УДК 515.124.4

В. І. Кузьмич (Херсон. держ. ун-т)

ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

We study some problems of geometrization of arbitrary metric spaces. In particular, we studied the concept of straight and flat placement of points in this space. In a certain way, we continue the investigations of Kagan devoted to the detailed analysis of the notion of straightforwardness based on four groups of postulates. The results of our work are based on the notion of angular characteristics of three points of the space proposed by Alexandrov. We establish the conditions under which the set of points of an arbitrary metric space satisfies all five postulates of the first group of Kagan's placement postulates. The relationship between rectilinear and flat placements of points of the metric space is investigated. Examples of placements of this kind based on linear functions in some classical spaces are presented. The results of the paper are obtained without using the property of completeness of the space and can be used for the discrete computation and structuring of specific metric spaces.

Статтю присвячено окремим питанням геометризації довільного метричного простору. Зокрема, вивчаються поняття прямолінійного та плоского розміщення точок цього простору. У статті продовжено дослідження В. Ф. Кагана, який детально вивчив поняття прямолінійності на основі чотирьох груп постулатів. Отримані у статті результати спираються на поняття кутової характеристики трьох точок простору, як це свого часу пропонував О. Д. Александров. Встановлено умови для того, щоб множина точок довільного метричного простору задовольняла всі п'ять постулатів першої групи постулатів розміщення В. Ф. Кагана. Вивчено взаємовідношення між прямолінійним та плоским розміщеннями точок метричного простору. Наведено приклади такого розміщення на основі лінійних функцій у окремих класичних просторах. Результати отримано без використання повноти простору, і їх можна застосувати для дискретних обчислень та структуризації конкретних метричних просторів.

1. Вступ. Дану роботу присвячено питанням „геометризації" довільного метричного простору, тобто введенню у цих просторах понять, аналогічних класичним основним геометричним поняттям: лінії, прямої лінії, кута, площини. Особливість роботи полягає у відмові від поняття граничного переходу при розгляді цих питань, а отже, і від поняття повноти простору, що з необхідністю виникають при спробах побудувати повний аналог геометрії Евкліда у довільному метричному просторі. Такий підхід, на думку автора, дає можливість використовувати отримані результати у скінченних метричних просторах.

Поняття метричного простору є одним із центральних понять математики. Поряд з метричними просторами також активно вивчаються їхні спеціальні класи і модифікації, що мають застосування у різних областях сучасної математики. У зв'язку з цим відмітимо ультраметричні або неархімедові простори (наприклад, в [1] розглядається ультраметрика на вільних групах), а також розмиті метричні простори (див., наприклад, [2], де будується розмита метризація простору ймовірнісних мір).

У довільному метричному просторі (X, ρ) єдиною його числовою характеристикою є відстань $\rho(x, y)$ між довільними елементами (точками) x і y простору. Цим частково можна пояснити значні проблеми при спробах провести його геометризацію, оскільки введення аналогів основних геометричних понять геометрії Евкліда — прямої лінії, кута, площини — з необхідністю вимагає властивості повноти простору.

На думку автора, у довільному метричному просторі в окремих випадках (наприклад, у випадку простору зі скінченною або зчисленною кількістю точок), не намагаючись створити повний аналог геометрії Евкліда, можна ввести поняття кута, паралельності, перпендикулярності без вимоги повноти цього простору. Аналогічним чином В. Ф. Каган розглядав поняття

„прямолінійного розміщення” точок метричного простору та „прямолінійного образу”. За ознаку цих понять та властивостей можна взяти одну з числових характеристик плоского кута у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров [3, с. 36]. У цьому випадку можна ввести поняття „плоского розміщення” точок довільного метричного простору, як аналога площини у геометрії Евкліда.

В. Ф. Каган у роботі [4, с. 260 – 297] побудував аксіоматичну теорію евклідової прямої лінії, запропонувавши чотири групи постулатів: I_{1-5} — постулати розміщення, II_{1-3} — постулати структури, III_{1-7} — постулати конгруентності, IV_1 — постулат Архімеда, IV_2 — постулат Кантора. У роботі [5, с. 29] автор запропонував для вивчення прямолінійності у довільному метричному просторі ввести поняття кута, утвореного трьома точками простору, як упорядкованої трійки цих точок, та кутової характеристики. Ця характеристика базується на формулі косинусів. У роботах [6, с. 11, 12; 7, с. 42, 43], використовуючи поняття кута та кутової характеристики, автор увів поняття плоского розміщення точок довільного метричного простору, для визначення якого використовувалась рівність нулю аналога визначника матриці Грама системи одиничних векторів.

У даній роботі наведено доведення деяких тверджень, анонсованих у роботі [6], введено поняття прямолінійної впорядкованості точок метричного простору та встановлено, що при виконанні умови прямолінійної впорядкованості точок деякої множини довільного метричного простору для неї виконуються постулати I_{1-5}, розглянуті В. Ф. Каганом.

Поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору детально вивчалось у роботі [4]. У формі, в якій це поняття буде розглядатись у даній роботі, воно зустрічається у роботі [8, с. 527].

Метою даної статті є створення інструментарію для побудови у метричному просторі звичних геометричних об’єктів і понять евклідової та неевклідової геометрій, що дасть можливість провести структуризацію цього простору.

2. Попередні відомості. Наступні означення введено у попередніх роботах автора. Наведемо їх, з незначними модифікаціями, для кращого розуміння подальших міркувань.

У подальшому всі точки простору будемо вважати різними, тобто будемо розглядати лише додатні значення метрики простору. Сукупність трьох точок $a,\ b,\ c$ простору будемо називати трикутником і позначатимемо $\triangle\ (a,b,c)$. При цьому самі точки будемо називати вершинами, а пари точок $(a,b),\ (b,c),\ (a,c)$ — сторонами трикутника.

Означення 1. *Нехай $a,\ b,\ c$ — довільні точки метричного простору (X,ρ). Впорядковану трійку (a,b,c) цих точок будемо називати кутом із вершиною в точці b і позначатимемо $\angle(a,b,c)$. При цьому пари точок (a,b) і (b,c) будемо називати сторонами кута* (*див.* [5, *с.* 28]).

Означення 2. *Нехай $a,\ b,\ c$ — довільні точки метричного простору (X,ρ). Характеристикою кута $\angle(a,b,c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a,b,c)$, що знаходиться за формулою*

$$\varphi(a,b,c)=\frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)} \tag{1}$$

(*див.* [3, *с.* 36; 5, *с.* 29]).

Метричний простір (X, ρ), в якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за означенням 2 будемо називати метричним простором із кутовою характеристикою і позначатимемо Π.

Означення 3. *Будемо казати, що точки* a, b, c *простору* Π *прямолінійно розміщені*, *якщо хоча б для однієї з цих точок* (*наприклад*, *для точки* b) *виконується рівність*

$$\varphi^2(a, b, c) = 1. \tag{2}$$

(*див.* [5, *с.* 29]).

Означення 4. *Будемо казати*, *що множина точок простору* Π *прямолінійно розміщена*, *якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені* (*див.* [7, *с.* 527]).

