2.6}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leq c_2 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_3 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O_{10}, \tag{2.8}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_3 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \qquad x \in O_{i,10}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Зауважимо, що лема 2.1 доводиться за допомогою нерівностей

$$\begin{gathered} \frac{1}{c_4 h}\Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leq \left|t_j'(x)\right| \leq \frac{c_4}{h}\Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \\ \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leq 2^{2s}\Gamma_j^{-2s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad j \in H_m, \quad m \geq 10, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} \left| \int_x^{x_j+\pi} \Gamma_j^b(u)du \right| \leq c_5\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \qquad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j, x_j + 2\pi], \\ \left| \int_x^{x_j-\pi} \Gamma_j^b(u)du \right| \leq c_5\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \qquad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j], \end{gathered} \tag{2.11}$$

аналоги яких доведено у [21] (лема 5.3) і [23] відповідно.

Для кожного $j \in H_{20}$ позначимо

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, t_j) := \alpha \int_{x_j-\pi}^{x} t_{j+10}(u)du + (1-\alpha) \int_{x_j-\pi}^{x} t_{j-10}(u)du, \tag{2.12}$$

де $\alpha = \alpha(j) \in [0,1]$ вибрано з умови $\tau_j(x_j + \pi) = \pi$. Зауважимо, що нерівності $0 \le \alpha \le 1$ випливають з оцінки (2.6) і вибору індексів $j \pm 10$ (достатньо далеких від j) при (достатньо великих) $b \ge s + 2$ (що робить ядро „крутішим”, детальніше див. аналогічний випадок у [7, с. 923] або доведення рівностей (3.1) далі).

Функції t_j і τ_j на $\mathbb{R}$ можуть бути зображені у вигляді

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_j(x), \quad j \in H_{10}, \tag{2.13}$$

$$\tau_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_j(x), \quad j \in H_{20}, \tag{2.14}$$

де $\hat{R}_j$ і $\tilde{R}_j$ — деякі поліноми з $\mathbb{T}_{c_6 n}$ (аналогічні випадки див. у [23] і [7] відповідно).

Позначимо

$$\widetilde{t}_j(x) := \widetilde{t}_{j,n}(x,b) := \bar{t}_j(x) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\chi_j(y_i) - \bar{t}_j(y_i)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)}\hat{t}_{j_i}(x), \quad j \in H_{10},$$

де функція $\bar{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \varnothing)$ означена в (2.4) з $\Pi(x) :\equiv 1$ і $\bar{b} = b + 3$, а

$$\hat{t}_{j_i}(x) := \big(\bar{t}_{j_i+10}(x) - \check{t}_{j_i-10}(x)\big)\frac{\Pi(x, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)}$$

— тригонометричний поліном, в якому j_i позначає індекс j такий, що $y_i \in [x_j, x_{j-1})$, $i = 1, \ldots, 2s$, функція $\check{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \check{Y}_i)$ означена в (2.4) з $\check{Y}_i := \{y_i - \pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ і

$$Y_i := \big(Y \setminus \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}\big) \cup \{y_i^* + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}},$$

де y_i^* — лівий кінець інтервалу $O_{i,20}$, якщо i непарне, і правий, якщо i парне;

$$\widetilde{\tau}_j(x) := \widetilde{\tau}_{j,n}(x,b) := \tau_{j,n}(x, b, \bar{t}_j) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{(y_i - x_j)_+ - \tau_{j,n}(y_i, b, \bar{t}_j)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)}\hat{t}_{j_i}(x), \quad j \in H_{20}.$$

Лема 2.2 ([18], леми 2.2 і 2.3). *Для кожних $j \in H_{10}$ і $b \ge 3s + 2$ функція $\widetilde{t}_j$ задовольняє* (2.6), (2.13) *і до того ж*

$$\big|\chi_j(x) - \widetilde{t}_j(x)\big| \le c_7\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-2s-1}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \qquad x \in O_{i,10}, \quad i = 1, \ldots, 2s \tag{2.15}$$

$\big($*зокрема*, $\chi_j(y_i) - \widetilde{t}_j(y_i) = 0\big)$.

Для кожних $j \in H_{20}$ і $b \ge 3s + 2$ функція $\widetilde{\tau}_j$ задовольняє (2.14) *і до того ж*

$$\big|(x - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)\big| \le c_8 h\big(\Gamma_j(x)\big)^{2(b-s-1)}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{2.16}$$

$$\big|(x - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)\big| \le c_8 h\big(\Gamma_j(x)\big)^{2(b-s-1)}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \qquad x \in O_{i,10}, \quad i = 1, \ldots, 2s \tag{2.17}$$

$\big($*зокрема*, $(y_i - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(y_i) = 0\big)$.

