УДК 517.5

Ф. Г. Абдуллаев (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бишкек; Мерсин. ун-т, Турция),
Г. А. Абдуллаев (Мерсин. ун-т, Турция),
Д. Шимшек (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бишкек; Техн. ун-т Конья, Турция)

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА – УОЛША В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ КУСОЧНО АСИМПТОТИЧЕСКИ КОНФОРМНОЙ КРИВОЙ С ВНУТРЕННИМИ НЕНУЛЕВЫМИ УГЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА*

We continue the investigation of the order of growth of the modulus of an arbitrary algebraic polynomial in the Bergman weight space, where the contour and weight functions have certain singularities. In particular, we deduce a Bernstein–Walsh-type pointwise estimate for algebraic polynomials in unbounded domains with a piecewise asymptotically conformal curve with nonzero inner angles in the Bergman weight space.

Продовжено вивчення порядку зростання модуля довільного алгебраїчного полінома у ваговому просторі Бергмана, де контур і вагові функції мають деякі особливості. Зокрема, отримано початкову оцінку типу Бернштейна – Уолша для алгебраїчних поліномів у необмежених областях з кусково асимптотично конформною кривою з внутрішніми ненульовими кутами у ваговому просторі Бергмана.

1. Введение и основные результаты. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область с $0 \in G$, ограниченная жордановой кривой $L := \partial G$, $\Omega := \operatorname{ext} L := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$, где $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\Delta := \{w : |w| > 1\}$, и $\wp_n$ обозначает множество алгебраических полиномов $P_n(z)$ степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Пусть $w = \Phi(z)$ — однолистное конформное отображение Ω на Δ, нормированное условием $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim_{z \to \infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$, и $\Psi := \Phi^{-1}$. Для $t \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$ и $M \subset \mathbb{C}$ положим

$$L_t := \left\{ z : \left|\Phi(z)\right| = t \right\}, \qquad L_1 \equiv L, \qquad G_t := \operatorname{int} L_t, \qquad \Omega_t := \operatorname{ext} L_t,$$

$$d(z, M) = \operatorname{dist}(z, M) := \inf \left\{ |z - \zeta| : \zeta \in M \right\}.$$

Согласно классическим результатам Бернштейна [17], Фабера [23], Уолша [33] (в удобном для нас виде),

$$\left|P_n(z)\right| \leq R^n \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad R > 1, \quad z \in \Omega \cap G_R, \tag{1.1}$$

где

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} := \max \left\{ \left|P_n(z)\right|, \, z \in \overline{G} \, \right\}.$$

Такие вопросы часто встречаются при изучении обратных задач теории приближения функций алгебраическими многочленами и во многих других задачах.

Для получения аналога оценки типа (1.1) относительно других норм приведем некоторые определения и обозначения.

* Частично поддержана KTMU (проект № 2016 FBE 13).

Пусть $\{z_j\}_{j=1}^m$ — фиксированная система различных точек на кривой L, расположенных в положительном направлении. Для фиксированных R_0, $1 < R_0 < \infty$, и $z \in G_{R_0}$ рассмотрим так называемую обобщенную весовую функцию Якоби $h(z)$, определенную равенством

$$h(z) := h_0(z) \prod_{j=1}^{m} |z - z_j|^{\gamma_j}, \quad z \in G_R, \tag{1.2}$$

где $\gamma_j > -2$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ и h_0 равномерно отделена от нуля в G_{R_0}, т. е. существует постоянная $c_0 := c_0(G_{R_0}) > 0$ такая, что $h_0(z) \geq c_0 > 0$ для всех $z \in G_{R_0}$.

Для каждого $p > 0$ введем

$$\|P_n\|_{A_p} := \|P_n\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z) \big| P_n(z) \big|^p d\sigma_z \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_{A_\infty} := \|P_n\|_{A_\infty(1,G)} := \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad p = \infty,$$

где σ_z — двумерная мера Лебега для произвольной жордановой области G, и

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p} := \big\|P_n\big\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z) \big| P_n(z) \big|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_\infty} := \big\|P_n\big\|_{\mathcal{L}_\infty(1,L)} := \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad p = \infty,$$

для спрямляемой жордановой кривой L. Ясно, что $\|\cdot\|_{A_p}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p}$ являются квазинормами (т. е. нормами для $1 \leq p \leq \infty$ и p-нормами для $0 < p < 1$).

Оценка типа Бернштейна – Уолша в $\mathcal{L}_p(h, L)$, $p > 0$, была получена в [24] для $h(z) \equiv 1$ и в [8] (лемма 2.4) для $h(z)$, определенной в (1.2), в виде

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L_R)} \leq R^{n + \frac{1+\gamma^*}{p}} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \qquad \gamma^* = \max\{0; \gamma_j : j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Для произвольной жордановой области G и $A_p(1, G)$-квазинормы, $p > 0$, аналогичная оценка была получена в [4] (теорема 1.1), где был установлен следующий результат: для каждых $p > 0$, $P_n \in \wp_n$, $R_1 = 1 + \dfrac{1}{n}$ и произвольного R, $R > R_1$,

$$\|P_n\|_{A_p(G_R)} \leq c R^{n + \frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(G_{R_1})}.$$

Здесь постоянная

$$c = \left(\frac{2}{e^p - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad n \to \infty,$$

является точной.