Рівність (2) рівносильна рівності $\varphi(a, b, c) = \pm 1$, до того ж при виконанні рівності $\varphi(a, b, c) = -1$ природно казати, що точка b „лежить між” точками a і c (або є внутрішньою для них), а кут $\angle(a, b, c)$ називати „розгорнутим”. При виконанні рівності $\varphi(b, a, c) = 1$ природно казати, що точка a „лежить поза” точками b і c (або є крайньою для них), а кут $\angle(b, a, c)$ називати „нульовим”.

З рівності (1) легко отримати, що рівність $\varphi(a, b, c) = -1$ еквівалентна рівності $\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c)$, а рівність $\varphi(a, b, c) = 1$ — сукупності двох рівностей

$$\left[\begin{array}{l} \rho(a, b) = \rho(a, c) + \rho(b, c), \\ \rho(b, c) = \rho(a, c) + \rho(a, b). \end{array}\right.$$

Використовуючи рівність (1), можна, по аналогії з геометрією Евкліда, дати означення „прямого” кута $\angle(a, b, c)$ у просторі Π.

Означення 5. *Якщо для точок* a, b, c *простору* Π *виконується рівність* $\varphi(a, b, c) = 0$, *то кут* $\angle(a, b, c)$ *будемо називати прямим.*

Нехай задано метричний простір (X, ρ) і три довільні точки x_1, x_2, x_3 цього простору. Для зручності будемо використовувати позначення $\rho(x_i, x_j) = \rho_{ij}$,

$$\frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} = \varphi_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Використовуючи рівність (1), легко довести, що для довільних трьох точок x_i, x_j, x_k простору Π виконуються нерівності $-1 \leq \varphi_{ijk} \leq 1$.

Наведемо приклад прямолінійної розміщеності нескінченної множини точок у метричному просторі $C_{[0;1]}$.

***Приклад* 1.** Розглянемо множину функцій $y = kx$ на відрізку $[0; 1]$, як підмножину простору $C_{[0;1]}$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій.

Покажемо, що будь-які три різні точки $y_1 = k_1 x$, $y_2 = k_2 x$, $y_3 = k_3 x$ цієї множини розміщені прямолінійно. За означенням 4 це буде означати прямолінійне розміщення всієї множини.

Нехай, для визначеності, виконуються нерівності $k_1 < k_2 < k_3$. При цьому припущенні знайдемо відстані між точками y_1, y_2, y_3 за метрикою простору $C_{[0;1]} : \rho(f, g) = \max_{x \in [0;1]} \big| f(x) - g(x) \big|$. Матимемо $\rho_{12} = k_2 - k_1$, $\rho_{13} = k_3 - k_1$, $\rho_{23} = k_3 - k_2$. Оскільки виконується рівність $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$, то це означає, що точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно. З довільності вибору цих точок і випливає прямолінійність розміщення всієї множини функцій $y = kx$ у просторі $C_{[0;1]}$.

3. Основні результати. Наведемо формулювання отриманих результатів (з їх доведенням можна ознайомитись у пункті 4 даної статті).

Спочатку встановимо співвідношення між трьома кутами одного трикутника у метричному просторі.

Теорема 1. *Для довільних точок $x_1,\ x_2,\ x_3$ простору Π виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{213} & -\varphi_{123} \\ \varphi_{213} & 1 & \varphi_{132} \\ -\varphi_{123} & \varphi_{132} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\varphi_{213}\varphi_{123}\varphi_{132} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{123}^2 - \varphi_{132}^2 = 0. \tag{3}$$

Доведення теореми 1 наведено у підпункті 4.1.

Можна розглянути деякі частинні випадки рівності (3).

Теорема 2. *З трьох прямолінійно розміщених точок простору Π одна, і лише одна, знаходиться між двома іншими, а кожна з цих двох точок лежить поза двома іншими.*

Доведення теореми 2 наведено у підпункті 4.2.

Лема 1. *Якщо чотири точки прямолінійно розміщені у просторі Π, то дві з них лежать між двома іншими.*

Доведення леми 1 наведено у підпункті 4.3.

Зауважимо, що вказані у формулюванні леми 1 точки визначаються неоднозначно. З іншого боку, справедливим є таке твердження.

Лема 2. *Нехай точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно розміщені у просторі Π, до того ж точки x_2 і x_4 лежать між точками x_1 і x_3, а точка x_1 лежить поза точками x_2 і x_4. Якщо точка x_4 лежить між точками x_1 і x_3, то вона лежить або між точками x_1 і x_2, або між точками x_2 і x_3.*

Доведення леми 2 наведено у підпункті 4.4.

Тепер знайдемо умови для того, щоб множина точок довільного метричного простору задовольняла всі п'ять постулатів першої групи постулатів розміщення В. Ф. Кагана. Покажемо, що у просторі Π для множини прямолінійно розміщених точок виконуються постулати розміщення I_{1-4} роботи [4]. Ці постулати, з несуттєвими змінами у формулюванні та у позначеннях роботи [4], мають такий вигляд.

I_1. *Якщо точка b лежить між точками a і c, то вона лежить також між c і a (див.* [4, *с.* 260]).

Виконання цього постулату для простору Π випливає з властивості симетричності рівності (1): $\varphi(a,b,c) = \varphi(c,b,a)$.

I_2. *Із будь-яких трьох точок $a,\ b,\ c$ принаймні одна лежить між двома іншими (див.* [4, *с.* 260]).

Цей постулат є простим наслідком теореми 2.

I_3. *Якщо точка b лежить між точками a і c, то точка c не лежить між точками a і b (див.* [4, *с.* 260]).

Цей постулат теж випливає з теореми 2.

I_4. *Якщо точка b лежить між точками a і c, а точка d — між точками a і b, то точка d лежить між точками a і c (див.* [4, *с.* 260]).

Цей постулат виконується у довільному метричному просторі. Дійсно, нехай точка b лежить між точками a і c. Це означає, що виконується рівність $\rho(a,c)=\rho(a,b)+\rho(b,c)$. Якщо точка d лежить між точками a і b, то це означає, що виконується рівність $\rho(a,b)=\rho(a,d)+\rho(d,b)$. Підставивши цю рівність у праву частину попередньої рівності, отримаємо $\rho(a,c)=\rho(a,b)+$ $+\rho(b,c)=\rho(a,d)+\rho(d,b)+\rho(b,c)$. Із нерівності трикутника матимемо $\rho(d,b)+\rho(b,c)\geq\rho(d,c)$. Таким чином, буде виконуватись нерівність $\rho(a,c)\geq\rho(a,d)+\rho(d,c)$. А це, внаслідок нерівності трикутника, можливо лише у випадку виконання рівності $\rho(a,c)=\rho(a,d)+\rho(d,c)$. Отже, точка d лежить між точками a і c.

Лема 2 означає, що для чотирьох точок простору Π, які задовольняють умови леми, виконується такий постулат.

I_5. *Якщо на прямій точка b лежить між точками a і c, а точка d, відмінна від b, також лежить між точками a і c, то має місце принаймні одне з двох розміщень: точка d лежить між точками a і b, або точка d лежить між точками b і c (див.* [4, *с.* 260]).