2°. Оскільки ми доводимо теорему 1.1 через проміжне наближення сплайном (кусково-поліноміальною функцією), тобто $\|f-S+S-P_n\| \le \|f-S\|+\|S-P_n\|$, далі опишемо цей сплайн S. При цьому без спеціальних посилань будемо використовувати нерівність Уітні [15]

$$\big|f(x)-L_3(x,x_j,f)\big| \le 3\,\omega_4\big(f,\pi/n,[x_{j+1},x_{j-4}]\big), \qquad x\in[x_{j+1},x_{j-4}], \quad j\in\mathbb{Z},$$

де L_k — многочлен Лагранжа степеня не вищого за k, що інтерполює f в $x_j,x_{j-1},\ldots,x_{j-k}$.

Далі $c>0$ позначатимуть абсолютні сталі або сталі, що залежать лише від s. Вони можуть бути різними, навіть якщо знаходяться в одному рядку.

Зафіксуємо $j\in\mathbb{Z}$. Нехай

$$\Psi_3(x,x_j) := (x-x_j)_+(x-x_{j-1})(x-x_{j-2}),$$

$$d_j := x_{j-1},$$

$$a_\nu := a_{j,\nu} := x_j \vee x_{j-1} \vee x_{j-2}, \qquad \widetilde{h}_\nu := -h\vee 0\vee h, \qquad \widehat{h}_\nu := 2h^2\vee -h^2\vee 2h^2,$$

якщо $\nu = 1\vee 2\vee 3$ відповідно. Далі ν набуває значень лише з $\{1,2,3\}$.

Введемо три функції $\Psi_{j,\nu}\in C$, що збігаються з $\Psi_3(x,x_j)$ майже скрізь:

$$\Psi_{j,\nu}(x) := \Psi_3(x,x_j)\,\chi(x,a_\nu) = (x-a_\nu)_+^3 + 3\,\widetilde{h}_\nu(x-a_\nu)_+^2 + \widehat{h}_\nu(x-a_\nu)_+,$$

тобто

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\nu}(x) &= \Psi_3(x,x_j), \quad x\in\mathbb{R}\setminus[x_j,a_\nu]\,, \\ \big|\Psi_{j,\nu}(x)-\Psi_3(x,x_j)\big| &\le c\,h^3, \quad x\in[x_j,a_\nu], \end{aligned} \tag{2.18}$$

і

$$\Psi_{j,\nu}(x) = \int\limits_{d_j-\pi}^{x}\left(6\int\limits_{d_j-\pi}^{t}\Big((u-a_\nu)_+ + \widetilde{h}_\nu\chi(u,a_\nu)\Big)\,du + \widehat{h}_\nu\chi(t,a_\nu)\right)dt, \tag{2.19}$$

а для $\nu_1,\ \nu_2\in\{1,2,3\}$ справджується рівність

$$\frac{\Psi''_{j,\nu_1}(x)-\Psi''_{j-1,\nu_2}(x)}{3h} = \frac{6(x-d_j)-6(x-d_{j-1})}{3h} = 2, \quad x\in\big(\max\{a_{\nu_1},a_{\nu_2}\},\infty\big). \tag{2.20}$$

Без втрати загальності будемо вважати, що $y_1=x_{30}$ (тобто точки з Y далекі від $-\pi$ і π), а також нагадаємо, що $H_3\subset H_2\subset H_1$.

Конструкція майже коопуклого кубічного сплайна

Позначимо дві поділені різниці f:

$$F_j := [x_j,x_{j-1},x_{j-2},f], \quad j=2-n,\ldots,n,$$

$$\Phi_j := [x_{j+1},x_j,x_{j-1},x_{j-2},x_{j-3},f], \quad j=3-n,\ldots,n-1$$

$\Big($зауважимо, що $\Phi_j\cdot 4h = \dfrac{F_{j+1}-F_j}{3h} - \dfrac{F_j-F_{j-1}}{3h}$, $j\in\mathbb{Z}$, і $F_j\Pi(x_j)\ge 0$, $j\in H_1$, $f\in\Delta^{(2)}(Y)\Big)$.

Введемо нові функції $\Psi_j(x)$, $j=3-n,\ldots,n-1$. Для кожного $j\in H_2$ покладемо

(d.0) $\Psi_j(x) := \Psi_{j,2}(x)$, якщо $\Phi_j\,\Pi(x_j)\le 0$,

а у протилежному випадку

$$\begin{array}{ll}
\text{(d.1)} & \\
\text{(d.2)} & \Psi_j(x) := \\
\text{(d.3)} &
\end{array}
\begin{cases}
\Psi_{j,1}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| \geq |F_{j-1}|, \\
\Psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| \leq |F_j| < |F_{j-1}|, \\
\alpha_j\, \Psi_{j,1}(x) + (1-\alpha_j)\, \Psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|,
\end{cases}$$

де $\alpha_j := \dfrac{F_{j+1}}{F_{j+1} + F_{j-1}} \in (0,1)$. Для інших $j = 3-n, \ldots, n-1$ таких, що $j \notin H_2$ (тобто для $j : x_j \in O_{i,2},\ i = 1, \ldots, 2s$), покладемо

$$\text{(d.4)} \quad \Psi_j(x) := \begin{cases} \Psi_{j,2}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j\, \Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \leq 0, \\ \Psi_{j,1}(x) & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

де

$$\tilde{Y}_i := \big(Y \setminus \{y_i\}\big) \cup \{x_{j_i+5}\}.$$

Нехай

(d.5) $\Psi_n(x) := \Psi_3(x, x_n),\ \Psi_{2-n}(x) :\equiv 0.$

***Зауваження* 2.1.** В обох „дивних” випадках в (d.4) достатньо взяти $\Psi_j(x) = \Psi_{j,2}(x)$, щоб отримати майже коопуклість з f сплайна S, означеного нижче, проте означення (d.4) більш зручне для перевірки майже копозитивності полінома P_n'' далі.

