УДК 517.2

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДОК ТА КАНОНІЧНИЙ ДОБУТОК ВЕЙЄРШТРАССА R-ІНТЕГРАЛА

The order of the R-integral is specified and its representation in the form of the canonical Weierstrass product is found.

Уточнено порядок R-інтеграла та знайдено його зображення канонічним добутком Вейєрштрасса.

Нехай $s = x + it,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(s) = 1 - s(1-s)\int\limits_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\theta(x)dx, \tag{1}$$

де

$$\theta(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}.$$

Відомо [1], що функція (1) — це ціла функція порядку $\rho \le 1$, яка має нескінченну кількість комплексно-спряжених нулів

$$(s_k, \overline{s_k}) = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k, \cos\varphi_k - i\sin\varphi_k) \tag{2}$$

таких, що

$$0 < r_k \le r_{k+1}, \quad 0 < \varphi_k \le \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k\to\infty} r_k = \infty,$$

розміщених у комплексній площині $\mathbb{C}$ симетрично відносно прямої

$$x = \frac{1}{2}$$

і лише у смузі

$$0 \le x \le 1.$$

Запишемо рівняння (1) при $z = x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 - x(1-x)\int\limits_0^1 \left(\tau^{\frac{x}{2}} + \tau^{\frac{1-x}{2}}\right)\theta(\tau)d\tau, \quad f(x) = f(1-x). \tag{3}$$

Формула (3) є основною характеристикою функції (1), яка виділяє її з множини інших цілих функцій дійсної змінної x.

Згідно з (3) маємо рівність

$$f(0) = f(1) = 1.$$

Використавши (2), запишемо для $f(x)$ формулу Адамара [2]

$$f(x) = e^{\lambda x} W(x), \tag{4}$$

де $\lambda = mf'(0),\ m = [\rho]$ — рід функції $f(s),\ W(0) = 1,$

$$W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{x}{r_k}, \varphi_k\right) m, \tag{5}$$

$$W(x, \varphi, m) = (1 - 2x\cos\varphi + x^2)e^{2mx\cos\varphi}. \tag{6}$$

Нехай $m = 1$. Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x)f(1-x) = f^2(x).$$

Тоді згідно з (4)

$$F(x) = e^{\lambda x + \lambda(1-x)} W(x)W(1-x) = e^{\lambda} W(x)W(1-x), \tag{7}$$

де

$$W(x)W(1-x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) e^{2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right) e^{2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k}. \tag{8}$$

Прологарифмувавши (8), отримаємо

$$\ln W(x)W(1-x) = \ln W(x) + \ln W(1-x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) + 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right) + 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k\right). \tag{9}$$

Згідно з теоремою Вейєрштрасса про нескінченний добуток [3] суми в (9) рівномірно збігаються на довільному відрізку $\mathbb{R}$. В результаті з (9) випливає рівність

$$\ln W(x)W(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\varphi_k}{r_k},$$

потенціюючи яку, отримуємо

$$W(x)W(1-x) = e^{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\varphi_k}{r_k}} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right). \tag{10}$$

Згідно з (10) формула (7) набирає вигляду

$$F(x) = e^{\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\varphi_k}{r_k}} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right). \tag{11}$$

При $x = 0$ формула (11) має вигляд

$$1 = e^{\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\varphi_k}{r_k}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} + \frac{1}{r_k^2}\right). \tag{12}$$

Згідно з (12) та позначеннями (5), (6)

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} + \frac{1}{r_k^2}\right)^{-1} = c \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{x}{r_k}, \varphi_k, 0\right) \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{1-x}{r_k}, \varphi_k, 0\right),$$

де

$$c = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{\cos\varphi_k}{r_k} + \frac{1}{r_k^2}\right)^{-1}.$$

Таким чином, маємо рівність

$$c^{-1}F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right), \tag{13}$$

яка згідно з позначеннями (5), (6) доводить, що права частина (13) є добутком двох функцій, канонічні добутки Вейєрштрасса яких при $s = x$ належать функціям нульового роду. Отже, $F(x)$ — функція нульового роду. Це доводить, що порядок $F(x)$ не дорівнює, а менший за 1. Оскільки

$$F(x) = f^2(x),$$

то порядок $f(x)$ на $x \in \mathbb{R}$ задовольняє нерівність

$$\rho < 1. \tag{14}$$

Підсумовуючи, отримуємо такий результат.

Теорема 1. *Порядок R-інтеграла* (1) *задовольняє нерівність* (14).