Оскільки В. Ф. Каган не виділив окремо множину точок метричного простору, що задовольняють постулати розміщення I_{1-5}, а, приєднавши до них постулати структури II_{1-3}, виділив множину L_{II} точок, що задовольняють ці дві групи постулатів [4, с. 265], то природно дати такі означення.

Означення 6. *Нехай точки x_1, x_2, x_3, x_4 прямолінійно розміщені у просторі Π, а точки x_2 і x_4 лежать між точками x_1 і x_3. Якщо точка x_1 лежить поза точками x_2 і x_4, то точки x_1, x_2, x_3, x_4 будемо називати прямолінійно впорядкованими, а точку x_1 — крайньою для цих точок.*

Для довільної прямолінійно розміщеної множини точок простору Π природно ввести означення її прямолінійної впорядкованості.

Означення 7. *Якщо будь-які чотири точки прямолінійно розміщеної множини точок простору Π є прямолінійно впорядкованими, то таку множину будемо називати прямолінійно впорядкованою і позначати L_{I}.*

Підсумовуючи отримані вище результати, можна зробити висновок, що у множині L_{I} виконуються всі постулати I_{1-5} розміщення, розглянуті В. Ф. Каганом.

Встановимо аналітичний критерій прямолінійної впорядкованості чотирьох точок простору Π.

Лема 3. *Для того щоб точки x_1, x_2, x_3, x_4 простору Π були прямолінійно впорядковані, необхідно і достатньо, щоб хоча б для однієї з них (наприклад, для точки x_1) виконувалась рівність*

$$\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314}=1. \tag{4}$$

Доведення леми 3 наведено у підпункті 4.5.

Можна встановити умову, коли з чотирьох прямолінійно впорядкованих точок дві точки є крайніми.

Лема 4. *Нехай точки x_1, x_2, x_3, x_4 прямолінійно впорядковані у просторі Π, а точки x_2 і x_4 лежать між точками x_1 і x_3. Якщо точка x_1 є крайньою, то точка x_3 теж є крайньою для точок x_1, x_2, x_3, x_4.*

Доведення леми 4 наведено у підпункті 4.6.

Слід зазначити, що не завжди з прямолінійної розміщеності точок випливає, що серед них є крайня точка. Про це свідчить такий приклад.

***Приклад* 2.** Розглянемо метричний простір R_0^2 впорядкованих груп із двох дійсних чисел $a(a_1, a_2)$, відстань між елементами $a(a_1, a_2)$ і $b(b_1, b_2)$ якого визначається за формулою $\rho(a,b) = \max\big(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\big)$.

У просторі R_0^2 візьмемо чотири точки: $a(1,0)$, $b(0,1)$, $c(-1,0)$, $d(0,-1)$. Знайдемо відстані між цими точками за метрикою простору: $\rho(a,b) = 1,\ \rho(a,c) = 2,\ \rho(a,d) = 1,\ \rho(b,c) = 1,\ \rho(b,d) = 2,\ \rho(c,d) = 1$.

Із отриманих значень випливає, що будь-які три з цих точок прямолінійно розміщені. Дійсно, за формулою (1) знайдемо всі кутові характеристики:

$$\varphi(b,a,c) = 1, \qquad \varphi(b,a,d) = -1, \qquad \varphi(c,a,d) = 1,$$

$$\varphi(a,b,c) = -1, \qquad \varphi(a,b,d) = 1, \qquad \varphi(c,b,d) = 1, \qquad \varphi(a,c,b) = 1, \qquad \varphi(a,c,d) = 1,$$

$$\varphi(b,c,d) = -1, \qquad \varphi(a,d,b) = 1, \qquad \varphi(a,d,c) = -1, \qquad \varphi(b,d,c) = 1.$$

В усіх випадках виконується рівність (2), отже, за означеннями 3 і 4 точки a, b, c, d прямолінійно розміщені. Однак серед них немає крайніх точок, оскільки кожна з цих точок лежить між деякими двома іншими з них.

Тепер розглянемо узагальнення поняття прямолінійного розміщення точок простору Π. Це узагальнення було введено автором у роботах [6, с. 11, 12; 7, с. 42].

Означення 8. *Будемо казати, що точки x_1, x_2, x_3, x_4 простору Π плоско розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки x_1) виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{213} & \varphi_{214} \\ \varphi_{213} & 1 & \varphi_{314} \\ \varphi_{214} & \varphi_{314} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0. \tag{5}$$

Аналітично у геометрії Евкліда рівність (5) означає рівність нулю об'єму тетраедра, вершини якого знаходяться у точках x_1, x_2, x_3, x_4 [9, с. 61].

Для точок довільної множини простору Π природно дати означення їхнього „плоского розміщення”.

Означення 9. *Будемо казати, що множина точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені (див.* [6, *с.* 12; 7, *с.* 43]).

У просторі Π співвідношення між прямолінійним і плоским розміщеннями точок більш складніші, ніж у геометрії Евкліда, де ці співвідношення встановлено постулатами. Однак у метричному просторі ми маємо змогу використовувати властивості множини дійсних чисел. Встановимо таке співвідношення аналітично.

Лема 5. *Для того щоб прямолінійно розміщені у просторі Π точки x_1, x_2, x_3, x_4 були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки x_1) виконувалась рівність* (4).

Доведення леми 5 наведено у підпункті 4.7.

Об'єднуючи леми 3, 5 і наслідок 2, отримуємо твердження, яке встановлює співвідношення між прямолінійним і плоским розміщеннями точок простору Π.

Теорема 3. *Для того щоб прямолінійно розміщена множина точок простору Π була плоско розміщена у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб вона була прямолінійно впорядкованою.*

Доведення теореми 3 наведено у підпункті 4.8.

З метою конструктивної побудови плоско розміщених множин точок простору Π на основі трьох прямолінійно розміщених точок розглянемо поняття суміжності двох кутів. Це поняття було введено у роботах [6, с. 11; 10, с. 65].

У геометрії Евкліда два суміжних кути доповнюють один одного до розгорнутого кута. У просторі Π це не завжди правильно.

***Приклад* 3.** Розглянемо у просторі $C_{[0;1]}$ точки $y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = x,\ y_4 = -x$. За метрикою простору $C_{[0;1]}$ відстані між цими точками є такими: $\rho_{12} = 1,\ \rho_{13} = 1,\ \rho_{14} = 1,\ \rho_{23} = 1,\ \rho_{24} = 2,\ \rho_{34} = 2$.

З отриманих значень випливає, що точки $y_1,\ y_3,\ y_4$ розміщені прямолінійно, до того ж точка y_1 лежить між двома іншими. Крім того, точки $y_1,\ y_2,\ y_4$ теж розміщені прямолінійно, до того ж точка y_1, як і у попередньому випадку, лежить між двома іншими.

Таким чином, кути $\angle(y_3, y_1, y_4)$ і $\angle(y_2, y_1, y_3)$ доповнюють один одного до розгорнутого кута $\angle(y_2, y_1, y_4)$.

Знайдемо кутові характеристики цих кутів: $\varphi(y_3, y_1, y_4) = -1,\ \varphi(y_2, y_1, y_3) = 0{,}5$. Отже, ненульовий кут доповнює до розгорнутого кут, який теж є розгорнутим.