Покажемо, що кубічний сплайн

$$S(x) = L_3(x, x_n, f) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j\, \Psi_j(x), \tag{2.21}$$

або, еквівалентно,

$$S(x) = L_1(x, x_n, f) + F_n \left((x-x_n)(x-x_{n-1}) - \frac{\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)}{3h} \right) + \\ + \sum_{j=3-n}^{n-1} F_j\, A_j(x) + F_2 \frac{\Psi_3(x)}{3h}, \tag{2.22}$$

де

$$A_j(x) := \overline{A}_j(x) - \underline{A}_j(x) := \frac{\Psi_{j+1}(x) - \Psi_j(x)}{3h} - \frac{\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x)}{3h},$$

(продовжений періодично з $[-\pi, \pi]$) майже коопуклий з f, тобто

$$\big(S'(x_j+) - S'(x_j-)\big)\Pi(x_j) \geq 0, \quad j \in H_3, \tag{2.23}$$

$$S''(x)\Pi(x) \geq 0, \qquad x \in (x_j, x_{j-1}), \quad j \in H_3, \tag{2.24}$$

і задовольняє нерівність

$$\|f - S\| = \|f - S\|_{[-\pi,\pi]} \leq c\,\omega_4(f, h) \tag{2.25}$$

(на суми в (2.21) і (2.22) зручно дивитися починаючи з останнього доданка, детальніше про такі зображення див. [24] (пропозиція 1)).

За допомогою (2.21) і (2.22) перевіримо (2.23) і (2.24). Запишемо множину $[-\pi, \pi] \cap \cap \big(\cup_{j \in H_3} I_j\big)$ як об'єднання проміжків $[a_\mu, b_\mu],\ \mu = 1, \ldots, 2s+1,\ b_{\mu+1} < a_\mu$, що не перетинаються. Нехай $\underline{j} = \underline{j}(\mu)$ і $\overline{j} = \overline{j}(\mu)$ позначають індекси j такі, що $x_{\underline{j}} = a_\mu$ і $x_{\overline{j}} = b_\mu$ відповідно. Для кожного $\mu = 1, \ldots, 2s+1$ покладемо

$$G_\mu := \big(d_{\underline{j}+1}, d_{\overline{j}}\big], \qquad G := \bigcup_{\mu=1}^{2s+1} G_\mu.$$

Без втрати загальності перевіримо (2.24) і (2.23) лише для одного проміжку G_μ, тобто зафіксуємо μ, і нехай воно буде таким, що $\Pi(x) > 0$, $x \in G_\mu$. Для зручності, нехай $n > \underline{j}$ і $\overline{j} > 3-n$. Випадки $n = \underline{j}$ і $\overline{j} = 3 - n$ доводяться аналогічно з урахуванням (d.5). Нехай

$$\overline{H}_\mu := \big\{\underline{j}+1, \ldots, \overline{j}\big\}, \quad \overline{H}_\mu \subset H_2.$$

З (2.21) і (d.0) – (d.3) випливає, що функція S' в точках a_ν, визначених окремо для кожної Ψ_j з $j \in \overline{H}_\mu$, задовольняє нерівність

$$S'(a_\nu-) \le S'(a_\nu+),$$

тобто (2.23) справджується.

Оскільки $F_j \ge 0$ для $j \in \big\{\underline{j}+2, \ldots, \overline{j}-1\big\} =: \overline{\overline{H}}_\mu \subset H_1$, то, зокрема, з нерівностей $F_{j+1} \le F_j \ge F_{j-1}$ випливає, що

$$\Phi_j\, \Pi(x_j) \le 0, \quad j \in \overline{H}_\mu. \tag{2.26}$$

Взявши це до уваги, зазначимо, що в $\overline{H}_\mu$ немає жодного j, для якого, у відповідності з (d.0) – (d.4), було б введено означення

$$\Psi_j = \Psi_{j,3} \quad \text{і} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1},$$

як і означення

$$\Psi_{j+1} = \Psi_{j+1,3}, \qquad \Psi_j = \alpha_j\, \Psi_{j,1} + (1-\alpha_j)\, \Psi_{j,3} \quad \text{і} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1}.$$

Іншими словами,

$$a_\nu \quad (\text{визначена для} \quad \Psi_j) \quad \le \quad a_\nu \quad (\text{визначеної для} \quad \Psi_{j-1}). \tag{2.27}$$

Звідси і з (2.20) випливає, що

$$A_j''(x) = 0, \quad x \notin \big[\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\big], \tag{2.28}$$

де $\underline{a}_j := a_1$ і $\overline{a}_j := a_3$, якщо має місце (d.3), інакше $\underline{a}_j = \overline{a}_j$ позначають a_ν, що визначені для Ψ_j за (d.0) – (d.2) або за (d.4) $\big($якщо $\underline{a}_{j+1} = \overline{a}_{j-1}$, то $\big[\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\big] := \varnothing\big)$.

