УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепр. нац. ун-т)

ЗАДАЧА БОЯНОВА – НАЙДЕНОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТАРШУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

For given $r \in \mathbf{N},\ p, \alpha, \beta, \mu > 0$, we solve the extreme problems

$$\int\limits_a^b x_{\pm}^q(t)dt \to \sup, \quad q \ge p,$$

in the set of pairs (x, I) of functions $x \in L_{\infty}^r$ and intervals $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ satisfying the inequalities $-\beta \le x^{(r)}(t) \le \alpha$ for almost all $t \in \mathbf{R}$, the conditions $L(x_{\pm})_p \le L\big(\big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\big)_{\pm}\big)_p$, and the corresponding condition $\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]} x_+\right) \le \mu$ or $\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]} x_-\right) \le \mu$, where

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\right\},$$

$\operatorname{supp}_{[a,b]} x_{\pm} := \{t \in [a, b] : x_{\pm}(t) > 0\}$, and $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}$ is the nonsymmetric $(2\pi/\lambda)$-periodic Euler spline of order r. As a consequence, we solve the same problems for the intermediate derivatives $x_{\pm}^{(k)},\ k = 1, \ldots, r-1$, with $q \ge 1$.

Для заданих $r \in \mathbf{N},\ p, \alpha, \beta, \mu > 0$ розв'язано екстремальні задачі

$$\int\limits_a^b x_{\pm}^q(t)dt \to \sup, \quad q \ge p,$$

на класі пар (x, I) функцій $x \in L_{\infty}^r$ і відрізків $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, для яких виконуються нерівності $-\beta \le \le x^{(r)}(t) \le \alpha$ майже для всіх $t \in \mathbf{R}$, умови $L(x_{\pm})_p \le L\big(\big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\big)_{\pm}\big)_p$ та відповідна умова $\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]} x_+\right) \le \mu$ або $\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]} x_-\right) \le \mu$, де

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\right\},$$

$\operatorname{supp}_{[a,b]} x_{\pm} := \{t \in [a, b] : x_{\pm}(t) > 0\}$, $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}$ — несиметричний $(2\pi/\lambda)$-періодичний сплайн Ейлера порядку r. Як наслідок розв'язано ті ж самі екстремальні задачі для проміжних похідних $x_{\pm}^{(k)},\ k = 1, \ldots, r-1$, при $q \ge 1$.

1. Введение. Будем рассматривать пространства $L_p,\ 0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_p < \infty$, где

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \mathbf{R}} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbf{N}$ и $p, s \in (0, \infty]$ через $L_{p,s}^r$ обозначим пространство всех функций $x \in L_p$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, причем $x^{(r)} \in L_s$. Будем писать L_{∞}^r вместо $L_{\infty,\infty}^r$.

Известно (см., например, [1, с. 47]), что задача нахождения точной константы C в неравенстве типа Колмогорова – Надя

© В. А. КОФАНОВ, 2019

$$\|x^{(k)}\|_q \le C\,\|x\|_p^{\alpha}\,\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметры $q,\ p,\ s \ge 1,\ r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N}\bigcup\{0\},\ k < r$, удовлетворяют условию $\alpha \le (r-k)/r$, равносильна экстремальной задаче

$$\|x^{(k)}\|_q \to \sup \tag{1.2}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_s \le A_r, \qquad \|x\|_p \le A_0, \tag{1.3}$$

где $A_0,\ A_r$ — заданные положительные числа.

Несмотря на большое количество работ по этой тематике (см. библиографию в работах [1–3]), точная константа C в неравенстве (1.1) известна для всех $k, r \in \mathbf{N},\ k < r$, лишь в немногих случаях. Поэтому представляет интерес следующая модификация задачи (1.2) с ограничениями (1.3), рассмотренная Б. Бояновым и Н. Найденовым [4]. Для произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ими решена задача

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad k = 1,\ldots,r-1,$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.3) с $p = s = \infty$, где Φ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0,\infty)$, положительная на $(0,\infty)$ и такая, что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$.

Через W обозначим класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ, определенных на $[0,\infty)$ и таких, что $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ положим [5]

$$L(x)_p := \sup\left\{\left(\int\limits_a^b |x\,(t)|^p\,dt\right)^{1/p} : a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}. \tag{1.4}$$

В работе [6] решена следующая модификация задачи Боянова – Найденова:

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \qquad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.5}$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p \le A_0. \tag{1.6}$$

Как следствие получено решение задачи

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \qquad \Phi \in W, \quad k = 1,\ldots,r-1, \tag{1.7}$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.6). Результаты работы [6] обобщены в [7].