Приклад 3 вказує на те, що за означення суміжних кутів у просторі Π слід вибрати їхні кутові характеристики.

У роботах [7, с. 43; 10, с. 65] встановлено, що рівність $\varphi_{124} = -\varphi_{324}$ є необхідною і достатньою умовою плоского розміщення таких точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ простору Π, що точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3. Ця рівність виконується також і для суміжних кутів у геометрії Евкліда, тому її слід вибрати для означення суміжності двох кутів у просторі Π.

Означення 10. *Нехай точки $x_1, x_2,\ x_3$ простору Π прямолінійно розміщені, до того ж кут $\angle(x_1, x_2, x_3)$ є розгорнутим. Якщо точка x_4 цього простору така, що виконується рівність*

$$\varphi_{124} = -\varphi_{324}, \tag{6}$$

то кути $\angle(x_1, x_2, x_4)$ і $\angle(x_3, x_2, x_4)$ будемо називати суміжними.

Слід зазначити, що означення 10 охоплює також випадок, коли один із кутів є прямим. У цьому випадку, за означенням 10, суміжний йому кут теж буде прямим, оскільки при значеннях $\varphi_{124} = \varphi_{324} = 0$ рівність (6) виконується.

Плоско розміщені множини точок простору Π можна будувати і на основі трьох точок цього простору, що утворюють прямий кут. Дійсно, якщо кут $\angle(x_2, x_1, x_3)$ є прямим, тобто виконується рівність $\varphi_{213} = 0$, то точку x_4, яка буде плоско розміщеною з точками $x_1, x_2,\ x_3$, можна знайти з рівності (5). Підставивши у цю рівність значення $\varphi_{213} = 0$, отримаємо рівність

$$\varphi_{214}^2 + \varphi_{314}^2 = 1. \tag{7}$$

Рівність (7) можна вважати аналогом тригонометричної одиниці у геометрії Евкліда, вона може бути використана для побудови плоско розміщених множин.

4. Доведення результатів. ***4.1. Доведення теореми* 1.** Обчислимо вираз

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{213} & -\varphi_{123} \\ \varphi_{213} & 1 & \varphi_{132} \\ -\varphi_{123} & \varphi_{132} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\varphi_{213}\varphi_{123}\varphi_{132} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{123}^2 - \varphi_{132}^2 =$$

$$= 1 - 2\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{2\rho_{12}\rho_{23}} \frac{\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{2\rho_{13}\rho_{23}} -$$

$$- \left(\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}}\right)^2 - \left(\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{2\rho_{12}\rho_{23}}\right)^2 - \left(\frac{\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{2\rho_{13}\rho_{23}}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2)}{4\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2} -$$

$$- \frac{\rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)^2 + \rho_{13}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)^2 + \rho_{12}^2(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2)^2}{4\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2}\Big((\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2) +$$

$$+ \rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)^2 + \rho_{13}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)^2 + \rho_{12}^2(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2)^2\Big).$$

Обчислимо вираз у дужках:

$$(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2) +$$

$$+ \rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)^2 + \rho_{13}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)^2 + \rho_{12}^2(\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{12}^2)^2 =$$

$$= (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)(\rho_{12}^2\rho_{13}^2 + \rho_{12}^2\rho_{23}^2 - \rho_{12}^4 + \rho_{13}^2\rho_{23}^2 + \rho_{23}^4 - \rho_{12}^2\rho_{23}^2 -$$

$$- \rho_{13}^4 - \rho_{13}^2\rho_{23}^2 + \rho_{12}^2\rho_{13}^2) + \rho_{12}^4\rho_{23}^2 + \rho_{13}^4\rho_{23}^2 + \rho_{23}^6 + 2\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 - 2\rho_{12}^2\rho_{23}^4 - 2\rho_{13}^2\rho_{23}^4 +$$

$$+ \rho_{12}^4\rho_{13}^2 + \rho_{13}^2\rho_{23}^4 + \rho_{13}^6 + 2\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 - 2\rho_{12}^2\rho_{13}^4 - 2\rho_{13}^4\rho_{23}^2 +$$

$$+ \rho_{12}^2\rho_{13}^4 + \rho_{12}^2\rho_{23}^4 + \rho_{12}^6 + 2\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 - 2\rho_{12}^4\rho_{13}^2 - 2\rho_{12}^4\rho_{23}^2 =$$

$$= (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)(2\rho_{12}^2\rho_{13}^2 - \rho_{12}^4 - \rho_{13}^4 + \rho_{23}^4) -$$

$$- \rho_{12}^4\rho_{13}^2 - \rho_{12}^4\rho_{23}^2 + \rho_{12}^6 - \rho_{12}^2\rho_{13}^4 - \rho_{13}^4\rho_{23}^2 + \rho_{13}^6 - \rho_{12}^2\rho_{23}^4 - \rho_{13}^2\rho_{23}^4 + \rho_{23}^6 + 6\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 =$$

$$= 2\rho_{12}^4\rho_{13}^2 - \rho_{12}^6 - \rho_{12}^2\rho_{13}^4 + \rho_{12}^2\rho_{23}^4 + 2\rho_{12}^2\rho_{13}^4 - \rho_{12}^4\rho_{13}^2 - \rho_{13}^6 + \rho_{13}^2\rho_{23}^4 -$$

$$- 2\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 + \rho_{12}^4\rho_{23}^2 + \rho_{13}^4\rho_{23}^2 - \rho_{23}^6 - \rho_{12}^4\rho_{13}^2 - \rho_{12}^4\rho_{23}^2 +$$

$$+ \rho_{12}^6 - \rho_{12}^2\rho_{13}^4 - \rho_{13}^4\rho_{23}^2 + \rho_{13}^6 - \rho_{12}^2\rho_{23}^4 - \rho_{13}^2\rho_{23}^4 + \rho_{23}^6 + 6\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 =$$

$$= 4\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2.$$

Остаточно отримуємо рівність $1 - 2\varphi_{213}\varphi_{123}\varphi_{132} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{123}^2 - \varphi_{132}^2 = 0$. Отже, рівність (3) доведено.

Теорему 1 доведено.

Доведення рівності (3) є досить простим для звичайного трикутника в геометрії Евкліда. Дійсно, якщо ввести позначення $\varphi_{213} = \cos\angle A$, $\varphi_{123} = \cos\angle B$, $\varphi_{132} = \cos\angle C$, де $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — внутрішні кути трикутника $\triangle\ ABC$, то внаслідок рівності $\cos\angle C = \cos\big(\pi - (\angle A + \angle B)\big) = -\cos(\angle A + \angle B)$ ліва частина рівності (3) набере вигляду

$$1 + 2\cos\angle A \cos\angle B \cos(\angle A + \angle B) - \cos^2\angle A - \cos^2\angle B - \cos^2(\angle A + \angle B) =$$

$$= 1 + 2\cos\angle A \cos\angle B(\cos\angle A \cos\angle B - \sin\angle A \sin\angle B) -$$

$$-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-(\cos\angle A\cos\angle B-\sin\angle A\sin\angle B)^2=$$
$$=1+2\cos^2\angle A\cos^2\angle B-2\cos\angle A\cos\angle B\sin\angle A\sin\angle B-$$
$$-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-\cos^2\angle A\cos^2\angle B+2\cos\angle A\cos\angle B\sin\angle A\sin\angle B-\sin^2\angle A\sin^2\angle B=$$
$$=1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B+\cos^2\angle A\cos^2\angle B-\sin^2\angle A\sin^2\angle B=$$
$$=1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B+\cos^2\angle A\cos^2\angle B-(1-\cos^2\angle A)(1-\cos^2\angle B)=$$
$$=1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B+\cos^2\angle A\cos^2\angle B-1+\cos^2\angle A+\cos^2\angle B-\cos^2\angle A\cos^2\angle B=0.$$

Отже, виконання рівності (3) є необхідною умовою для існування у метричному просторі трикутника із заданими кутовими характеристиками.