Використавши рівність $\underline{A}_{j+1} = \overline{A}_j$, виділимо з (2.22) чотири доданки, що містять функцію Ψ_j:

$$-F_{j+1}\, \overline{A}_j(x) + F_j\, \overline{A}_j(x) - F_j\, \underline{A}_j(x) + F_{j-1}\, \underline{A}_j(x). \tag{2.29}$$

Взявши до уваги (2.26) – (2.29), зафіксуємо $j \in \overline{H}_\mu$ і покажемо, що

$$\begin{array}{ll} \text{(c.0)} & \\ \text{(c.1)} & \\ \text{(c.2)} & \\ \text{(c.3)} & \end{array} \quad S''(x) \ge 0, \quad \begin{cases} x \in (a_1, a_3), & \text{якщо} \quad (\text{d.0}), \\ x \in (a_1, a_2), & \text{якщо} \quad (\text{d.1}), \\ x \in (a_2, a_3), & \text{якщо} \quad (\text{d.2}), \\ x \in (a_1, a_3), & \text{якщо} \quad (\text{d.3}). \end{cases}$$

Лише ці три точки $a_1,\ a_2$ і a_3 будемо використовувати далі.

Почнемо з випадку (c.1). Опишемо його на (a_1, a_2). Функція Ψ_{j+1} може бути означена лише за (d.0), або (d.4), або (d.1), тоді як Ψ_{j-1} є будь-якою з чотирьох за (d.0)–(d.4). Однак $\Psi''_{j+1} = 6(x-a_1),\ \Psi''_j = 6(x-a_2)$ і $\Psi''_{j-1} = 0$. Тому, згідно з (2.20),

$$F_{j+1}\cdot 2 - F_{j+1}\cdot 2 + F_j\cdot 2 - F_j\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} + F_{j-1}\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} \geq 0, \quad x\in(a_1,a_2),$$

оскільки $F_j \geq F_{j-1}$.

У випадку (c.2) Ψ_{j+1} є будь-якою з чотирьох можливих (за (d.0)–(d.4)), тоді як Ψ_{j-1} означується лише за (d.0), або (d.4), або (d.2), проте завжди

$$A''_j(x) = 2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}} \quad \text{і} \quad \underline{A}''_j(x) = 0 \quad \text{для} \quad x\in(a_2,a_3),$$

де в першій рівності ми використали (2.20). Отже,

$$F_{j+1}\cdot 2 - F_{j+1}\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}}\right) + F_j\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}}\right) \geq 0, \quad x\in(a_2,a_3),$$

оскільки $F_{j+1} \leq F_j$.

У випадку (c.3) Ψ_{j+1} і Ψ_{j-1} визначаються за (d.0), або (d.4), або (d.1) і (d.0), або (d.4), або (d.2) відповідно, проте завжди $\Psi''_{j+1}(x) = 6(x-a_1),\ \Psi''_j(x) = \alpha_j\cdot 6(x-a_2)$ і $\Psi''_{j-1}(x) = 0$ для $x\in(a_1,a_3)$. Записуємо

$$\begin{gathered} F_{j+1}\cdot 2 - F_{j+1}\frac{6(x-a_1) - \alpha_j\cdot 6(x-a_2)}{3h} + F_j\frac{6(x-a_1) - \alpha_j\cdot 6(x-a_2)}{3h} - \\ -F_j\frac{\alpha_j\cdot 6(x-a_2)}{3h} + F_{j-1}\frac{\alpha_j\cdot 6(x-a_2)}{3h} = F_j\left(2 + \frac{(1-\alpha_j)\cdot 6(x-a_2)}{3h} - \frac{\alpha_j\cdot 6(x-a_2)}{3h}\right) + \\ +F_{j-1}\frac{\alpha_j\cdot 2(x-a_2)}{h} - F_{j+1}\frac{(1-\alpha_j)2(x-a_2)}{h} =: B_1(x) + B_2(x). \end{gathered}$$