Для доведення теореми досить доповнити наведені міркування формулою розрахунку порядку ρ цілої функції $f(s)$ [4]:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\left|a_n^{-1}\right|}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

згідно з якою порядки $f(x)$ та $f(s)$ співпадають.

Наведемо наслідок із теореми 1. Насамперед запишемо канонічний добуток $f(x)$, як цілої функції порядку $\rho < 1$, тобто при $m = 0$. Згідно з формулами (4)–(6), позначаючи $W(x, \varphi, 0)$ через $W(x, \varphi)$, маємо

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{x}{r_k}, \varphi_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k + \frac{x^2}{r_k^2}\right). \tag{15}$$

Отже, замінивши в (15) x на $1-x$, будемо мати

$$f(1-x)=\prod_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{1-x}{r_k},\varphi_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right). \tag{16}$$

Із (15), (16) випливає, що

$$F(x)=f(x)f(1-x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{x^2}{r_k^2}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-2\frac{x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{x^2}{r_k^2}\right)\left(1-2\frac{1-x}{r_k}\cos\varphi_k+\frac{(1-x)^2}{r_k^2}\right)\right). \tag{17}$$

Введемо позначення

$$h=r\cos\varphi,\quad \varepsilon=h-1,\quad \sigma(x)=x(1-x).$$

Тоді матимемо

$$W\left(\frac{x}{r_k},\varphi_k\right)=1-\frac{\sigma(x)}{r_k^2}-\frac{\varepsilon_k(1-x)}{r_k^2},\quad W\left(\frac{1-x}{r_k},\varphi_k\right)=1-\frac{\sigma(x)}{r_k^2}-\frac{\varepsilon_k x}{r_k^2}, \tag{18}$$

$$W\left(\frac{x}{r_k},\varphi_k\right)W\left(\frac{1-x}{r_k},\varphi_k\right)=\left(1-\frac{\sigma(x)}{r_k^2}\right)^2+\varepsilon_k\left(1+\varepsilon_k\right)\frac{\sigma(x)}{r_k^2}+\frac{\varepsilon_k}{r_k^2},\quad k=1,2,\ldots. \tag{19}$$

Покладемо

$$P_2\left(\sigma(x),\frac{1}{r_k^2},\varepsilon\right)=\left(1-\frac{\sigma(x)}{r_k^2}\right)^2+\varepsilon(1+\varepsilon)\frac{\sigma(x)}{r_k^2}+\frac{\varepsilon}{r_k^2}$$

і запишемо добуток (18), (19) у вигляді многочлена від $\sigma(x)$ другого степеня

$$W\left(\frac{x}{r_k},\varphi_k\right)W\left(\frac{1-x}{r_k},\varphi_k\right)=P_2\left(\frac{\sigma(x)}{r_k^2},\frac{1}{r_k^2},\varepsilon_k\right).$$

Отже, функцію (17) запишемо у вигляді добутку

$$F(x)=f^2(x)=f(x)f(1-x)=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sigma(x)}{r_k^2}-\frac{\varepsilon_k(1-x)}{r_k^2}\right)^2=\prod_{k=1}^{\infty}P_2\left(\frac{\sigma(x)}{r_k^2},\frac{1}{r_k^2},\varepsilon_k\right). \tag{20}$$

При $x=0$ рівність (20) набирає вигляду

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon_k}{r_k^2}\right)^2=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_k}{r_k^2}\right)=1. \tag{21}$$

Якщо $\varepsilon_k=0,\ k=1,2,\ldots,$ то рівність (21) очевидно має місце. У протилежному випадку, оскільки за означенням $\varepsilon_k=h_k-1$ і $0\le h_k\le 1,\ k=1,2,\ldots,$ то $-1\le\varepsilon_k\le 0$, отже, рівність (21) неможлива для жодного $\varepsilon_k\ne 0$.

В результаті маємо

$$\varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Таким чином, з урахуванням (22) формула (20) набирає вигляду

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} P_2\left(\frac{\sigma(x)}{r_k^2}, \frac{1}{r_k^2}, 0\right).$$

Підсумовуючи, отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Для R-інтеграла* (1) *має місце рівність*

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sigma(s)}{r_k^2}\right). \tag{23}$$

Дійсно, оскільки

$$P_2\left(\frac{\sigma(x)}{r_k^2}, \frac{1}{r_k^2}, 0\right) = \left(1 - \frac{\sigma(x)}{r_k^2}\right)^2,$$

то із формули (20) при $\varepsilon_k = 0$ отримуємо рівність

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sigma(x)}{r_k^2}\right),$$

продовживши яку з дійсної осі $\mathbb{R}$ на комплексну площину $\mathbb{C}$, отримаємо для $f(s)$ як рівність (1), так і рівність (23).