Точные неравенства вида (1.1) с несимметричными ограничениями на старшую производную и родственные экстремальные задачи с такими ограничениями рассматривались в работах [8 – 11].

Пусть $r \in \mathbf{N}$, $\alpha,\ \beta > 0$. Символом $\varphi_r^{\alpha,\beta}(t)$ обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi_0^{\alpha,\beta}(t)$, определенной на $[0, 2\pi]$ следующим образом:

$$\varphi_0^{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad t \in [0, 2\pi\beta/(\alpha+\beta)], \\ -\beta, & \text{если} \quad t \in [2\pi\beta/(\alpha+\beta), 2\pi], \end{cases}$$

и для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r^{\alpha,\beta}(\lambda t)$. Пусть далее

$$W^r_{\infty,\alpha,\beta} := \left\{ x \in L^r_\infty : \left\| \alpha^{-1} x_+^{(r)} + \beta^{-1} x_-^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Рассмотрим класс

$$L_r(p,\alpha,\beta,\lambda) := \left\{ x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta} : L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_\pm \right)_p \right\},$$

где $x_\pm(t) := \max\{x_\pm(t), 0\}$.

В настоящей работе решена задача (теорема 1)

$$\int_a^b \Phi(x_\pm^p(t))dt \to \sup, \qquad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.8}$$

на классе пар (x, I) функций $x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda)$ и отрезков $I = [a,b]$, для которых выполнено соответствующее условие

$$\mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_\pm\right) \le \mu, \quad \mu > 0,$$

и задача (теорема 2)

$$\int_a^b \Phi(x_\pm^{(k)}(t))dt \to \sup, \qquad \Phi \in W, \quad k = 1,\ldots,r-1, \tag{1.9}$$

на классе пар (x, I) функций $x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda)$ и отрезков $I = [a,b]$, удовлетворяющих соответствующему условию

$$\mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_\pm^{(k)}\right) \le \mu, \quad \mu > 0,$$

где $\mathrm{supp}_{[a,b]} x := \{t \in [a,b] : |x(t)| > 0\}$.

Отметим, что задачи (1.8) и (1.9) в симметричном случае (т. е. при $\alpha = \beta$) решены в работе [12].

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [11]. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p, \ \alpha, \ \beta > 0$. *Если для функции* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что*

$$L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right)_p,$$

где величина $L(x)_p$ *определена равенством* (1.4), *то*

$$\|x_\pm\|_\infty \le \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right\|_\infty.$$

Лемма 2 [11]. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}, \ k < r$; $p, \ \alpha, \ \beta > 0$. *Если для функции* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что*

$$L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right)_p,$$

то для любого $q \ge 1$

$$L(x^{(k)}_\pm)_q \le L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_\pm\right)_q.$$

***Следствие* 1.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $\alpha, \ \beta > 0$. *Если функция* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ *удовлетворяет условию* $L(x)_p < \infty$ *с некоторым* $p > 0$ *и* $|x(t)| > 0$ *для* $t \in (a, b)$, *причем* $a = -\infty$ *или* $b = +\infty$, *то* $x(t) \to 0$, *если* $t \to -\infty$ *или* $t \to +\infty$.

В условиях следствия 1 *будем полагать* $x(-\infty) = 0$ *или* $x(+\infty) = 0$.

Для суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции x символом $r(x, t)$ обозначим перестановку функции $|x|$ (см., например, [13], § 1.3). При этом условимся, что $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

Лемма 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p > 0, \ \alpha, \ \beta > 0$ *и для функции* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что выполнены условия*

$$L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right)_p, \tag{2.1}$$

где величина $L(x)_p$ *определена равенством* (1.4).

Если интервал (*конечный или бесконечный*) $(a_\pm, b_\pm) \subset \mathbf{R}$ *и отрезок* $[A_\pm, B_\pm] \subset \mathbf{R}$ *таковы, что*

$$x_\pm(a_\pm) = x_\pm(b_\pm) = 0, \qquad x_\pm(t) > 0, \qquad t \in (a_\pm, b_\pm), \tag{2.2}$$

и

$$\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm(A_\pm) = \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm(B_\pm) = 0, \qquad \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm(t) > 0, \qquad t \in (A_\pm, B_\pm), \tag{2.3}$$

то для любого $\xi > 0$ *и любой функции* $\Phi \in W$ *выполнены неравенства*

$$\int\limits_{a_\pm}^{a_\pm+\xi} \Phi\big(\overline{x}^p_\pm(t)\big)\, dt \le \int\limits_{A_\pm}^{A_\pm+\xi} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right) dt \tag{2.4}$$