Теперь приведем аналогичную оценку в $A_p(h, G)$ для $h(z) \neq 1$ по отношению к паре (G, G_R).

Согласно [25, с. 97; 27], жорданова кривая (или дуга) L называется K-квазиконформной ($K \geq 1$), если существует K-квазиконформное отображение f области $D \supset L$ такое, что $f(L)$

является окружностью (или отрезком прямой). Существуют другие определения и геометрические критерии квазиконформности кривой [13, с. 81; 25, с. 105; 28, с. 286 – 294; 29, с. 107]. Приведем одно из них.

Пусть S — жорданова кривая и $z = z(s)$, $s \in [0, |S|]$, $|S| := \operatorname{mes} S$, — ее натуральная параметризация. Пусть $z_1, z_2 \in S$ — произвольные точки и $S(z_1, z_2) \subset S$ обозначает дугу кривой S меньшего диаметра с концами в точках z_1 и z_2. Кривая S является квазиконформной тогда и только тогда, когда величина

$$\sup_{z_1, z_2 \in S;\ z \in S(z_1, z_2)} \frac{|z_1 - z| + |z - z_2|}{|z_1 - z_2|} \tag{1.3}$$

ограничена. Согласно [26], кривая S называется „*c-квазиконформной*", если величина (1.3) ограничена положительной постоянной c, не зависящей от точек z_1, z_2 и z.

В [3] была получена следующая оценка типа Бернштейна – Уолша для областей G с квазиконформной границей и весовой функцией $h(z)$, определенной в (1.2) с $\gamma_j > -2$, для любых $p > 0$:

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_R)} \le c_1 {R^*}^{n + \frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h, G)},$$

где $R^* := 1 + c_2(R - 1)$, $c_2 > 0$ и $c_1 := c_1(G, p, c_2) > 0$ — постоянные, не зависящие от n и R.

N. Stylianopoulos [31] заменил норму $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ нормой $\|P_n\|_{A_2(G)}$ в правой части (1.1) и установил новую версию леммы Бернштейна – Уолша: *для квазиконформной и спрямляемой кривой L и любого $P_n \in \wp_n$ имеет место оценка*

$$\left|P_n(z)\right| \le c_3(L) \frac{\sqrt{n}}{d(z, L)} \|P_n\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1}, \quad z \in \Omega, \tag{1.4}$$

с постоянной $c_3(L) > 0$, не зависящей от n и z.

В настоящей статье для неограниченной области Ω мы изучаем поточечные оценки вида

$$\left|P_n(z)\right| \le c_4 \frac{\eta_n(G, h, p)}{d(z, L)} \|P_n\|_{A_p} \left|\Phi(z)\right|^{n+1}, \quad z \in \Omega, \tag{1.5}$$

где $c_4 = c_4(G, h, p) > 0$ — постоянная, не зависящая от n и P_n, $\eta_n(G, h, p) \to \infty$, $n \to \infty$.

Отметим, что для некоторых норм и различных неограниченных областей аналогичные результаты типа (1.5) были получены Н. А. Лебедевым, П. М. Тамразовым, В. К. Дзядыком, И. А. Шевчуком (см., например, [19, с. 418 – 428; 32]). Ф. Г. Абдуллаев (и др.) получил аналогичные результаты при $p > 1$ для областей, ограниченных кусочно-Дини-гладкой границей без точек возврата [6], при $p > 0$ для областей, ограниченных квазиконформной кривой (см. [7] для $h(z) \equiv 1$ и [11] для $h(z) \ne 1$), при $p > 1$ для областей, ограниченных кусочно-гладкой кривой без точек возврата [5], при $p > 0$ для областей, ограниченных асимптотически конформной кривой [10], и т. д.

Для квазинормы $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p(h, L)}$, некоторых кривых и весовой функции $h(z)$, определенной в (1.2) с $\gamma_j > -1$, результаты, аналогичные (1.4), были получены во многих работах (см., например, [8, 9]).

Мы исследуем аналогичную проблему для $z \in \Omega$ в области, ограниченной кусочно асимптотически конформной кривой, имеющей ненулевые внутренние и внешние углы, и для весовой функции $h(z)$, определенной в (1.2).

Приведем некоторые определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

Жорданова кривая S называется асимптотически конформной [16, 29], *если*

$$\sup_{z_1,z_2\in S;\ z\in S(z_1,z_2)} \frac{|z_1-z|+|z-z_2|}{|z_1-z_2|} \to 1, \quad |z_1-z_2| \to 0.$$

Обозначим этот класс через AC и будем писать $G \in AC$, если $L := \partial G \in AC$.