З рівності (3) можна отримати співвідношення між кутовими характеристиками для випадку, коли одна з них дорівнює нулеві, тобто для випадку, коли один із трьох кутів є прямим.

***Наслідок* 1.** *Якщо для довільних точок x_1, x_2, x_3 простору П кут $\angle(x_1,x_2,x_3)$ є прямим, то виконується рівність*

$$\varphi_{213}^2+\varphi_{132}^2=1. \tag{8}$$

Доведення. Якщо кут $\angle(x_1,x_2,x_3)$ є прямим, то виконується рівність $\varphi_{123}=0$. Підставивши це значення у рівність (3), матимемо $\varphi_{213}^2+\varphi_{132}^2-1=0$, або $\varphi_{213}^2+\varphi_{132}^2=1$.

Рівність (8), як і рівність (7), можна вважати аналогом тригонометричної одиниці у геометрії Евкліда.

***4.2. Доведення теореми* 2.** Припустимо, що один із кутів трикутника, наприклад кут $\angle(x_1,x_2,x_3)$, є розгорнутим, тобто виконується рівність $\varphi_{123}=-1$. Тоді, підставивши це значення у рівність (1), будемо мати

$$\varphi_{213}^2+(-1)^2+\varphi_{132}^2+2\varphi_{213}(-1)\varphi_{132}-1=0,\qquad \varphi_{213}^2+\varphi_{132}^2-2\varphi_{213}\varphi_{132}=0,$$
$$(\varphi_{213}-\varphi_{132})^2=0.\qquad \varphi_{213}=\varphi_{132}.$$

Отриману рівність можна уточнити. Із рівності $\varphi_{123}=\dfrac{\rho_{12}^2+\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{2\rho_{12}\rho_{23}}=-1$ одержимо

$$\rho_{12}^2+\rho_{23}^2-\rho_{13}^2=-2\rho_{12}\rho_{23},\qquad \rho_{12}^2+2\rho_{12}\rho_{23}+\rho_{23}^2=\rho_{13}^2,$$
$$(\rho_{12}+\rho_{23})^2=\rho_{13}^2,\qquad \rho_{12}+\rho_{23}=\rho_{13}.$$

Використавши останню рівність, знайдемо кутову характеристику

$$\varphi_{213}=\frac{\rho_{12}^2+\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}}=\frac{\rho_{12}^2+(\rho_{12}+\rho_{23})^2-\rho_{23}^2}{2\rho_{12}(\rho_{12}+\rho_{23})}=\frac{\rho_{12}^2+\rho_{12}^2+2\rho_{12}\rho_{23}+\rho_{23}^2-\rho_{23}^2}{2\rho_{12}(\rho_{12}+\rho_{23})}=$$
$$=\frac{2\rho_{12}^2+2\rho_{12}\rho_{23}}{2\rho_{12}(\rho_{12}+\rho_{23})}=\frac{2\rho_{12}(\rho_{12}+\rho_{23})}{2\rho_{12}(\rho_{12}+\rho_{23})}=1.$$

Отже, $\varphi_{132}=\varphi_{213}=1$.

Припустимо тепер, що один із кутів трикутника, наприклад кут $\angle(x_1,x_2,x_3)$, є нульовим, тобто виконується рівність $\varphi_{123}=1$. Тоді, підставивши це значення у рівність (3), матимемо

$$\varphi_{213}^2 + 1^2 + \varphi_{132}^2 + 2\varphi_{213}\varphi_{132} - 1 = 0, \qquad \varphi_{213}^2 + \varphi_{132}^2 + 2\varphi_{213}\varphi_{132} = 0,$$
$$(\varphi_{213} + \varphi_{132})^2 = 0, \qquad \varphi_{213} = -\varphi_{132}.$$

Аналогічно попередньому, цю рівність можна уточнити. Із рівності $\varphi_{123} = \dfrac{\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{2\rho_{12}\rho_{23}} = 1$, будемо мати

$$\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 = 2\rho_{12}\rho_{23}, \qquad \rho_{12}^2 - 2\rho_{12}\rho_{23} + \rho_{23}^2 = \rho_{13}^2, \qquad (\rho_{12} - \rho_{23})^2 = \rho_{13}^2.$$

Звідси отримуємо сукупність рівностей

$$\left[\begin{array}{l} \rho_{12} - \rho_{23} = \rho_{13}, \\ \rho_{12} - \rho_{23} = -\rho_{13}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}, \\ \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}. \end{array}\right.$$

Використовуючи першу з отриманих рівностей, знаходимо кутову характеристику

$$\varphi_{213} = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{(\rho_{13} + \rho_{23})^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2(\rho_{13} + \rho_{23})\rho_{13}} = \frac{\rho_{13}^2 + 2\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{23}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2(\rho_{13} + \rho_{23})\rho_{13}} =$$
$$= \frac{2\rho_{13}^2 + 2\rho_{13}\rho_{23}}{2(\rho_{13} + \rho_{23})\rho_{13}} = \frac{2\rho_{13}(\rho_{13} + \rho_{23})}{2(\rho_{13} + \rho_{23})\rho_{13}} = 1.$$

Значення кутової характеристики φ_{132} знаходимо з отриманої раніше рівності

$$\varphi_{132} = -\varphi_{213} = -1.$$

Використовуючи другу з отриманих вище рівностей, отримуємо кутову характеристику

$$\varphi_{213} = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - (\rho_{12} + \rho_{13})^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} =$$
$$= \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{12}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13} - \rho_{13}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{-2\rho_{12}\rho_{13}}{2\rho_{12}\rho_{13}} = -1.$$

Тепер знаходимо кутову характеристику φ_{132} з рівності $\varphi_{132} = -\varphi_{213} = 1$.

Одержані вище значення дозволяють зробити висновок, що з трьох прямолінійно розміщених точок лише одна знаходиться між двома іншими (є внутрішньою для них), а кожна з цих двох точок лежить поза двома іншими (є крайньою для них).

Теорему 2 доведено.

***4.3. Доведення леми* 1.** Нехай точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно розміщені у просторі Π. Тоді точки $x_1, x_2,\ x_3$ теж розміщені прямолінійно. З теореми 2 випливає, що серед них лише одна розміщена між двома іншими. Нехай, наприклад, точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3. Тоді справджується рівність $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$. Якщо тепер точка x_4 також лежить між цими точками, то твердження леми 1 є правильним.