Таким чином, $B_2(x) = 0$ завдяки вибору α_j, тоді як $B_1(x) \geq 0$ для будь-якої $\alpha_j \in [0,1]$. Дійсно, як в (2.20), записуємо

$$\begin{gathered} B_1(x) = F_j\Bigg(2 - (1-\alpha_j)\frac{6(x-a_1) - 6(x-a_2) - 6(x-a_1)}{3h} - \\ - \alpha_j\frac{6(x-a_2) - 6(x-a_3) + 6(x-a_3)}{3h}\Bigg) = \\ = F_j\left(2 - (1-\alpha_j)\cdot 2 + (1-\alpha_j)\frac{2(x-a_1)}{h} - \alpha_j\cdot 2 - \alpha_j\frac{2(x-a_3)}{h}\right) \geq 0, \quad x\in(a_1,a_3). \end{gathered}$$

В останньому випадку (c.0) обидві $\Psi_{j\pm1}$ можуть бути будь-якими з чотирьох можливих, однак достатньо перевірити лише коли $\Psi_{j+1} = \Psi_{j+1,2}$ і $\Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,2}$, оскільки для інших означень невід'ємність S'' на $(a_1,a_2)\cup(a_2,a_3)$ гарантується щойно розглянутими трьома випадками, а саме, на (a_1,a_2) — (c.2) або (c.3) і на (a_2,a_3) — (c.1) або (c.3). Отже, для $x\in(a_1,a_3)$ маємо

$$\overline{A}_j''(x) = \frac{6(x-a_1) - 6(x-a_2)_+}{3h} \quad \text{і} \quad \underline{A}_j''(x) = \frac{6(x-a_2)_+}{3h},$$

що разом з (2.20) обумовлює нерівність

$$F_{j+1} \cdot 2 - F_{j+1}\,\overline{A}_j''(x) + F_j\,\overline{A}_j''(x) - F_j\,\underline{A}_j''(x) + F_{j-1}\,\underline{A}_j''(x) \ge 0.$$

Нерівність $S''(x) \ge 0$ у випадках (c.0) – (c.3) доведено. Насамкінець зауважимо, що оскільки проміжки з (c.0) – (c.3) покривають весь проміжок G_μ, коли j пробігає множину $\overline{H}_\mu$, то

$$S''(x) = \sum_{j \in \overline{\overline{H}}_\mu} F_j\,A_j''(x) \ge 0, \quad x \in G_\mu \setminus \{x_j : j \in \overline{\overline{H}}_\mu\}, \tag{2.30}$$

що і приводить до (2.24).

Щоб довести (2.25), нам потрібна нерівність

$$|\Phi_j| \le c\frac{\omega_4(f,h)}{h^4} \tag{2.31}$$

(див., наприклад, [25, с. 54]), співвідношення (2.18) і технічний сплайн $s(x) = L_3(x, x_n, t) + 4h\sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \Psi_3(x, x_j)$, що інтерполює f у кожній точці x_j без обмежень послідовними кубічними параболами (див. [24], пропозиція 1).

Тепер нехай $x \in [x_{j^*+1}, x_{j^*-3}]$, тоді з (2.21), (2.18) і (2.31) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \big|f(x) - S(x)\big| &= \big|f(x) - s(x) + s(x) + S(x)\big| \le \\ &\le c\,\omega_4(f,h) + 4h\sum_{j=3-n}^{n-1} |\Phi_j|\big|\Psi_3(x,x_j) - \Psi_j(x)\big| = \\ = c\,\omega_4(f,h) &+ \sum_{j=\max\{3-n, j^*-3\}}^{\min\{n-1, j^*+3\}} |\Phi_j| 4h \big|\Psi_3(x,x_j) - \Psi_j(x)\big| \le c\,\omega_4(f,h), \end{aligned}$$

і тому (2.25) справджується.

3. Доведення теореми 1.1. Позначимо числа

$$b_1 := s+2, \qquad b_2 := 3(s+1),$$

$$c_9 := \max\left\{\frac{6((2\pi)^{2b_2}\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\} + c_8(b_2) + 2)}{3c_3(b_1)}, 2\right\}, \quad n_1 := 2\,[c_9+1]\,n, \quad h_1 := h_{n_1},$$

$$c_{10} := \max\left\{c_5(b_2)\left(\frac{c_8(b_2)}{2c_9} + c_1(b_2)\right), 10\right\}, \qquad n_2 := 2\big[c_{10}+1\big]n_1, \quad h_2 := h_{n_2}$$

($[\cdot]$ — ціла частина). Зафіксуємо $j = 3-n, \dots, n-1$. Для кожної точки a_ν, $\nu = 1,2,3$, нехай j_ν позначає такий індекс, що $x_{j_\nu} := x_{j_\nu, n_1} = a_\nu$, а j_ν^* — такий, що $x_{j_\nu^*} := x_{j_\nu^*, n_2} = x_{j_\nu} (= x_{j_\nu, n_1})$. Нехай $j \in H_3$. Для кожного j_ν, $\nu = 1,2,3$, візьмемо

$$\widetilde{\tau}_{j_\nu^*}(x) = \widetilde{\tau}_{j_\nu^*, n_2}(x, b_2), \qquad \widetilde{t}_{j_\nu^*}(x) = \widetilde{t}_{j_\nu^*, n_2}(x, b_2)$$