Асимптотически конформные кривые занимают особое место в задачах геометрической теории функций комплексной переменной. В различных задачах эти кривые изучались во многих работах (см., например, [14, 18, 20 – 22, 30]). В соответствии с геометрическими критериями квазиконформности кривых [13, с. 81; 29, с. 107] каждая асимптотически конформная кривая является квазиокружностью. Каждая гладкая кривая асимптотически конформна, но не содержит углы. Известно, что квазиокружности могут быть не спрямляемыми (см., например, [15; 25, с. 104]). То же справедливо для асимптотически конформных кривых.

Жорданова дуга ℓ называется асимптотически конформной, если она является частью некоторой асимптотически конформной кривой.

Теперь определим новый класс областей, ограниченных кусочно асимптотически конформными кривыми, имеющими внешние ненулевые „углы” в точках стыка граничных дуг.

На протяжении всей работы предполагаем, что $p > 0$ и постоянные $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ положительные, а постоянные $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ положительные и достаточно малые (как правило, отличающиеся в разных соотношениях), которые обычно зависят от G и несущественных параметров; в противном случае зависимость будет четко указана. Также следует отметить, что для любых $k \geq 0$ и $m > k$ обозначение $j = \overline{k,m}$ означает, что $j = k, k+1, \ldots, m$.

Теперь определим „специальные углы” кривой L.

Определение 1.1. *Будем писать, что жорданова область $G \in PAC(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $0 < \nu_j < 2$, $j = \overline{1,m}$, если $L = \partial G$ состоит из объединения конечного числа асимптотически конформных дуг $\{L_j\}_{j=1}^m$ с точками стыка $\{z_j\}_{j=1}^m \in L$ такими, что в $z_0 \in L \backslash \{z_j\}_{j=1}^m$ L локально асимптотически конформна и для каждой точки $z_j \in L$, $j = \overline{1,m}$, в которой две дуги L_{j-1} и L_j стыкуются, существуют $r_j := r_j(L, z_j) > 0$ и $\nu_j := \nu_j(L, z_j)$, $0 < \nu_j < 2$, такие, что для некоторого $0 \leq \theta_0 < 2$ замкнутый максимальный широкий круговой сектор $S(z_j; r_j, \nu_j) := \left\{\zeta : \zeta = z_j + r_j e^{i\theta\pi},\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + \nu_j\right\}$ радиуса r_j и раствора $\nu_j \pi$ лежит в $\overline{G} = \overline{\operatorname{int} L}$ с вершиной в z_j.*

Ясно, что $PAC(\nu_1) \subset PAC(\nu_2)$, если $\nu_2 \geq \nu_1$.

Определение 1.2. *Будем писать, что жорданова область $G \in PAC(\nu)$, если $G \in PAC(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $0 < \nu_j < 2$, $j = \overline{1,m}$, где $\nu = \min\left\{\nu_j : 0 < \nu_j < 2,\ j = \overline{1,m}\right\}$.*

Согласно определению 1.1 (1.2) ясно, что каждая область $G \in PAC(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $0 < \nu_1, \ldots, \nu_m < 2$ $(G \in PAC(\nu))$, может иметь „сингулярности” в граничных точках $\{z_i\}_{i=1}^m \in L$. Если она не имеет таких „сингулярностей” $\big($в этом случае полагаем $\nu_i = 1$, $i = \overline{1,m}\big)$, то пишем $G \in AC$.

В соответствии с „three-point” критерием [13, с. 100] (1.3), каждая кусочно асимптотически конформная кривая (без точек возврата) является квазиконформной.

На протяжении всей работы будем предполагать, что точки $\{z_i\}_{i=1}^m \in L$, определенные в (1.2), и точки $\{\zeta_i\}_{i=1}^m \in L$, определенные в определении 1.1, совпадают. Без потери общности также будем предполагать, что точки $\{z_i\}_{i=1}^m$ упорядочены в положительном направлении на кривой L.

Предположим, что кривая L имеет „особенность” в граничных точках $\{z_i\}_{i=1}^m$, т. е. $\nu_i < 1$ для всех $i = \overline{1,m}$, и весовая функция h имеет „особенности” в тех же граничных точках, т. е. $\gamma_i \neq 0$ для некоторых $i = \overline{1,m}$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $p > 0$. *Предположим, что* $G \in PAC(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ *для некоторых* $0 < \nu_1, \ldots, \nu_m < 1$, $h(z)$ *определена в* (1.2). *Тогда для любого* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > -2$ *и сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\left|P_n(z)\right| \leq c_1 \frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{d^{2/p}(z, L_{1+\varepsilon_1/n})} A_{n,1} \left\|P_n\right\|_{A_p}, \quad z \in \Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}},$$

где $c_1 = c_1(G, \nu_1, \ldots, \nu_m, p, \varepsilon) > 0$ *— постоянная, не зависящая от* z *и* n,

$$A_{n,1} := \begin{cases} n^{\frac{\widetilde{\gamma}\widetilde{\nu}^*}{p}}, & \text{если} \quad \widetilde{\gamma}\widetilde{\nu}^* > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad \widetilde{\gamma}\widetilde{\nu}^* = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad 0 \leq \widetilde{\gamma}\widetilde{\nu}^* < 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\widetilde{\gamma} := \max\{0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m,\}, \qquad \widetilde{\nu}^* := \min\{\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_m^*\}$$

и

$$\nu_j^* := \begin{cases} 2 - \nu_j, & 0 < \nu_j < 1, \\ 1 + \varepsilon, & \nu_j = 1, \end{cases} \qquad j = \overline{1,m}.$$

Теорема 1.1 распространяет результаты [10] на случай области с внутренними ненулевыми углами.