Припустимо, що точка x_4 лежить поза точками x_1 і x_3. Оскільки ці три точки теж прямолінійно розміщені, то має місце сукупність рівностей

$$\left[\begin{array}{l} \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Нехай виконується перша з рівностей (9), тобто точка x_3 знаходиться між точками x_1 і x_4. Тоді отримуємо систему рівностей

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}. \end{cases}$$

Звідси послідовно знаходимо

$$\rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34} = (\rho_{12} + \rho_{23}) + \rho_{34} = \rho_{12} + (\rho_{23} + \rho_{34}) \geq \rho_{12} + \rho_{24}.$$

Ця нерівність, внаслідок нерівності трикутника, може виконуватись лише при умові виконання рівності $\rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}$, а це означає, що точка x_2, як і точка x_3, знаходиться між точками x_1 і x_4.

Нехай тепер виконується друга із рівностей (9), тобто точка x_1 знаходиться між точками x_3 і x_4. Тоді отримуємо систему рівностей

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}. \end{cases}$$

Звідси послідовно знаходимо

$$\rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14} = (\rho_{12} + \rho_{23}) + \rho_{14} = \rho_{23} + (\rho_{12} + \rho_{14}) \geq \rho_{23} + \rho_{24}.$$

Ця нерівність, внаслідок нерівності трикутника, може виконуватись лише при умові виконання рівності $\rho_{34} = \rho_{23} + \rho_{24}$, а це означає, що точка x_2, як і точка x_1, знаходиться між точками x_3 і x_4.

Оскільки розглянуто всі можливі випадки розміщення точок, то твердження леми є правильним.

4.4. Доведення леми 2. Оскільки за умовою леми точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3, то справджується рівність $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$, а з умови, що точка x_1 лежить поза точками x_2 і x_4, випливає сукупність рівностей

$$\left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}. \end{array} \right. \tag{10}$$

Перша з рівностей (10) означає, що точка x_4 лежить між точками x_1 і x_2, тому у цьому випадку твердження леми є правильним.

Розглянемо другу з рівностей (10) і припустимо, що точка x_4 також лежить між точками x_1 і x_3, тобто виконується рівність $\rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}$. Таким чином, матимемо систему рівностей

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}. \end{cases}$$

З цієї системи послідовно знаходимо

$$\rho_{23} = \rho_{13} - \rho_{12} = (\rho_{14} + \rho_{34}) - \rho_{12} = (\rho_{14} - \rho_{12}) + \rho_{34} = \rho_{24} + \rho_{34}.$$

Отримана рівність означає, що точка x_4 лежить між точками x_2 і x_3. Отже, і у цьому випадку твердження леми є правильним.

***4.5. Доведення леми* 3.** Якщо точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно розміщені у просторі Π, а точки x_2 і x_4 лежать між точками x_1 і x_3, то справджуються рівності $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$ і $\rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}$. Якщо ж, крім того, точка x_1 лежить поза точками x_2 і x_4, то за лемою 2 точка x_4 лежить або між точками x_1 і x_2, або між точками x_2 і x_3. Аналогічно, точка x_2 лежить або між точками x_1 і x_4, або між точками x_3 і x_4. У кожному з цих випадків справджуються рівності $\varphi_{213} = 1,\ \varphi_{214} = 1,\ \varphi_{314} = 1$, а отже, рівність (4) виконується.

Нехай тепер для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ простору Π виконується рівність (4). Оскільки модуль кутової характеристики не перевищує одиниці, то рівність (4) може виконуватись лише при значеннях $\varphi_{213} = \pm 1,\ \varphi_{214} = \pm 1,\ \varphi_{314} = \pm 1$, тобто лише у таких випадках:

1) $\varphi_{213} = 1,\ \varphi_{214} = 1,\ \varphi_{314} = 1$;

2) $\varphi_{213} = 1,\ \varphi_{214} = -1,\ \varphi_{314} = -1$;

3) $\varphi_{213} = -1,\ \varphi_{214} = 1,\ \varphi_{314} = -1$;

4) $\varphi_{213} = -1,\ \varphi_{214} = -1,\ \varphi_{314} = 1$.

Із означення 4 випливає, що для доведення леми достатньо показати прямолінійне розміщення точок $x_2,\ x_3,\ x_4$, а за означенням 3 для цього достатньо встановити рівність $\varphi_{234}^2 = 1$. Розглянемо послідовно всі чотири випадки.

1. Нехай одночасно виконуються рівності $\varphi_{213} = 1,\ \varphi_{214} = 1,\ \varphi_{314} = 1$. Це рівносильно системі сукупностей таких рівностей:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}, \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \rho_{23} = \rho_{12} - \rho_{13}, \\ \rho_{23} = -(\rho_{12} - \rho_{13}), \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{24} = \rho_{12} - \rho_{14}, \\ \rho_{24} = -(\rho_{12} - \rho_{14}), \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{34} = \rho_{13} - \rho_{14}, \\ \rho_{34} = -(\rho_{13} - \rho_{14}); \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_{23}^2 = (\rho_{12} - \rho_{13})^2, \\ \rho_{24}^2 = (\rho_{12} - \rho_{14})^2, \\ \rho_{34}^2 = (\rho_{13} - \rho_{14})^2. \end{array}\right.$$

Тепер обчислимо для різних випадків цієї системи кутову характеристику

$$\varphi_{234} = \frac{\rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2}{2\rho_{23}\rho_{34}}.$$

Достатньо показати, що для всіх цих випадків буде виконуватись рівність

$$\rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2 = \pm 2\rho_{23}\rho_{34}, \tag{11}$$

а отже і рівність $\varphi_{234}^2 = 1$.

Підставивши знайдені значення у ліву частину рівності (11), отримаємо

$$\rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2 = (\rho_{12} - \rho_{13})^2 + (\rho_{13} - \rho_{14})^2 - (\rho_{12} - \rho_{14})^2 =$$
$$= \rho_{12}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{13}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{14}^2 - \rho_{12}^2 + 2\rho_{12}\rho_{14} - \rho_{14}^2 =$$

$$= 2\rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13} - 2\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{12}\rho_{14} = 2(\rho_{13}(\rho_{13} - \rho_{12}) - \rho_{14}(\rho_{13} - \rho_{12})) =$$
$$= 2(\rho_{13} - \rho_{12})(\rho_{13} - \rho_{14}) = \pm 2\rho_{23}\rho_{34}.$$

Отже, у цьому випадку точки $x_2,\ x_3,\ x_4$ розміщені прямолінійно, що у свою чергу означає прямолінійне розміщення всіх точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Покажемо, що точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є прямолінійно впорядкованими. Для цього розглянемо окремо кожен із можливих випадків їхнього розміщення, що випливають із вказаної вище системи сукупностей.