и

$$\int\limits_{b_\pm-\xi}^{b_\pm} \Phi\big(\overline{x}^p_\pm(t)\big)\,dt \le \int\limits_{B_\pm-\xi}^{B_\pm} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right)dt, \tag{2.5}$$

где $\overline{x}_\pm$*— сужение функции* $x_\pm$ *на* $(a_\pm, b_\pm)$, *а* $\left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm$ *— сужение* $\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm$ *на* $[A_\pm, B_\pm]$, *причем за пределами этих промежутков функции* $\overline{x}_\pm$ *и* $\left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm$ *полагаем равными нулю.*

Кроме того, если

$$b_\pm - a_\pm \le B_\pm - A_\pm, \tag{2.6}$$

то для любого отрезка $[\alpha_\pm, \beta_\pm] \subset [A_\pm, B_\pm]$, *для которого*

$$\beta_\pm - \alpha_\pm = b_\pm - a_\pm, \tag{2.7}$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi\big(x^p_\pm(t)\big)\,dt \le \int\limits_{\alpha_\pm}^{\beta_\pm} \Phi\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right)dt, \qquad \Phi\in W. \tag{2.8}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию x и промежутки $(a_\pm, b_\pm)$ и $[A_\pm,\ B_\pm]$, удовлетворяющие условиям леммы 3. Докажем неравенство (2.4) (неравенство (2.5) доказывается аналогично).

Сначала докажем неравенство

$$\int\limits_0^{\xi} r^p(\overline{x}_\pm, t)\,dt \le \int\limits_0^{\xi} r^p(\overline{\varphi}_\pm, t)\,dt, \qquad \xi > 0, \tag{2.9}$$

где для краткости положено $\overline{\varphi}_\pm := \left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm$. Убедимся прежде всего в том, что разность $\delta_\pm(t) := r(\overline{x}_\pm, t) - r(\overline{\varphi}_\pm, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Чтобы доказать этот факт, заметим, что

$$\delta_\pm(0) \le \|x_\pm\|_\infty - \|(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r})_\pm\|_\infty \le 0 \tag{2.10}$$

согласно лемме 1. В силу этого неравенства и соотношений (2.2), (2.3) для любого $z_\pm \in$ $\in (0, \|\overline{x}_\pm\|_\infty)$ существуют такие точки

$$t_i^\pm \in (a_\pm, b_\pm),\ i = 1,\ldots,m,\ m\ge 2, \qquad y_j^\pm \in (A_\pm, B_\pm),\ j = 1,2,$$

что

$$z_\pm = \overline{x}_\pm(t_i^\pm) = \overline{\varphi}_\pm(y_j^\pm), \qquad \overline{\varphi}'_\pm(y_1^\pm) > 0, \qquad \overline{\varphi}'_\pm(y_2^\pm) < 0. \tag{2.11}$$

При этом $|x'_\pm(t_i^\pm)| \ne 0,\ i = 1,\ldots,m$, для почти всех $z_\pm \in \big(0, \|\overline{x}_\pm\|_\infty\big)$, причем среди точек $t_i^\pm$ имеется хотя бы по одной точке $t_{i_1}^\pm$ и $t_{i_2}^\pm$, для которых

$$\overline{x}'_\pm\big(t_{i_1}^\pm\big) > 0, \qquad \overline{x}'_\pm\big(t_{i_2}^\pm\big) < 0. \tag{2.12}$$

В силу включения $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ и неравенства (2.10) выполнены условия теоремы сравнения Хермандера [8] (см. также [1, с. 96]). Согласно этой теореме, для точек $t_i^{\pm}$ и $y_j^{\pm}$, удовлетворяющих условиям (2.11) и (2.12), выполнены неравенства

$$\left|\overline{x}'_{\pm}(t^{\pm}_{i_1})\right| \leq \left|\overline{\varphi}'_{\pm}(y^{\pm}_1)\right|, \qquad \left|\overline{x}'_{\pm}(t^{\pm}_{i_2})\right| \leq \left|\overline{\varphi}'_{\pm}(y^{\pm}_2)\right|.$$

Поэтому если точки $\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm} > 0$ выбраны так, что

$$z_{\pm} = r\big(\overline{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm}\big) = r\big(\overline{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm}\big),$$

то по теореме о производной перестановки (см., например, [13], предложение 1.3.2)

$$|r'(\overline{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm})| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{x}'_{\pm}(t_i^{\pm})|^{-1}\right]^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'_{\pm}(y_j^{\pm})|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm})|.$$