Для каждого фиксированного $\rho > 1$ положим $\Omega_\rho := \bigcup\limits_{j=1}^m \Omega_\rho^j$, где Ω_ρ^j определено ниже в (2.9). Тогда из теоремы 1.1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.1.** *При условиях теоремы* 1.1 *для каждого* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > -2$ *и произвольно малого* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\left|P_n(z)\right| \leq c_2 \frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{d^{2/p}(z, L_{1+\varepsilon_1/n})} A_{n,2} \left\|P_n\right\|_{A_p}, \quad z \in U_\delta(z_j) \cap \Omega^j_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}},$$

где $c_2 = c_2(G, \nu_1, \ldots, \nu_m, p, \varepsilon) > 0$ *— постоянная, не зависящая от* z *и* n,

$$A_{n,2} := \begin{cases} n^{\frac{\widetilde{\gamma}_j\nu_j^*}{p}}, & \text{если} \quad \widetilde{\gamma}_j\nu_j^* > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad \widetilde{\gamma}_j\nu_j^* = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad 0 \leq \widetilde{\gamma}_j\nu_j^* < 1, \end{cases} \tag{1.7}$$

$U_\delta(z_j) := \big\{z \colon |z - z_j| < \delta,\ \delta > 0\big\}$ *и* $\widetilde{\gamma}_j := \max\{0, \gamma_j\}$, $j = \overline{1,m}$.

Объединяя теорему 1.1 с теоремой 1.1 из [12], в соответствии с (1.1) получаем оценку роста $|P_n(z)|$ во всей комплексной плоскости.

***Следствие* 1.2.** *При условиях теоремы* 1.1 *для каждых* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > -2$ *и произвольно малого* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\left|P_n(z)\right| \le c_3 \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\frac{(2+\widetilde{\gamma})\widetilde{\nu}^*}{p}}, & z \in \overline{G}_{\Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}}, \\ \dfrac{A_{n,2}}{d^{\frac{2}{p}}\left(z, L_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z \in \Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}, \end{cases}$$

где $c_3 = c_3(G, \nu_1, \ldots, \nu_m, p, \varepsilon) > 0$ *и* $A_{n,2}$ *определено в* (1.7).

Теперь приведем соответствующую оценку величины $|P_n(z)|$ в точках $z \in G$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть* $p > 0$. *Предположим, что* $G \in PAC(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ *для некоторых* $0 < < \nu_1, \ldots, \nu_m < 1$, $h(z)$ *определена в* (1.2). *Тогда для любого* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > -2$, $j = 1, 2$, *и сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\left|P_n(z)\right| \le c_4 \frac{A_{n,1}}{d^{2/p}(z, L)} \|P_n\|_{A_p}, \quad z \in G,$$

где $c_4 = c_4(G, \nu_1, \ldots, \nu_m, p, \varepsilon) > 0$ — *постоянная, не зависящая от* z *и* n, $A_{n,1}$ *определено в* (1.6).

2. Некоторые вспомогательные результаты. На протяжении всей работы для функций $a > 0$ и $b > 0$ будем использовать обозначения $a \preceq b$ (порядковое неравенство), если $a \le cb$, и, соответственно $a \asymp b$, если $c_1 a \le b \le c_2 a$ для некоторых постоянных c, c_1, c_2 (не зависящих от a и b).

Лемма 2.1 [1]. *Пусть* L — K*-квазиконформная кривая*, $z_1 \in L$, $z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z \colon |z - z_1| \preceq \preceq d(z_1, L_{r_0})\}$, $w_j = \Phi(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. *Тогда*:

1) *соотношения* $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ *и* $|w_1 - w_2| \preceq |w_1 - w_3|$ *эквивалентны, также эквивалентны соотношения* $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ *и* $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$;

2) *если* $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$, *то*

$$\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{\epsilon} \preceq \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preceq \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{c},$$

где $0 < r_0 < 1$, $\epsilon > 0$, $c > 0$ — *постоянные, зависящие от* G.

Лемма 2.2 [26, с. 342]. *Пусть* L — *асимптотически конформная кривая. Тогда* Φ *и* Ψ *принадлежат* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *для всех* $\alpha < 1$ *в* $\overline{\Omega}$ *и* $\overline{\Delta}$ *соответственно.*

Лемма 2.3 [2]. *Предположим, что* L — K*-квазиконформная кривая*, $h(z)$ *определена в* (1.2). *Тогда для произвольных* $P_n(z) \in \wp_n$, *каждых* $R > 1$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_R)} \preceq \widetilde{R}^{n + \frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h, G)}, \quad p > 0,$$

где $\widetilde{R} = 1 + c(R - 1)$ *и* c *не зависит от* n *и* R.