і покладемо

$$\varphi_{j,\nu}(x) := 6 \int\limits_{d_j-\pi}^{x} \left(\widetilde{\tau}_{j_\nu^*}(u) + \widetilde{h}_\nu \left(\alpha_\nu \widetilde{t}_{(j_\nu+1)^*}(u) + (1-\alpha_\nu)\widetilde{t}_{(j_\nu-1)^*}(u)\right)\right) du, \quad \nu = 1, 3,$$

$$\varphi_{j,2}(x) := 6 \int\limits_{d_j-\pi}^{x} \left(\widetilde{\tau}_{j_2^*}(u) - \frac{1}{12}h^2 \left(\alpha_2 t'_{(j_2+5)^*}(u) + (1-\alpha_2)t'_{(j_2-5)^*}(u)\right)\right) du,$$

де $\alpha_\nu \in [0,1]$, $\nu = 1, 2, 3$, можна вибрати так, що

$$\begin{gathered} \varphi_{j,\nu}(d_j+\pi) = 3(\pi+h)(\pi-h), \quad \nu = 1, 3, \\ \varphi_{j,2}(d_j+\pi) = 3\pi^2 - \pi h^2/2. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Дійсно, наприклад, використовуючи (2.16), (2.6) $\widetilde{t}_{j_\nu^*}$ і (2.11), ми для фіксованого j, $\nu = 3$ і $\alpha_3 = 1$ отримуємо оцінку

$$\varphi_{j,3}(d_j+\pi) = 6 \int\limits_{d_j-\pi}^{d_j+\pi} \Big[\widetilde{\tau}_{j_3^*}(u) - (u-a_3)_+ + h\left(\widetilde{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u, x_{j_3+1})\right) +$$

$$+h\big(\chi(u, x_{j_3+1}) - \chi(u, a_3)\big)\Big] du + 6 \int\limits_{d_j-\pi}^{d_j+\pi} \big((u-a_3)_+ + h\chi(u, a_3)\big) du \geq$$

$$\geq 3(\pi^2 - h^2) + 6hh_1 -$$

$$-6 \left| \int\limits_{d_j-\pi}^{d_j+\pi} \left[\widetilde{\tau}_{j_3^*}(u) - (u-a_3)_+ + h\big(\widetilde{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u, x_{j_3+1})\big)\right] du \right| \geq$$

$$\geq 3(\pi^2 - h^2) + 6hh_1 -$$

$$-6c_8(b_2)h_2 \int\limits_{d_j-\pi}^{d_j+\pi} \Gamma^{2(b_2-s-1)}_{j_3^*, n_2}(u) du - 6c_1(b_2)h \int\limits_{d_j-\pi}^{d_j+\pi} \Gamma^{2b_2-2s-1}_{(j_3+1)^*, n_2}(u) du \geq$$

$$\geq 3(\pi^2 - h^2) + 6hh_1 - 6c_5(b_2)\big(c_8(b_2)h_2^2 + c_1(b_2)hh_2\big) > 3(\pi^2 - h^2),$$

тоді як для $\alpha_3 = 0$ (знову завдяки тому, що $h_1 >> h_2$), аналогічно, виконується протилежна нерівність $\varphi_{j,3}(d_j+\pi) < 3(\pi^2 - h^2)$. Отже, (3.1) доведено для $\nu = 3$ (для $\nu = 1, 2$ доведення проводиться аналогічно).

Тепер візьмемо

$$t_{j_\nu^*}(x) = t_{j_\nu^*, n_2}(x, b_2, Y), \quad t_{j_\nu}(x) = t_{j_\nu, n_1}(x, b_1, Y)$$

і покладемо

$$\psi_{j,\nu}(x) := \int\limits_{d_j-\pi}^{x} \Big[\varphi_{j,\nu}(u) + \hat{h}_\nu \left(\beta_\nu t_{(j_\nu+1)^*}(u) + t_{j_\nu}(u) + (1-\beta_\nu)t_{(j_\nu-1)^*}(u)\right)\Big] du,$$

де $\hat{h}_\nu := h^2 \vee -h^2/4 \vee h^2$, $\nu = 1, 2, 3$, відповідно.

Лема 3.1. *Якщо* $j \in H_2$, *то* $\beta_\nu \in [0,1]$, $\nu = 1,2,3$, *можна вибрати так, що*

$$\psi_{j,\nu}(d_j + \pi) = (\pi + h)\pi(\pi - h), \tag{3.2}$$

і тоді функції $\psi_{j,\nu}$ *задовольнятимуть нерівності*

$$\begin{matrix} \Big(\psi''_{j,\nu}(x) - \Psi''_{j,\nu}(x)\Big)\,\Pi(x)\Pi(x_j) \ge 0, \\ \Big(\psi''_{j,2}(x) - \Psi''_{j,2}(x)\Big)\,\Pi(x)\Pi(x_j) \le 0, \end{matrix} \qquad \nu = 1,3, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{3.3}$$

$$|\Psi_{j,\nu}(x) - \psi_{j,\nu}(x)| \le c\, h_{j,n}^3\, \Gamma_{j,n}^6(x), \quad \nu = 1,2,3, \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{3.4}$$

Крім того,

$$\psi_{j,\nu}(x) = \frac{1}{8\pi}x^4 + \frac{\pi - d_j}{2\pi}x^3 + \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - h^2}{4\pi}x^2 + \frac{(\pi - d_j)(5d_j^2 - 2\pi^2 - h^2)}{2\pi}x +$$
$$+ Q_{j(\nu)}(x), \quad \nu = 1,2,3, \tag{3.5}$$

де $Q_{j(\nu)}$ — *деякі поліноми з* $\mathbb{T}_{cn_2}$.