Отсюда следует, что разность $\delta^{\pm}(t) := r(\overline{x}_{\pm}, t) - r(\overline{\varphi}_{\pm}, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое справедливо и для разности

$$\delta_p^{\pm}(t) := r^p(\overline{x}_{\pm}, t) - r^p(\overline{\varphi}_{\pm}, t).$$

Рассмотрим интеграл

$$I_p^{\pm}(\xi) := \int_0^{\xi} \delta_p^{\pm}(t) dt, \quad \xi \geq 0.$$

Ясно, что $I_p^{\pm}(0) = 0$, и в силу условия (2.1) для $\xi \geq \max\{b_{\pm} - a_{\pm}, B_{\pm} - A_{\pm}\}$ имеем

$$I_p^{\pm}(\xi) \leq L(x_{\pm})_p - L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_{\pm}\right)_p \leq 0.$$

Кроме того, производная $(I_p^{\pm})'(t) = \delta^{\pm}(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Следовательно, $I_p^{\pm}(\xi) \leq 0$ для всех $\xi \geq 0$. Неравенство (2.9) доказано. Из него в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [13], теорема 1.3.11) следует, что

$$\int_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} \Phi\big(x^p_{\pm}(t)\big)\, dt \leq \int_{A_{\pm}}^{B_{\pm}} \Phi\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)^p_{\pm}(t)\right) dt, \quad \Phi \in W. \tag{2.13}$$

Докажем теперь неравенство (2.4). Переходя к сдвигам функций $\overline{x}$ и $\left(\overline{\varphi}^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)$, можем считать, что

$$a_{\pm} = A_{\pm} = 0. \tag{2.14}$$

Тогда из теоремы сравнения Хермандера следует, что разность $\Delta^{\pm}(t) := \overline{x}_{\pm}(t) - \overline{\varphi}_{\pm}(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Вследствие монотонного возрастания функций $f(t) = t^p$ и $\Phi \in W$ то же самое справедливо и для разности

$$\Delta^{\pm}_{\Phi}(t) := \Phi\big(\overline{x}^p_{\pm}(t)\big) - \Phi\big(\overline{\varphi}^p_{\pm}(t)\big)\,, \quad t > 0.$$

Положим

$$I_{\Phi}^{\pm}(\xi) := \int\limits_{0}^{\xi} \Delta_{\Phi}^{\pm}(t)dt, \quad \xi \geq 0.$$

Ясно, что $I_{\Phi}^{\pm}(0) = 0$. Учитывая также неравенство (2.13) и предположение (2.14), имеем

$$I_{\Phi}^{\pm}(\xi) \leq \int\limits_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} \Phi\big(x_{\pm}^{p}(t)\big)\, dt - \int\limits_{A_{\pm}}^{B_{\pm}} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt \leq 0$$

для $\xi \geq \max\{b_{\pm} - a_{\pm}, B_{\pm} - A_{\pm}\}$. Кроме того, производная $(I_{\Phi}^{\pm})'(t) = \Delta_{\Phi}^{\pm}(t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Следовательно, $I_{\Phi}^{\pm}(\xi) \leq 0$ для всех $\xi \geq 0$. В силу предположения (2.14) это равносильно неравенству (2.4).

Осталось доказать неравенство (2.8) при выполнении условий (2.6), (2.7). Пусть последние два условия выполнены. Тогда, переходя, если нужно, к сдвигу функции x, можно считать, что

$$a_{\pm} = \alpha_{\pm}, \qquad b_{\pm} = \beta_{\pm}. \tag{2.15}$$

Поэтому из теоремы сравнения Хермандера (ее условия, как было отмечено, выполнены) вытекают неравенства

$$x_{\pm}(t) \leq \left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}(t), \quad t \in [a_{\pm}, b_{\pm}].$$

Отсюда в силу предположения (2.15) непосредственно следует неравенство (2.8).

Лемма 3 доказана.

В ходе доказательства леммы 3 было получено неравенство (2.13). Полагая в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, где $q \geq p$, учитывая условия (2.2), (2.3) и определение (1.4) величины $L(x)_q$, приходим к такому следствию.

Следствие 2. *В условиях леммы* 3 *для любой функции* $\Phi \in W$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} \Phi\big(x_{\pm}^{p}(t)\big)\, dt \leq \int\limits_{A_{\pm}}^{B_{\pm}} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt = \int\limits_{0}^{2\pi/\lambda} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt.$$

В частности, для любого $q \geq p$

$$L(x_{\pm})_q \leq L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q.$$

Положим

$$d_r^{\pm} := \mu\left(\mathrm{supp}_{[0,\, 2\pi/\lambda]}\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right), \tag{2.16}$$

где множество $\mathrm{supp}_{[a,\, b]} x_{\pm}$ определено равенством (1.8). Отметим, что $d_r^{+} + d_r^{-} = 2\pi/\lambda$, причем $d_r^{+} = d_r^{-}$ для нечетных r.