***2.1. Доказательство теоремы* 1.1.** Предположим, что $m = 2$, $G \in PAC(\nu_1, \nu_2)$ для некоторых $0 < \nu_1,\ \nu_2 < 1$ и $h(z)$ определена в (1.2). Пусть $\{\xi_j\}$, $1 \leq j \leq k \leq n$, — нули (если есть) $P_n(z)$, лежащие на Ω. Определим функцию Бляшке относительно нулей $\{\xi_j\}$ полинома $P_n(z)$:

$$\widetilde{B}_j(z) := \frac{\Phi(z) - \Phi(\xi_j)}{1 - \overline{\Phi(\xi_j)}\Phi(z)}, \quad z \in \Omega, \tag{2.1}$$

и положим

$$B_m(z) := \prod_{j=1}^{m} \widetilde{B}_j(z), \quad z \in \Omega. \tag{2.2}$$

Ясно, что

$$B_m(\xi_j) = 0, \qquad |B_m(z)| \equiv 1, \quad z \in L; \qquad |B_m(z)| < 1, \quad z \in \Omega. \tag{2.3}$$

Тогда для любого $\varepsilon_1,\ 0 < \varepsilon_1 < 1$, существует окружность

$$\left\{ w \colon |w| = R_1 := 1 + \varepsilon_2,\ 0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{n} \right\}$$

такая, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\left| \widetilde{B}_j(\zeta) \right| > 1 - \varepsilon_2, \quad \zeta \in L_{R_1},$$

откуда

$$\left| B_m(\zeta) \right| > (1 - \varepsilon_2)^k \succeq 1, \quad \zeta \in L_{R_1}. \tag{2.4}$$

Для каждых $p > 0$ и $z \in \Omega$ положим

$$Q_{n,p}(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_m(z)\Phi^{n+1}(z)} \right]^{p/2}. \tag{2.5}$$

Функция $Q_{n,p}(z)$ аналитическая в Ω, непрерывная на $\overline{\Omega}$, $Q_{n,p}(\infty) = 0$ и не имеет нулей в Ω. Выделим произвольную непрерывную ветвь $Q_{n,p}(z)$, и для этой ветви сохраним то же обозначение. Согласно интегральному представлению Коши, для неограниченной области Ω имеем

$$Q_{n,p}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1}} Q_{n,p}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_{R_1}.$$

Согласно (2.1) – (2.5) имеем

$$|P_n(z)|^{p/2} \leq \frac{\left| B_m(z)\Phi^{n+1}(z) \right|^{\frac{p}{2}}}{2\pi d(z, L_{R_1})} \int\limits_{L_{R_1}} \left| \frac{P_n(\zeta)}{B_m(\zeta)\Phi^{n+1}(\zeta)} \right|^{p/2} |d\zeta| \preceq$$

$$\preceq \frac{\left| \Phi^{n+1}(z) \right|^{\frac{p}{2}}}{d(z, L_{R_1})} \int\limits_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)|^{p/2} \, |d\zeta|. \tag{2.6}$$

Умножив числитель и знаменатель последнего подынтегрального выражения на $h^{1/2}(\zeta)$, заменив переменную $t=\Phi(\zeta)$ и применив неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим

$$\left(\int\limits_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)|^{\frac{p}{2}}\,|d\zeta|\right)^2 \le \left(\int\limits_{|t|=R_1} h(\Psi(t))\,|P_n(\Psi(t))|^p\,\left|\Psi'(t)\right|^2 |dt|\right)\left(\int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))}\right)=$$

$$=\left(\int\limits_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p\,|dt|\right)\left(\int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))}\right)=:A_nD_n, \tag{2.7}$$

где

$$f_{n,p}(t):=h^{\frac{1}{p}}\big(\Psi(t)\big)P_n\big(\Psi(t)\big)\big(\Psi'(t)\big)^{\frac{2}{p}},\quad |t|=R_1.$$

Для оценки интеграла A_n разбиваем окружность $|t|=R_1$ на n равных частей δ_n с $\operatorname{mes}\delta_n = = \dfrac{2\pi R_1}{n}$ и, применяя теорему о среднем значении, получаем

$$A_n:\ =\int\limits_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p\,|dt|=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\delta_k} |f_{n,p}(t)|^p\,|dt|=\sum_{k=1}^{n}\left|f_{n,p}(t_k')\right|^p \operatorname{mes}\delta_k,\quad t_k'\in\delta_k.$$

Применяя оценку среднего значения

$$\left|f_{n,p}(t_k')\right|^p \le \frac{1}{\pi\left(|t_k'|-1\right)^2}\iint\limits_{\left|\xi-t_k'\right|<|t_k'|-1} |f_{n,p}(\xi)|^p\,d\sigma_\xi,$$

имеем

$$(A_n)^2 \preceq \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{mes}\delta_k}{\pi\big(|t_k'|-1\big)^2}\iint\limits_{\left|\xi-t_k'\right|<|t_k'|-1} |f_{n,p}(\xi)|^p\,d\sigma_\xi,\quad t_k'\in\delta_k.$$