Доведення співвідношень (3.2)–(3.4) аналогічне доведенню (3.1) (або див. доведення леми 6 із [18]) з урахуванням значень n_1, n_2 і нерівностей $\Gamma_{(j_\nu \pm 1)^*, n_2}(x) < \Gamma_{j_\nu \pm 1, n_1}(x) < 2\pi\Gamma_{j_\nu, n_1}(x) < 2\pi\Gamma_{j,n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доведемо лише (3.5) з $\nu = 1$ для визначеності. З огляду на (2.13) і (2.14) запишемо

$$\widetilde{t}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_{j_1^*}(x), \qquad \widetilde{\tau}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_{j_1^*}(x),$$
$$\hat{r}_{j_1^*}(x) := \hat{R}_{j_1^*}(x) - \hat{R}_{j_1^*,0}, \qquad \tilde{r}_{j_1^*}(x) := \tilde{R}_{j_1^*}(x) - \tilde{R}_{j_1^*,0},$$

де $\hat{R}_{j_1^*,0}$ і $\tilde{R}_{j_1^*,0}$ — вільні члени поліномів $\hat{R}_{j_1^*}, \tilde{R}_{j_1^*} \in \mathbb{T}_{cn}$ відповідно. Тоді

$$\varphi_{j,1}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - x_j)}{2\pi}x^2 + 6\tilde{R}_{j_1^*,0}x\right) - \big(\ldots(d_j - \pi)\big) -$$
$$-6h\left(\frac{1}{4\pi}x^2 + \Big(\alpha_1\hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha_1)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\Big)\,x\right) + 6h\big(\ldots(d_j - \pi)\big) +$$
$$+6\int\limits_{d_j - \pi}^{x} \Big(\tilde{r}_{j_1^*}(u) - h\big(\alpha_1\hat{r}_{(j_1+1)^*}(u) + (1-\alpha_1)\hat{r}_{(j_1-1)^*}(u)\big)\Big)\,du =$$
$$= \frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}x^2 + 6Ax -$$
$$-\left(\frac{1}{2\pi}(d_j - \pi)^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}(d_j - \pi)^2 + 6A(d_j - \pi)\right) + q_{j_1}(x),$$

де

$$A := \tilde{R}_{j_1^*,0} - h\left(\alpha\hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\right)$$

і поліном q_{j_1} з $\mathbb{T}_{cn}$ не має вільного члена. Звідси і з (3.1) знаходимо значення A:

$$3(\pi^2 - h^2) = \frac{1}{2\pi}\big((d_j + \pi)^3 - (d_j - \pi)^3\big) + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}\big((d_j + \pi)^2 - (d_j - \pi)^2\big) + 12\pi A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - 3h^2}{12\pi}.$$

Отже,

$$\varphi_{j,1}(x) = \frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}x^2 +$$
$$+ \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - 3h^2}{2\pi}x + \frac{(\pi - d_j)(3d_j^2 - 2d_j\pi - 2\pi^2 - 3h^2)}{2\pi} + q_{j_1}(x),$$

звідки з урахуванням (2.13) і (3.2) аналогічно знаходимо (3.5).

Лему 3.1 доведено.

Конструкція майже коопуклого тригонометричного полінома

Для $j = 3 - n, n - 1$ введемо функції ψ_j. Якщо $j \in H_2$, то покладемо

$$\psi_j(x) := \psi_{j,2}(x), \quad \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j) \le 0,$$

а у протилежному випадку

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j,1}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| \ge |F_{j-1}|, \\ \psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| \le |F_j| < |F_{j-1}|, \\ \alpha_j\,\psi_{j,1}(x) + (1 - \alpha_j)\,\psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|. \end{cases}$$

Якщо $j \notin H_2$ (тобто $j : x_j \in O_{i,2},\ i = 1, \ldots, 2s$), то нехай

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j,2}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \le 0, \\ \psi_{j,1}(x) & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тепер позначимо

$$P_n(x) := L_3(x, x_n, f) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j\,\psi_j(x). \tag{3.6}$$

Включення $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$ перевіряється аналогічно відповідним арифметичним підрахункам у [18], тобто всі алгебраїчні доданки з (3.5), включаючи L_3, разом із відповідними поділеними різницями в сумі (3.6) дорівнюють нулю.