Лемма 4. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p, \alpha, \beta > 0$ *и для функции* $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ *число* $\lambda > 0$ *выбрано так, что выполнены условия*

$$L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right)_p, \tag{2.17}$$

где величина $L(x)_p$ *определена равенством* (1.4). *Если отрезок* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *удовлетворяет условию*

$$\delta_+ := \mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_+\right) \le d_r^+ \tag{2.18}$$

или условию

$$\delta_- := \mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_-\right) \le d_r^-, \tag{2.19}$$

то для любой функции $\Phi \in W$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_+^p(t)\big)\,dt \le \int\limits_{m^+-\Theta_1^+}^{m^++\Theta_2^+} \Phi\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right)dt \tag{2.20}$$

или соответственно

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_-^p(t)\big)\,dt \le \int\limits_{m^--\Theta_1^-}^{m^-+\Theta_2^-} \Phi\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_-^p(t)\right)dt, \tag{2.21}$$

где $m^\pm$ *— точки локального максимума функции* $(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}(t))_\pm$, *а числа* $\Theta_1^\pm,\ \Theta_2^\pm > 0$ *таковы, что*

$$\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}(m^\pm - \Theta_1^\pm) = \varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}(m^\pm + \Theta_2^\pm), \tag{2.22}$$

причем

$$\Theta_1^\pm + \Theta_2^\pm = \delta_\pm. \tag{2.23}$$

Отметим, что $\Theta_1^\pm = \Theta_2^\pm$ для четных r.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in W^r_{\infty,\alpha,\beta}$ и отрезок $[a,b]$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Докажем неравенство (2.20) при выполнении условия (2.18) (неравенство (2.21) при выполнении условия (2.19) доказывается аналогично). Будем считать, что

$$x_+(a) > 0, \qquad x_+(b) > 0 \tag{2.24}$$

(если хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, доказательство неравенства (2.20) только упрощается).

Если функция x не имеет нулей на (a,b), то согласно следствию 1 из леммы 2 существует такой интервал (c,d) (конечный или бесконечный), что $(a,b) \subset (c,d)$, причем

$$x_+(c) = x_+(d) = 0, \qquad x_+(t) > 0, \quad t \in (c,d).$$

Через $\overline{x}_+$ обозначим сужение x_+ на (c,d), а через $\overline{\varphi}_+$ — сужение $(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta})_+$ на $[0,2\pi/\lambda]$. Тогда, повторяя рассуждения из доказательства неравенства (2.9), получаем

$$\int\limits_0^\xi r^p(\overline{x}_+,t)dt \le \int\limits_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_+,t)dt, \quad \xi>0.$$

Отсюда в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [13], теорема 1.3.11) следует, что

$$\int\limits_0^\xi \Phi(r^p(\overline{x}_+,t))\,dt \le \int\limits_0^\xi \Phi\big(r^p(\overline{\varphi}_+,t)\big)\,dt, \qquad \Phi\in W, \quad \xi>0.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b \Phi\big((\overline{x}_+^p(t)\big)\,dt = \int\limits_0^{b-a} \Phi(r^p(\overline{x}_+,t))\,dt \le \int\limits_0^{b-a} \Phi\big(r^p(\overline{\varphi}_+(t)\big)\,dt.$$

Теперь неравенство (2.20) в случае, когда x не имеет нулей на (a,b), следует из очевидного равенства

$$\int\limits_0^{b-a} \Phi\big(r^p(\overline{\varphi}_+(t)\big)\,dt = \int\limits_{m^+-\Theta_1^+}^{m^++\Theta_2^+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p(t)\right)dt,$$

где m^+ — точка локального максимума сплайна $(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(t))_+$, а $\Theta_1^+,\Theta_2^+>0$ удовлетворяют условиям (2.22) и (2.23), причем $\delta_+=b-a$.