Щоб нулі $f(s)$ були комплексно-спряженими, досить, щоб виконувалася нерівність

$$r_1 > \frac{1}{2}.$$

При її виконанні всі нулі рівності (23) комплексно-спряжені і належать прямій

$$x = \frac{1}{2}.$$

Зазначимо, що оскільки при доведеннях теорем 1 і 2 не використовувалися конкретні характеристики інтеграла, то ці теореми мають місце для всіх функцій з аналогічними інтегралу (1) властивостями.

Насамкінець наведемо важливий висновок із теореми 2 відносно ζ-функції, пов'язаної з R-інтегралом рівністю [1]

$$-\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sigma(s)\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} f(s). \tag{24}$$

Із (24) отримуємо

$$s(s-1)\zeta(s) = \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{\frac{s}{2}} f(s),$$

або з урахуванням теореми 2

$$s(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} s \pi^{\frac{s}{2}} e^{\gamma \frac{s}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1 + \frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sigma(s)}{r_k^2}\right). \tag{25}$$

Далі із (25) маємо

$$s\left(\left((s-1)\zeta(s)-\frac{1}{2}\pi^{\frac{s}{2}}e^{\gamma\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sigma(s)}{r_k^2}\right)\right)+\left(\zeta(0)+\frac{1}{2}\right)\delta_1(s)\right)=0, \tag{26}$$

де $\delta_1(s)$ — функція одиничного носія, зосередженого в точці 0 [5],

$$\delta_1(s)=\begin{cases}1, & s=0,\\ 0, & s\neq 0.\end{cases}$$

Оскільки

$$\zeta(0)+\frac{1}{2}=0,$$

то з (26) отримуємо рівність

$$(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{2}e^{(\ln\pi+\gamma)\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sigma(s)}{r_k^2}\right). \tag{27}$$

Отже, згідно з (27) ζ-функція допускає розклад у добуток

$$\zeta(s)=\frac{1}{2(s-1)}e^{(\ln\pi+\gamma)\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sigma(s)}{r_k^2}\right)$$

за тривіальними нулями $-2n$, $n=1,2,\ldots$, $\zeta(s)$ та за її нулями $\dfrac{1}{2}\pm it_k$, $t_k=\sqrt{r_k^2-\dfrac{1}{4}}$, $r_1>\dfrac{1}{2}$, зі смуги $0\leq x\leq 1$.

Запишемо рівняння для визначення нетривіальних нулів ζ-функції:

$$f(s)=0. \tag{28}$$

Згідно з (1) рівняння (28) має вигляд

$$\sigma(s)\int_{1}^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\theta(x)dx=1. \tag{29}$$

Виконаємо у (29) заміну змінних, поклавши

$$s=\frac{1}{2}+it, \quad t>0,$$

та отримаємо, оскільки

$$\sigma\left(\frac{1}{2}+it\right)=\left(\frac{1}{2}+it\right)\left(\frac{1}{2}-it\right)=\frac{1}{4}+t^2,$$
$$x^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+it\right)}+x^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-it\right)}=x^{\frac{1}{4}+\frac{i}{2}t}+x^{\frac{1}{4}-\frac{i}{2}t}=$$
$$=x^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{i}{2}t\ln x}+e^{-\frac{i}{2}t\ln x}\right),$$

рівняння (29) у нових змінних:

$$2\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int\limits_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\ln x\right)dx = 1. \tag{30}$$

У позначеннях із [6] рівняння (30) набирає вигляду

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int\limits_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\ln x\right)dx = 0.$$

Література

1. *Математическая* энциклопедия: В 5 т. — М.: Сов. энцикл., 1979. — Т. 2. — 552 с.
2. *Hadamard J.* Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann // J. Math. Pures et Appl. — 1893. — **9**, Ser. 4. — P. 171 – 215.
3. *Weierstrass K.* Math. Werke. — 1895. — Bd 2, B.
4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Наука, 1968. — Т. 2. — 624 с.
5. *Самойленко А. М.* Сингулярне інтегральне рівняння, еквівалентне у просторі гладких функцій звичайному диференціальному, метод послідовних наближень побудови його гладких розв'язків та його негладкі розв'язки // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 4. – С. 543 – 563.
6. *Риман Б.* Сочинения: Пер. с нем. — М; Л., 1948. — С. 218 – 219.

Одержано 03.04.19