Перевіримо (1.2). При цьому будемо використовувати лему 3.1 у двох сенсах: у „звичайному” для $j \in H_2 = H(n, Y, 2)$, а якщо $j \notin H_2$, то у сенсі, що $j \in H(n, \tilde{Y}_i, 2)$. Отже, з (3.3), (2.19), (2.21), (2.22) і (2.30) випливає, що

$$P_n''(x)\Pi(x) = \left(L_3''(x, x_n, f) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j\big(\psi_j''(x) - \Psi_j''(x)\big) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j\Psi_j''(x)\right)\Pi(x) =$$
$$= 4h \sum_{j\in H_2} \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\Phi_j\Pi(x_j)\left(\psi_{j,\nu}''(x) - \Psi_{j,\nu}''(x)\right)\Pi(x)\Pi(x_j) +$$

$$+4h\sum_{i=1}^{2s}\sum_{j:x_j\in O_{i,1}}\frac{1}{\Pi^2(x_j,\tilde{Y}_i)}\Phi_j\Pi(x_j,\tilde{Y}_i)\left(\psi''_{j,2\vee 1}(x)-\Psi''_{j,2\vee 1}(x)\right)\Pi(x,Y)\Pi(x_j,\tilde{Y}_i)+$$

$$+\left(F_n\left(2-\frac{\Psi''_n(x)-\Psi''_{n-1}(x)}{3h}\right)+\sum_{j=3-n}^{n-1}F_j\,A''_j(x)+F_2\frac{\Psi''_3(x)}{3h}\right)\Pi(x)=:$$

$$=: A(x)+B(x)+C(x),$$

$$A(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$B(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(x_{j_i+5},y_i),$$

$$C(x)\geq 0,\quad x\in G\quad \text{на всіх періодах},$$

що приводить до (1.2). Щоб довести (1.3), скористаємося (2.25), (2.31), (3.4) і (2.2), а саме,

$$\|f-P_n\|=\|f-S+S-P_n\|=\left\|f-S+\sum_{j=3-n}^{n-1}\Phi_j\cdot 4h\left(\Psi_j(\cdot)-\psi_j(\cdot)\right)\right\|_{[-\pi,\pi]}\leq$$

$$\leq c\,\omega_4(f,h)+c\left\|\sum_{j=3-n}^{n-1}\omega_4(f,h)\Gamma_j^6(\cdot)\right\|_{[-\pi,\pi]}\leq c\,\omega_4(f,h).$$

Теорему 1.1 доведено.

Література

1. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Thesis. – Gottingen, 1911.
2. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – **12**, № 1. – P. 47 – 76.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.
4. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219 – 242.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
6. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials. I // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**. – P. 501 – 504.
7. *Попов П. А.* Аналог нерівності Джексона для коопуклого наближення періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 919 – 928.
8. *Залізко В. Д.* Коопукле наближення періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 29 – 42.
9. *Залізко В. Д.* Контрприклад для коопуклого наближення періодичних функцій // Наук. зап.: Зб. наук. статей Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 6. – С. 91 – 96.
10. *Шведов А. С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 1. – С. 117 – 130.
11. *DeVore R. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Approximation of monotone functions: a counter example // Curves and Surfaces with Applications in CAGD (Chamonix-Mont-Blanc, 1996). – Nashville, TN: Vanderbilt Univ. Press, 1997. – P. 95 – 102.
12. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Nearly coconvex pointwise approximation by cubic splines and polynomials // East J. Approxim. – 2006. – **12**, № 4. – P. 417 – 439.
13. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* New phenomena in coconvex approximation // Anal. Math. – 2006. – **32**. – P. 113 – 121.

14. *Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Pointwise estimates of coconvex approximation // Jaen J. Approxim. – 2014. – **6**, № 2. – P. 261 – 295.
15. *Whitney H.* On functions with bouded n-th differences // J. Math. Pures et Appl. – 1957. – **36**, № 9. – P. 67 – 95.
16. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nearly comonotone approximation. II // Acta Sci. Math. (Szeged.) – 2000. – **66**. – P. 115 – 135.
17. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Copositive approximation of periodic functions // Acta Math. Hung. – 2006. – **120**, № 4. – P. 301 – 314.
18. *Dzyubenko G. A.* Nearly comonotone approximation of periodic functions // Anal. Theory Appl. – 2017. – **33**, № 1. – P. 74 – 92.
19. *Дзюбенко Г. А.* Поточкова оцінка майже копозитивного наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 641 – 649.
20. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nearly comonotone approximation // J. Approxim. Theory. – 1998. – **95**. – P. 53 – 81.
21. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 311 – 348.
22. *Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций // Мат. заметки. – 2008. – **83**, вып. 2. – С. 199 – 209.
23. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson’s Inequality // J. Approxim. Theory. – 1999. – **99**. – P. 409 – 421.
24. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Nearly coconvex pointwise approximation // East J. Approxim. – 2000. – **6**. – P. 357 – 383.
25. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.

Одержано 15.03.18