Принимая во внимание, что по крайней мере два круга с центром t_k' пересекаются, находим

$$A_n \preceq \frac{\operatorname{mes}\delta_1}{(|t_1'|-1)^2}\iint\limits_{1<|\xi|<R} |f_{n,p}(\xi)|^p\,d\sigma_\xi \preceq n\iint\limits_{1<|\xi|<R} |f_{n,p}(\xi)|^p\,d\sigma_\xi.$$

Согласно лемме 2.3, для A_n получаем

$$A_n \preceq n\iint\limits_{G_R\setminus G} h(\zeta)\,|P_n(\zeta)|^p\,d\sigma_\zeta \preceq n\big\|P_n\big\|_p^p. \tag{2.8}$$

Для оценки интеграла D_n обозначим $w_j:=\Phi(z_j)$, $\varphi_j:=\arg w_j$, $j=1,2$, и для каждого фиксированного $\rho>1$ определим

$$\Delta_1(\rho) := \left\{ t = re^{i\theta} : r > \rho,\ \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \le \theta < 2\pi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \right\},$$

$$\Delta_2(\rho) := \left\{ t = re^{i\theta} : r > \rho,\ 2\pi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \le \theta < 2\pi + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \right\},$$

$$\Delta_j := \Delta_j(1), \qquad \Omega^j := \Psi(\Delta_j), \qquad \Omega^j_\rho := \Psi(\Delta_j(\rho)), \tag{2.9}$$

$$L^j := L \cap \overline{\Omega}^j, \qquad L = L^1 \cup L^1, \qquad L^j_\rho := L_\rho \cap \overline{\Omega}^j_\rho, \qquad L_\rho = L^1_\rho \cup L^2_\rho, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\Phi(L_{R_1}) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^{2} L^j_{R_1} \right) = \bigcup_{j=1}^{2} \Phi(L^j_{R_1}) = \bigcup_{j=1}^{2} \bigcup_{i=1}^{2} K^j_i(R_1),$$

где

$$K^j_1(R_1) := \left\{ t \in \Phi(L^j_{R_1}) :\ |t - w_j| < c_j \right\}, \qquad K^j_2(R_1) := \Phi(L^j_{R_1}) \backslash K^j_1(R_1), \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$D_n = \int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))} \preceq \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Phi(L^j_{R_1})} \frac{|dt|}{\prod_{j=1}^{2} |\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Phi(L^j_{R_1})} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} := \sum_{j=1}^{2} D_{n,j}, \tag{2.10}$$

так как точки $\{z_j\}_{j=1}^2 \in L$ различны. Осталось оценить интегралы

$$D_{n,j} := \int\limits_{\Phi(L^j_{R_1})} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} \tag{2.11}$$

для каждого $j = 1, 2$. Теперь определим

$$D_{n,j} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{K^j_i(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} =: \sum_{i=1}^{2} D^i_{n,j}. \tag{2.12}$$

Случай 1. Поскольку $G \in PAC(\nu_1, \nu_2)$ для некоторых $0 < \nu_1, \nu_2 < 1$, то, согласно [26], $\psi \in \mathrm{Lip}\, \nu_j$ и $\Phi \in \mathrm{Lip} \dfrac{1}{2-\nu_j}$, $i = 1, 2$, в некоторых фиксированных c_j-окрестностях точек z_j. Поэтому для каждого $j = 1, 2$ получаем

$$D^1_{n,j} = \int\limits_{K^j_1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} \preceq \int\limits_{K^j_1(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w_j|^{\gamma_j(2-\nu_j)}} \preceq$$

$$\preceq \begin{cases} n^{\gamma_j(2-\nu_j)-1}, & \text{если} \quad \gamma_j(2-\nu_j) > 1, \\ \ln n, & \text{если} \quad \gamma_j(2-\nu_j) = 1, \\ 1, & \text{если} \quad -2 < \gamma_j(2-\nu_j) < 1, \end{cases} \tag{2.13}$$

при $\gamma_j \geq 0$ и, учитывая лемму 2.1,

$$D^1_{n,j} = \int\limits_{K^j_1(R_1)} |\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{(-\gamma_j)} |dt| \preceq \int\limits_{K^j_1(R_1)} |t - w_j|^{(-\gamma_j)\epsilon} |dt| \leq$$

$$\leq (c_j)^{-\gamma_j \epsilon} \operatorname{mes} K^j_1(R_1) \preceq 1 \tag{2.14}$$

при $\gamma_j < 0$.

Случай 2. Аналогично, согласно лемме 2.2, для каждого $j = 1, 2$ имеем

$$D^2_{n,j} = \int\limits_{K^j_2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j}} \preceq \int\limits_{K^j_2(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w_j|^{\gamma_j(1+\varepsilon)}} \preceq$$

$$\preceq \begin{cases} n^{\gamma_j - 1 + \varepsilon}, & \text{если} \quad \gamma_j > 1 - \varepsilon, \\ \ln n, & \text{если} \quad \gamma_j = 1 - \varepsilon, \\ 1, & \text{если} \quad -2 < \gamma_j < 1 - \varepsilon, \end{cases} \tag{2.15}$$

при $\gamma_j \geq 0$ и

$$D^2_{n,j} \preceq \int\limits_{Kj(R_1)} |t - w_1|^{-\gamma_j \epsilon} |dt| \preceq 1 \tag{2.16}$$

при $\gamma_1 < 0$.