Пусть теперь x имеет нули на (a,b). Положим

$$a' := \inf\{t\in(a,b): x_+(t)=0\}, \qquad b' := \sup\{t\in(a,b): x_+(t)=0\}.$$

Тогда в силу (2.24) носитель $\mathrm{supp}_{[a,b]}x_+$ имеет вид

$$\mathrm{supp}_{[a,b]}x_+ = (a,a')\bigcup(b',b)\bigcup\bigcup_k(a_k,b_k), \tag{2.25}$$

где $(a_k,b_k)\subset(a',b')$, причем

$$x_+(a_k)=x_+(b_k)=0, \qquad x_+(t)>0, \quad t\in(a_k,b_k)$$

(не исключено, что множество таких интервалов (a_k,b_k) пусто). В силу соотношения (2.18), предположения (2.24) и определения чисел a' и b' имеем

$$\delta_+ = (a'-a)+(b-b')+\sum_k(b_k-a_k) \le d_r^+. \tag{2.26}$$

Пусть A_+ и B_+ — два соседних нуля сплайна $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}$, причем $(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta})_+(t)>0$ для $t\in(A_+,B_+)$. В силу следствия 1 существуют интервалы (α',a'), (b',β') (конечные или бесконечные), для которых

$$x_+(\alpha')=x_+(a')=0, \qquad x_+(t)>0, \quad t\in(\alpha',a'),$$

и

$$x_+(b') = x_+(\beta') = 0, \qquad x_+(t) > 0, \quad t \in (b', \beta').$$

Применяя к интервалам (α', a'), (b', β') и отрезку $[A_+, B_+]$ неравенства (2.4) и (2.5), получаем

$$\int\limits_{b'}^{b} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le \int\limits_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt, \quad \xi = b - b', \tag{2.27}$$

и

$$\int\limits_{a}^{a'} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le \int\limits_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt, \quad \eta = a' - a, \tag{2.28}$$

$\Big($в силу (2.26) вместо $\overline{x}_+$ в неравенстве (2.4) можно писать x_+, а вместо $\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+$ – $\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\Big)$.
В силу (2.26) существуют попарно непересекающиеся интервалы (α_k, β_k) такие, что

$$(\alpha_k, \beta_k) \subset (A_+ + \xi,\ B_+ - \eta), \qquad \beta_k - \alpha_k = b_k - a_k.$$

Для них в силу соотношения (2.8) выполнено неравенство

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt. \tag{2.29}$$

Суммируя оценки (2.27) – (2.29) и учитывая (2.25), имеем

$$\int\limits_{a}^{b} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt = \int\limits_{a}^{a'} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt + \int\limits_{b'}^{b} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt + \sum_k \int\limits_{a_k}^{b_k} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt + \int\limits_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt + \sum_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt.$$

Поскольку $\beta_k - \alpha_k = b_k - a_k$, то в силу (2.26) $\xi + \eta + \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = \delta_+$. Поэтому сумма интегралов в правой части полученной оценки не превышает

$$\int\limits_{0}^{\delta_+} r\left(\Phi\left(\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p, t\right)\right) dt = \int\limits_{m^+ - \Theta_1^+}^{m^+ + \Theta_2^+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt,$$

где $\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+$ — сужение $\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+$ на $[A_+, B_+]$, m^+ — точка локального максимума функции $(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(t))_+$, а Θ_1^+, $\Theta_2^+ > 0$ удовлетворяют соотношениям (2.22) и (2.23). Неравенство (2.20) доказано.

Лемма 4 доказана.

Следствие 3. *Если в условиях леммы* 4 *выполнено условие* $\mu\Big(\mathrm{supp}_{[a,b]}x_+\Big) \le d_r^+$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_+^p(t)\big)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi/\lambda} \Phi\bigg(\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_+^p(t)\bigg)\,dt, \tag{2.30}$$

а при выполнении условия $\mu\Big(\mathrm{supp}_{[a,b]}x_-\Big) \le d_r^-$ — *неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_-^p(t)\big)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi/\lambda} \Phi\bigg(\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_-^p(t)\bigg)\,dt.$$

3. Основные результаты. Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda > 0$. Напомним, что

$$L_r(p,\alpha,\beta,\lambda) := \left\{x \in W_{\infty,\alpha,\beta}^r \colon L(x_\pm)_p \le L\left(\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm\right)_p\right\}, \tag{3.1}$$

где величина $L(x)_p$ определена равенством (1.4). Зафиксируем число $\mu > 0$ и введем множество пар (x, I) функций x и отрезков $I = [a,b]$ равенством

$$L_r^\pm(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu) := \big\{(x,I)\colon x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda),\ \mathrm{supp}_{[a,b]}x_\pm \le \mu\big\}. \tag{3.2}$$

Напомним, что

$$d_r^\pm := \mu\bigg(\mathrm{supp}_{[0,\,2\pi/\lambda]}\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm\bigg). \tag{3.3}$$

Ясно, что $d_r^+ + d_r^- = 2\pi/\lambda$, причем $d_r^+ = d_r^-$ для нечетных r. Представим число μ одним из способов (через d_r^+ или d_r^-)

$$\mu = n_\pm d_r^\pm + \Theta_1^\pm + \Theta_2^\pm, \quad n_\pm \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \qquad \Theta_1^\pm,\ \Theta_2^\pm,\ \Theta_1^\pm + \Theta_2^\pm \in [0,\ d_r^\pm), \tag{3.4}$$

причем $\Theta_1^\pm = \Theta_2^\pm$ для четных r.