Випадок a):

$$\begin{cases} \rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}, \\ \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}. \end{array}\right. \end{cases}$$

У цьому випадку точки $x_3,\ x_4$ лежать між точками $x_1,\ x_2$, а внаслідок рівності $\varphi_{314} = 1$ точка x_1 лежить поза точками x_3, x_4, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_1 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Випадок b):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \end{array}\right. \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки x_2, x_3 лежать між точками x_1, x_4, а внаслідок рівності $\varphi_{213} = 1$ точка x_1 лежить поза точками x_2, x_3, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_1 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Випадок c):

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}, \end{array}\right. \\ \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки $x_2,\ x_4$ лежать між точками x_1, x_3, а внаслідок рівності $\varphi_{214} = 1$ точка x_1 лежить поза точками x_2, x_4, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_1 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

2. Нехай одночасно виконуються рівності $\varphi_{213} = 1$, $\varphi_{214} = -1$, $\varphi_{314} = -1$. Це рівносильно системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \end{array}\right. \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \rho_{23} = \rho_{12} - \rho_{13}, \\ \rho_{23} = -(\rho_{12} - \rho_{13}), \end{array}\right. \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_{23}^2 = (\rho_{12} - \rho_{13})^2, \\ \rho_{24}^2 = (\rho_{12} + \rho_{14})^2, \\ \rho_{34}^2 = (\rho_{13} + \rho_{14})^2. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення у ліву частину рівності (11), отримаємо

$$\rho_{23}^2+\rho_{34}^2-\rho_{24}^2=(\rho_{12}-\rho_{13})^2+(\rho_{13}+\rho_{14})^2-(\rho_{12}+\rho_{14})^2=$$
$$=\rho_{12}^2-2\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{13}^2+\rho_{13}^2+2\rho_{13}\rho_{14}+\rho_{14}^2-\rho_{12}^2-2\rho_{12}\rho_{14}-\rho_{14}^2=$$
$$=2\rho_{13}^2-2\rho_{12}\rho_{13}+2\rho_{13}\rho_{14}-2\rho_{12}\rho_{14}=2\big(\rho_{13}(\rho_{13}-\rho_{12})+\rho_{14}(\rho_{13}-\rho_{12})\big)=$$
$$=2(\rho_{13}-\rho_{12})(\rho_{13}+\rho_{14})=\pm 2\rho_{23}\rho_{34}.$$

Отже, у цьому випадку точки $x_2,\ x_3,\ x_4$ розміщені прямолінійно, що у свою чергу означає прямолінійне розміщення всіх точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Покажемо, що точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є прямолінійно впорядкованими. Для цього розглянемо можливі випадки їхнього розміщення.

Випадок a):

$$\begin{cases}\rho_{12}=\rho_{13}+\rho_{23},\\ \rho_{24}=\rho_{12}+\rho_{14},\\ \rho_{34}=\rho_{13}+\rho_{14}.\end{cases}$$

У цьому випадку точки $x_1,\ x_3$ лежать між точками $x_2,\ x_4$. З першої рівності системи випливає, що точка x_3 лежить між точками $x_1,\ x_2$. За теоремою 2 точка x_2 лежить поза точками $x_1,\ x_3$, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_2 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Випадок b):

$$\begin{cases}\rho_{13}=\rho_{12}+\rho_{23},\\ \rho_{24}=\rho_{12}+\rho_{14},\\ \rho_{34}=\rho_{13}+\rho_{14}.\end{cases}$$

У цьому випадку точки $x_1,\ x_2$ лежать між точками x_3, x_4. З першої рівності системи випливає, що точка x_2 лежить між точками $x_1,\ x_3$. За теоремою 2 точка x_3 лежить поза точками $x_1,\ x_2$, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_3 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

3. Нехай одночасно виконуються рівності $\varphi_{213}=-1$, $\varphi_{214}=1$, $\varphi_{314}=-1$. Це рівносильно системі

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_{23}=\rho_{12}+\rho_{13},\\ \left[\begin{array}{l}\rho_{12}=\rho_{14}+\rho_{24},\\ \rho_{14}=\rho_{12}+\rho_{24},\end{array}\right.\\ \rho_{34}=\rho_{13}+\rho_{14};\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\rho_{23}=\rho_{12}+\rho_{13},\\ \left[\begin{array}{l}\rho_{24}=\rho_{12}-\rho_{14},\\ \rho_{24}=-(\rho_{12}-\rho_{14}),\end{array}\right.\\ \rho_{34}=\rho_{13}+\rho_{14};\end{array}\right. \qquad \begin{cases}\rho_{23}^2=(\rho_{12}+\rho_{13})^2,\\ \rho_{24}^2=(\rho_{12}-\rho_{14})^2,\\ \rho_{34}^2=(\rho_{13}+\rho_{14})^2.\end{cases}$$

Підставивши знайдені значення у ліву частину рівності (11), отримаємо

$$\rho_{23}^2+\rho_{34}^2-\rho_{24}^2=(\rho_{12}+\rho_{13})^2+(\rho_{13}+\rho_{14})^2-(\rho_{12}-\rho_{14})^2=$$

$$= \rho_{12}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{13}^2 + \rho_{13}^2 + 2\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{14}^2 - \rho_{12}^2 + 2\rho_{12}\rho_{14} - \rho_{14}^2 =$$
$$= 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13} + 2\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{12}\rho_{14} = 2(\rho_{13}(\rho_{13} + \rho_{12}) + \rho_{14}(\rho_{13} + \rho_{12})) =$$
$$= 2(\rho_{13} + \rho_{12})(\rho_{13} + \rho_{14}) = 2\rho_{23}\rho_{34}.$$

У цьому випадку точки $x_2,\ x_3,\ x_4$ теж розміщені прямолінійно, що у свою чергу означає прямолінійне розміщення всіх точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Покажемо, що точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є прямолінійно впорядкованими. Для цього розглянемо можливі випадки їхнього розміщення.

Випадок a):

$$\begin{cases} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки x_1, x_4 лежать між точками $x_2,\ x_3$. З другої рівності системи випливає, що точка x_4 лежить між точками $x_1,\ x_2$. За теоремою 2 точка x_2 лежить поза точками x_1, x_4, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_2 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Випадок b):

$$\begin{cases} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}, \\ \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{14}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки $x_1,\ x_2$ лежать між точками $x_3,\ x_4$. З першої рівності системи випливає, що точка x_1 лежить між точками $x_2,\ x_3$. За теоремою 2 точка x_3 лежить поза точками $x_1,\ x_2$, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_3 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

4. Нехай одночасно виконуються рівності $\varphi_{213} = -1$, $\varphi_{214} = -1$, $\varphi_{314} = 1$. Це рівносильно системі

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}; \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{34} = \rho_{13} - \rho_{14}, \\ \rho_{34} = -(\rho_{13} - \rho_{14}); \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \begin{cases} \rho_{23}^2 = (\rho_{12} + \rho_{13})^2, \\ \rho_{24}^2 = (\rho_{12} + \rho_{14})^2, \\ \rho_{34}^2 = (\rho_{13} - \rho_{14})^2. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення у ліву частину рівності (11), отримаємо

$$\rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2 = (\rho_{12} + \rho_{13})^2 + (\rho_{13} - \rho_{14})^2 - (\rho_{12} + \rho_{14})^2 =$$
$$= \rho_{12}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{13}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{14}^2 - \rho_{12}^2 - 2\rho_{12}\rho_{14} - \rho_{14}^2 =$$
$$= 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13} - 2\rho_{13}\rho_{14} - 2\rho_{12}\rho_{14} = 2\big(\rho_{13}(\rho_{13} + \rho_{12}) - \rho_{14}(\rho_{13} + \rho_{12})\big) =$$

$$= 2(\rho_{13} + \rho_{12})(\rho_{13} - \rho_{14}) = \pm 2\rho_{23}\rho_{34}.$$

У цьому випадку точки $x_2,\ x_3,\ x_4$ теж розміщені прямолінійно, що у свою чергу означає прямолінійне розміщення всіх точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Покажемо, що точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є прямолінійно впорядкованими. Для цього розглянемо можливі випадки їхнього розміщення.