Следовательно, учитывая (2.10) – (2.16), получаем

$$D_n \preceq \sum_{j=1}^{2} \begin{cases} n^{\gamma_j \nu^*_j - 1}, & \text{если} \quad \gamma_j \nu^*_j > 1, \\ \ln n, & \text{если} \quad \gamma_j \nu^*_j = 1, \\ 1, & \text{если} \quad -2 < \gamma_j \nu^*_j < 1, \end{cases}$$

где

$$\nu^*_j := \begin{cases} 2 - \nu_j, & \qquad 0 < \nu_j < 1, \\ 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, & \qquad \nu_j = 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Объединяя соотношения (2.6) – (2.8) и (2.17), завершаем доказательство.

***2.2. Доказательство теоремы* 1.2.** Предположим, что $m = 2$, $G \in PAC(\nu_1, \nu_2)$ для некоторых $0 < \nu_1, \nu_2 < 1$ и $h(z)$ определена в (1.2). Пусть $w = \varphi_R(z)$ для каждого $R > 1$ обозначает однолистное конформное отображение G_R на $B := \{w \colon |w| < 1\}$, нормированное условием $\varphi_R(0) = 0$, $\varphi'_R(0) > 0$, и $\{\zeta_j\}$, $1 \leq j \leq m \leq n$, – нули $P_n(z)$, лежащие в G_R. Пусть

$$b_{m,R}(z) := \prod_{j=1}^{m} \widetilde{b}_{j,R}(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\varphi_R(z) - \varphi_R(\zeta_j)}{1 - \overline{\varphi_R(\zeta_j)}\varphi_R(z)} \qquad (2.18)$$

обозначает функцию Бляшке относительно нулей $\{\zeta_j\}$, $1 \leq j \leq m \leq n$, на $P_n(z)$ [33]. Ясно, что

$$\left|b_{m,R}(z)\right| \equiv 1, \quad z \in L_R, \qquad \text{и} \qquad \left|b_{m,R}(z)\right| < 1, \quad z \in G_R. \qquad (2.19)$$

Для любых $p > 0$ и $z \in G_R$ положим

$$T_{n.p}(z) := \left[\frac{P_n(z)}{b_{m,R}(z)}\right]^{p/2}.$$

Функция $T_{n,p}(z)$ аналитична в G_R, непрерывна на $\overline{G}_R$ и не имеет нулей в G_R. Выделим произвольную непрерывную ветвь $T_{n,p}(z)$, и для этой ветви сохраним то же обозначение. Согласно интегральному представлению Коши, в G_R имеем

$$T_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} T_{n,p}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

Теперь в соответствии с (2.19) получаем

$$\left|P_n(z)\right|^{p/2} \leq \frac{\left|b_{m,R}(z)\right|^{p/2}}{2\pi} \int\limits_{L_R} \left|\frac{P_n(\zeta)}{b_{m,R}(\zeta)}\right|^{p/2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{d(z,L)} \int\limits_{L_R} \left|P_n(\zeta)\right|^{p/2} |d\zeta|. \qquad (2.20)$$

Умножая числитель и знаменатель последнего подынтегрального выражения на $h^{1/2}(\zeta)$, заменяя переменную $t = \Phi(\zeta)$ и применяя неравенство Коши – Буняковского – Шварца, получаем

$$\left(\int\limits_{L_R} |P_n(\zeta)|^{\frac{p}{2}} |d\zeta|\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{|t|=R} h(\Psi(t)) \left|P_n\left(\Psi(t)\right)\right|^p \left|\Psi'(t)\right|^2 |dt|\right)\left(\int\limits_{|t|=R} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))}\right) =$$

$$= \left(\int\limits_{|t|=R} |f_{n,p}(t)|^p |dt|\right)\left(\int\limits_{|t|=R} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))}\right), \qquad (2.21)$$

где $f_{n,p}(t)$ определена в (2.7). Поскольку $R > 1$ произвольно, то (2.21) справедливо также для $R = R_1 := 1 + \dfrac{\varepsilon_1}{n}$, $0 < \varepsilon_1 < 1$. Таким образом, имеем

$$\left(\int\limits_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)|^{\frac{p}{2}} \, |d\zeta| \right)^2 \leq \left(\int\limits_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p \, |dt| \right) \left(\int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))} \right) =: A_n D_n, \qquad (2.22)$$

где A_n и D_n определены в (2.7). Объединяя соотношения (2.20), (2.22) с (2.8) и (2.17), завершаем доказательство.