Заметим, что если числа $\tau^\pm \in \mathbf{R}$ и отрезок $[A,B]$ таковы, что

$$B - A = n_\pm\frac{2\pi}{\lambda} + \Theta_1^\pm + \Theta_2^\pm, \tag{3.5}$$

$$\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm(A + \Theta_1^\pm + \tau^\pm) = \Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm(B - \Theta_2^\pm + \tau^\pm) = \left\|\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm\right\|_\infty, \tag{3.6}$$

то $\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(\cdot + \tau^\pm), [A,B]\Big) \in L_r^\pm(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu > 0$. *Тогда для любой функции* $\Phi \in W$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\big(x_\pm^p(t)\big)\,dt : (x,I) \in L_r^\pm(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)\right\} = \int\limits_A^B \Phi\bigg(\Big(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\Big)_\pm^p(t+\tau^\pm)\bigg)\,dt,$$

где множества $L_r^\pm(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$, *числа* $\tau^\pm$ *и отрезок* $[A,B]$ *определены соотношениями* (3.1)–(3.6).

Доказательство. Зафиксируем пару $(x, I) \in L_r^{\pm}(p, \alpha, \beta, \lambda, \mu)$. Докажем теорему для x_+ (для x_- доказательство аналогично). Во-первых, докажем неравенство

$$I := \int\limits_a^b \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le \int\limits_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t+\tau^+)\right) dt := I(\mu). \tag{3.7}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathrm{supp}_{[a,\,b]} x_+ = \mu$. Поскольку для μ справедливо представление (3.4), то отрезок $[a, b]$ представим в виде

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n_+} [\alpha_k, \beta_k] \bigcup [\alpha, \beta],$$

причем интервалы (α_k, β_k), (α, β) попарно не пересекаются и

$$\mu\big(\mathrm{supp}_{[\alpha_k,\,\beta_k]} x_+\big) = d_r^+, \qquad \mu\big(\mathrm{supp}_{[\alpha,\beta]} x_+\big) = \Theta_1^+ + \Theta_2^+.$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt = \sum_{k=1}^{n_+} \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt + \int\limits_\alpha^\beta \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt.$$

Применяя для оценки интегралов в правой части последнего равенства неравенство (2.30) и неравенство (2.20), получаем

$$\int\limits_a^b \Phi\big(x_+^p(t)\big)\, dt \le n_+ \int\limits_0^{2\pi/\lambda} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt + \int\limits_{m^+-\Theta_1^+}^{m^++\Theta_2^+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+^p (t+\tau^+)\right) dt,$$

где m^+– точка максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}$, а последнее равенство в этой цепочке вытекает из (3.5) и (3.6). Итак, неравенство (3.7) доказано в случае, когда $\mathrm{supp}_{[a,\,b]} x_+ = \mu$. Пусть теперь $\mu_1 := \mathrm{supp}_{[a,\,b]} x_+ < \mu^+$. Заметим, что число μ однозначно представимо в виде (3.4) (через d_r^+) и, следовательно, этим числом однозначно (с точностью до сдвига) определяются отрезок $[A, B]$ и число τ^+. Поэтому интеграл $I(\mu)$ в правой части (3.7) однозначно определяется числом μ. При этом, очевидно, что $I(\mu)$ строго возрастает как функция от μ. Следовательно, повторив рассуждения из предыдущего случая, для интеграла I в левой части (3.7) получим оценку

$$I \le I(\mu_1) < I(\mu).$$

Таким образом, неравенство (3.7) полностью доказано. Осталось заметить, что для функции $x(\cdot) = \varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(\cdot + \tau^+)$ и отрезка $[A, B]$, которые определены соотношениями (3.5), (3.6), неравенство (3.7) обращается в равенство.

Теорема 1 доказана.

Пусть $k,\ r \in \mathbf{N},\ k < r;\ p,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda > 0$. В силу леммы 2, если $x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda)$ (это множество определено равенством (3.1)), то $x^{(k)} \in L_{r-k}(q,\alpha,\beta,\lambda)$ для любого $q \geq 1$.