Випадок a):

$$\begin{cases} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки x_1, x_4 лежать між точками $x_2,\ x_3$. З другої рівності системи випливає, що точка x_1 лежить між точками $x_2,\ x_4$. За теоремою 2 точка x_2 лежить поза точками x_1, x_4, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_2 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Випадок b):

$$\begin{cases} \rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}, \\ \rho_{24} = \rho_{12} + \rho_{14}, \\ \rho_{14} = \rho_{13} + \rho_{34}. \end{cases}$$

У цьому випадку точки x_1, x_3 лежать між точками x_2, x_4. З першої рівності системи випливає, що точка x_1 лежить між точками $x_2,\ x_3$. За теоремою 2 точка x_2 лежить поза точками x_1, x_3, і за означенням 6 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ прямолінійно впорядковані. При цьому точка x_2 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Отже, в усіх чотирьох можливих випадках точки x_2, x_3, x_4 розміщені прямолінійно, що у свою чергу означає прямолінійне розміщення всіх точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ простору Π. Крім того, в усіх чотирьох випадках точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є прямолінійно впорядкованими.

Лему 3 доведено.

***4.6. Доведення леми* 4.** Нехай точка x_1 є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. У цьому випадку виконуються рівності $\varphi_{213} = \varphi_{214} = \varphi_{314} = 1$.

Рівність $\varphi_{214} = 1$ еквівалентна сукупності рівностей (10). Оскільки за умовою леми точки x_2 і x_4 лежать між точками x_1 і x_3, то це еквівалентно системі рівностей

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо систему рівностей

$$\begin{cases} \rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}, \\ \rho_{13} = \rho_{14} + \rho_{34}, \\ \left[\begin{array}{l} \rho_{12} = \rho_{14} + \rho_{24}, \\ \rho_{14} = \rho_{12} + \rho_{24}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Використовуючи першу рівність із сукупності, послідовно знаходимо

$$\rho_{23} = \rho_{13} - \rho_{12} = (\rho_{14} + \rho_{34}) - \rho_{12} = (\rho_{12} + \rho_{24}) + \rho_{34} - \rho_{12} = \rho_{24} + \rho_{34}.$$

Використовуючи другу рівність із сукупності, послідовно одержуємо

$$\rho_{34} = \rho_{13} - \rho_{14} = (\rho_{12} + \rho_{23}) - \rho_{14} = (\rho_{14} + \rho_{24}) + \rho_{23} - \rho_{14} = \rho_{23} + \rho_{24}.$$

Остаточно отримуємо сукупність рівностей

$$\left[\begin{array}{l} \rho_{23} = \rho_{24} + \rho_{34}, \\ \rho_{34} = \rho_{23} + \rho_{24}, \end{array}\right.$$

яка рівносильна рівностям

$$(\rho_{23} - \rho_{34})^2 = \rho_{24}^2, \qquad \rho_{23}^2 - 2\rho_{23}\rho_{34} + \rho_{34}^2 = \rho_{24}^2, \qquad \rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2 = 2\rho_{23}\rho_{34}.$$

Поділивши обидві частини рівності на вираз $2\rho_{23}\rho_{34}$, отримаємо

$$\varphi_{234} = \frac{\rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{24}^2}{2\rho_{23}\rho_{34}} = 1.$$

Ця рівність вказує на те, що точка x_3 лежить поза точками x_2 і x_4, тобто є крайньою для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Лему 4 доведено.

***4.7. Доведення леми* 5.** Припустимо, що точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ у просторі Π є прямолінійно і плоско розміщеними. З їхнього плоского розміщення випливає виконання рівності (5). За означенням 4 будь-які три з точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ будуть прямолінійно розміщені. Отже, будуть виконуватись рівності $\varphi_{213}^2 = \varphi_{214}^2 = \varphi_{314}^2 = 1$. Підставляючи ці значення у рівність (5), знаходимо $\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} = 1$. Тому рівність (4) є необхідною умовою плоского розміщення прямолінійно розміщених точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ у просторі Π.

Нехай тепер для точок $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ виконується рівність (4). Тоді з леми 3 випливає прямолінійне розміщення цих точок і справедливість рівностей $\varphi_{213}^2 = \varphi_{214}^2 = \varphi_{314}^2 = 1$. Підставляючи ці значення і значення $\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} = 1$ з рівності (4) у ліву частину рівності (5), отримуємо тотожність. Таким чином, за означенням 8 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ будуть плоско розміщеними.

***4.8. Доведення теореми* 3.** Нехай прямолінійно розміщена множина точок простору Π є також і плоско розміщеною. Покажемо, що ця множина є прямолінійно впорядкованою. Для цього виберемо її довільні чотири точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. З прямолінійного та плоского розміщення цих точок, за лемою 5, випливає, що для однієї з них (наприклад, для точки x_1) виконується рівність (4). За лемою 3 ці точки будуть прямолінійно впорядкованими. З довільності вибору точок, за означенням 7, випливає прямолінійна впорядкованість усієї множини точок.

Нехай тепер множина точок простору Π є прямолінійно впорядкованою. За означенням 7 будь-які чотири точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ множини є прямолінійно впорядкованими, тому за лемою 3 для однієї з них (наприклад, для точки x_1) виконується рівність (4). Таким чином, за лемою 5 точки $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ є плоско розміщеними. Із довільності вибору точок множини та означення 7 випливає, що множина точок є плоско розміщеною.

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Savchenko A., Zarichnyi M.* Metrization of free groups on ultrametric spaces // Topology and Appl. – 2010. – **157**, № 4. – P. 724 – 729.
2. *Savchenko A., Zarichnyi M.* Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces // Azerb. J. Math. – 2011. – **1**, № 1. – P. 114 – 121.
3. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 388 с.
4. *Каган В. Ф.* Основания геометрии: В 2 ч. – М.; Л.: Гостехиздат, 1956. – Ч. 2. – 344 с.
5. *Кузьмич В. І.* Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору // Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки. – 2016. – № 13. – С. 26 – 32.
6. *Кузьмич В. І.* Кутова характеристика у метричному просторі // Algebr. and Geom. Methods of Analysis: Int. Sci. Conf.: Abstracts. – 2017. – P. 11 – 12.
7. *Кузьмич В. І.* Побудова плоских образів у довільному метричному просторі // Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки. – 2017. – № 11. – С. 40 – 46.
8. *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. – 571 с.
9. *Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В.* Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра // Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки. – 2012. – **249**, № 36. – С. 55 – 64.
10. *Кузьмич В. І.* Плоско розміщені множини точок у метричному просторі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип. 83. – С. 58 – 71.

Одержано 16.05.18