Литература

1. *Abdullayev F. G., Andrievskii V. V.* On the orthogonal polynomials in the domains with K-quasiconformal boundary // Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR. Ser. FTM. – 1983. – **1**. – P. 3 – 7 (in Russian).
2. *Abdullayev F. G.* On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane. Pt III // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, № 12. – P. 1934 – 1948.
3. *Abdullayev F. G.* On the interference of the weight boundary contour for orthogonal polynomials over the region // J. Comput. Anal. and Appl. – 2004. – **6**, № 1. – P. 31 – 42.
4. *Abdullayev F. G., Özkartepe P.* An analogue of the Bernstein – Walsh lemma in Jordan regions of the complex plane // J. Inequal. and Appl. – 2013. – **570**. – P. 1 – 7.
5. *Abdullayev F. G., Gün C. D.* On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps // Ann. Polon. Math. – 2014. – **111**. – P. 39 – 58.
6. *Abdullayev F. G., Özkartepe N. P.* On the behavior of the algebraic polynomial in unbounded regions with piecewise Dini-smooth boundary // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 5. – P. 579 – 597.
7. *Abdullayev F. G., Özkartepe N. P.* Uniform and pointwise Bernstein – Walsh-type inequalities on a quasidisk in the complex plane // Bull. Belg. Math. Soc. – 2016. – **23**, № 2. – P. 285 – 310.
8. *Abdullayev F. G., Özkartepe P.* On the growch of algebraic polynomials in the whole complex plane // J. Korean Math. Soc. – 2015. – **52**, № 4. – P. 699 – 725.
9. *Abdullayev F. G., Özkartepe P.* Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with cusps in the weighted Lebesgue space // Jaen J. Approxim. – 2015. – **7**, № 2. – P. 231 – 261.
10. *Abdullayev F. G., Tunç T.* Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with asymptotically conformal curve on weighted Bergman space // Lobachevskii J. Math. – 2017. – **38**, № 2. – P. 193 – 205.
11. *Abdullayev F. G., Tunç T., Abdullayev G. A.* Polynomial inequalities in quasidisks on weighted Bergman space // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 5. – P. 675 – 695.
12. *Abdullayev G. A., Abdullayev F. G., Taylakova A.* Polynomial inequalities in regions bounded by piecewise asymptotically conformal curve with nonzero angles in the Bergman space // Adv. Anal. – 2018. – **3**, № 4. – P. 143 – 153.
13. *Ahlfors L.* Lectures on quasiconformal mappings. – Princeton, NJ: Van Nostrand, 1966.
14. *Anderson J. M., Becker J., Lesley F. D.* Boundary values of asymptotically conformal mapping // J. London Math. Soc. – 1988. – **38**, № 2. – P. 453 – 462.
15. *Belinskii P. P.* General properties of quasiconformal mappings. – Novosibirsk: Nauka, 1974 (in Russian).
16. *Becker J., Pommerenke C.* Über die quasikonforme Fortsetzung schlichten Funktionen // Math. Z. – 1978. – **161**. – S. 69 – 80.
17. *Bernstein S. N.* Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynomes de degre donne // Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. – 1912. – **4**, № 2. – P. 1 – 103.
18. *Dyn'kin E. M.* Nonanalytic symmetry principle and conformal mappings // St.Petersburg Math. J. – 1994. – **5**. – P. 523 – 544.
19. *Dzjadyk V. K.* Introduction to the theory of uniform approximation of function by polynomials. – Moskow: Nauka, 1977.
20. *Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On asymptotically conformal curves // Complex Var. – 1994. – **25**. – P. 357 – 366.
21. *Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the local behaviour of quasi-conformal mappings // Izv. Math. – 1995. – **59**, № 3. – P. 471 – 498.
22. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I.* On quasi-circles and asymptotically conformal circles // Dokl. Ross. Akad. Nauk. – 1993. – **330**, № 5. – P. 546 – 548 (English transl.: Russ. Acad. Sci. Math. – 1993. – **47**. – P. 563 – 566).

23. *Faber G.* Über nach Polynomen fortschreitende Reihen // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. – 1922. – S. 157 – 178.
24. *Hille E., Szegö G., Tamarkin J. D.* On some generalization of a theorem of A. Markoff // Duke Math. – 1937. – **3**. – P. 729 – 739.
25. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal mapping in the plane. – Berlin: Springer-Verlag, 1973.
26. *Lesley F. D.* Hölder continuity of conformal mappings at the boundary via the strip method // Indiana Univ. Math. J. – 1982. – **31**. – P. 341 – 354.
27. *Rickman S.* Characterization of quasiconformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1966. – **395**.
28. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
29. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. – Berlin: Springer-Verlag, 1992.
30. *Pommerenke Ch., Warschawski S. E.* On the quantitative boundary behavior of conformal maps // Comment. Math. Helv. – 1982. – **57**. – P. 107 – 129.
31. *Stylianopoulos N.* Strong asymptotics for Bergman polynomials over domains with corners and applications // Const. Approxim. – 2013. – **38**. – P. 59 – 100.
32. *Dzyadyk K. V., Shevchuk I. A.* Theory of uniform approximation of functions by polynomials. – Walter de Gruyter, 2008. – 480 p.
33. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. – Amer. Math. Soc., 1960.

Получено 31.10.18