Зафиксируем число $\mu > 0$ и введем множество пар (x, I) функций x и отрезков $I = [a,b]$ равенством

$$L^{\pm}_{r,k}(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu) := \left\{(x,I) \colon x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda),\ \mathrm{supp}_{[a,b]} x^{(k)}_{\pm} \leq \mu\right\}. \tag{3.8}$$

Представим число μ одним из способов (через d^{+}_{r-k} или d^{-}_{r-k})

$$\mu = n_{\pm} d^{\pm}_{r-k} + \Theta^{\pm}_1 + \Theta^{\pm}_2, \qquad n_{\pm} \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \qquad \Theta^{\pm}_1,\ \Theta^{\pm}_2,\ \Theta^{\pm}_1 + \Theta^{\pm}_2 \in [0,\ d^{\pm}_{r-k}), \tag{3.9}$$

причем $\Theta^{\pm}_1 = \Theta^{\pm}_2$ для четных $r-k$, а величины $d^{\pm}_r$ определены соотношением (3.3).

Выберем далее числа $\tau^{\pm} \in \mathbf{R}$ и отрезок $[A,\ B]$ так, чтобы

$$B - A = n_{\pm}\frac{2\pi}{\lambda} + \Theta^{\pm}_1 + \Theta^{\pm}_2, \tag{3.10}$$

$$\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}(A + \Theta^{\pm}_1 + \tau^{\pm}) = \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}(B - \Theta^{\pm}_2 + \tau^{\pm}) = \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}\right\|_{\infty}. \tag{3.11}$$

Тогда $\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}(\cdot + \tau^{\pm}), [A,B]\right) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$.

Теорема 2. *Пусть $k,\ r \in \mathbf{N},\ k < r;\ p,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu > 0$. Тогда для любой функции $\Phi \in W$*

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\left(x^{(k)}_{\pm}(t)\right) dt \colon (x,I) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)\right\} = \int\limits_A^B \Phi\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}(t + \tau^{\pm})\right) dt,$$

где множества $L^{\pm}_{r,k}(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$, числа $\tau^{\pm}$ и отрезок $[A,B]$ определены соотношениями (3.1) *и* (3.8) – (3.11).

Доказательство. В силу леммы 2 имеет место импликация

$$x \in L_r(p,\alpha,\beta,\lambda) \Rightarrow x^{(k)} \in L_{r-k}(1,\alpha,\beta,\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$(x,I) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu) \Rightarrow (x^{(k)}, I) \in L^{\pm}_{r-k}(1,\alpha,\beta,\lambda,\mu).$$

Поэтому, применяя теорему 1 к классу $L^{\pm}_{r-k}(1,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$, получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в теореме 1 и $\Phi(t) = t^q$ в теореме 2, получаем такое следствие.

***Следствие* 4.** *Пусть $r \in \mathbf{N};\ p,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu > 0$. Тогда для любого $q \geq p$*

$$\sup\left\{\int\limits_a^b x^q_{\pm}(t)dt \colon (x,I) \in L^{\pm}_r(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)\right\} = \int\limits_A^B \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)^q_{\pm}(t + \tau^{\pm})dt,$$

где множества $L^{\pm}_r(p,\alpha,\beta,\lambda,\mu)$, числа $\tau^{\pm}$ и отрезок $[A,B]$ определены соотношениями (3.1) – (3.6).

Кроме того, для любого $k \in \mathbf{N},\ k < r,$ *и произвольного* $q \geq 1$

$$\sup\left\{ \int\limits_a^b \left(x_{\pm}^{(k)}(t)\right)^q dt \colon (x, I) \in L_{r,k}^{\pm}(p, \alpha, \beta, \lambda, \mu) \right\} = \int\limits_A^B \left(\left(\varphi_{\lambda, r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}^q (t + \tau^{\pm}) \right) dt,$$

где множества $L_{r,k}^{\pm}(p, \alpha, \beta, \lambda, \mu)$, *числа* $\tau^{\pm}$ *и отрезок* $[A, B]$ *определены соотношениями* (3.1) *и* (3.8) – (3.11).

Литература

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 150 p.
4. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 765 – 776.
7. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
8. *Hörmander L.* A new proof and generalization of inequality of Bohr // Math. Scand. – 1954. – **2**. – P. 33 – 45.
9. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН. СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521 – 524.
10. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II. Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
11. *Кофанов В. А.* Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 636 – 648.
12. *Каменева В. В., Кофанов В. А.* Задача Боянова – Найденова для положительных (отрицательных) частей дифференцируемых функций на оси // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер. Математика. – 2018. – Вип. 23. – С. 25 – 36.
13. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 09.08.18